

TD – EXERCICES

Arithmétique

Divisibilité, nombres premiers et fractions irréductibles

Version sujet – Version iPad

Sommaire du TD

I	Rappels : calculs et ensembles de nombres	2
II	Division euclidienne	3
III	Multiples, diviseurs et nombres premiers	8
IV	Calcul littéral et arithmétique	13
V	Décomposition en facteurs premiers et diviseurs	17
VI	Fractions irréductibles	22
VII	PGCD et PPCM	27
VIII	Partages et périodicité	28
IX	Algorithmique et Scratch	33
X	Exercices du Brevet	35
XI	Défis de concours	41

Objectifs du TD

- Réviser le calcul avec des fractions et des racines carrées, puis classer un résultat dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{D}$.
- Effectuer et interpréter une division euclidienne.
- Utiliser les notions de multiple, de diviseur et les critères de divisibilité.
- Reconnaître un nombre premier et décomposer un entier en facteurs premiers.
- Rendre une fraction irréductible et déterminer les diviseurs d'un entier.
- Calculer un PGCD et un PPCM et les utiliser dans des problèmes de partage ou de périodicité.
- Utiliser le calcul littéral pour démontrer des propriétés arithmétiques.
- Lire et compléter un programme Scratch faisant intervenir la divisibilité.

Thème I

Rappels : calculs et ensembles de nombres

Exercice 1 Calculer puis classer

Pour chacune des expressions suivantes :

1. effectuer le calcul en détaillant les étapes ;
2. indiquer le **plus petit ensemble (au sens de l'inclusion)** parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$ auquel appartient le résultat.



Aide

On rappelle que, pour tout nombre $a \geq 0$ et tout nombre k ,

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \text{et} \quad (k\sqrt{a})^2 = k\sqrt{a} \times k\sqrt{a} = k^2 \times a.$$

On rappelle aussi que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

- 1.

$$A = \frac{2}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{15}{2}.$$

- 2.

$$B = (2\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{2})^2.$$

- 3.**

$$C = \frac{3}{4} \times 8 - \frac{11}{2}.$$

- 4.

$$D = 5 - \frac{3}{2} \times \frac{8}{3}.$$

- 5.

$$E = (3\sqrt{5})^2 - 40.$$

- 6.**

$$F = \frac{5}{6} \times 12 - 13.$$

Division euclidienne

Exercise 2

Pour chacune des divisions suivantes, donner le quotient et le reste, puis écrire l'égalité correspondante :

$$725 \div 18, \quad 2\,035 \div 24, \quad 10\,000 \div 137.$$

Exercice 3 Un voyage scolaire

Source : Exercice adapté d'un ancien sujet de Brevet.

Pour un voyage, 154 élèves et 13 adultes doivent prendre des bus de 24 places. Tous les passagers doivent être assis.

1. Combien de personnes participent au voyage?
2. Effectuer la division euclidienne utile.
3. Combien de bus faut-il réserver? Justifier l'arrondi effectué.

Exercice 4 [!] Bilan : division et interprétation

Une association dispose de 1 247 livres. Elle range au maximum 32 livres par carton.

1. Effectuer la division euclidienne de 1 247 par 32.
2. Interpréter le quotient et le reste dans cette situation.
3. Combien de cartons sont nécessaires pour ranger tous les livres?

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 5,
page 6.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 6, page 7.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 5 **[+]** Consolidation : même méthode

Un collège doit ranger 1 385 manuels dans des caisses contenant au maximum 36 manuels.

1. Effectuer la division euclidienne de 1 385 par 36.
2. Interpréter le quotient et le reste dans cette situation.
3. Combien de caisses sont nécessaires pour ranger tous les manuels?

Exercice 6 [*] Approfondissement : retrouver le dividende

Dans la division euclidienne d'un entier N par 17, le quotient est le double du reste. De plus, le reste est strictement supérieur à 5 et $N < 250$. Déterminer toutes les valeurs possibles de N .

Thème III

Multiples, diviseurs et nombres premiers

Exercice 7 Critères de divisibilité

Sans effectuer de division, étudier la divisibilité de chacun des nombres 7 236, 4 515 et 8 070 par 2, 3, 4, 5, 9 et 10. Chaque réponse doit être justifiée.

Exercice 8

À l'aide des critères de divisibilité et de la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée dans le cours, étudier les nombres

51, 67, 87, 91, 97.

Pour chaque nombre non premier, donner une décomposition en produit de deux entiers strictement supérieurs à 1.

Exercice 9 [!] Bilan : vrai ou faux

Source : D'après plusieurs exercices du DNB, sessions antérieures à 2017.

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse en justifiant soigneusement.

1. Les diviseurs communs à 12 et 18 sont exactement les diviseurs de 6.
2. Tout nombre premier est impair.
3. Tout nombre impair est premier.
4. Si un entier est divisible par 6, alors il est divisible par 2 et par 3.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 10,
page 11.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 11, page 12.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercise 10

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse en justifiant soigneusement.

1. Les diviseurs communs à 20 et 30 sont exactement les diviseurs de 10.
2. Tout nombre pair est composé.
3. Tout nombre premier supérieur à 2 est impair.
4. Si un entier est divisible par 15, alors il est divisible par 3 et par 5.

Exercice 11 [*] Approfondissement : un entier à cinq chiffres

Source : Question 1 d'après le sujet de référence de mathématiques n° 2 du DNB, septembre 2026, partie 1, question 4.

1. Donner un entier à cinq chiffres divisible par 9 et se terminant par 7.
2. Déterminer tous les chiffres que l'on peut placer dans la case de $52\square 7$ pour obtenir un multiple de 9.
3. Parmi les nombres obtenus, lesquels sont aussi divisibles par 3 mais ne sont divisibles ni par 2 ni par 5 ?

Thème IV

Calcul littéral et arithmétique

Exercice 12 Vrai ou faux : pair ou impair ?

Pour chaque affirmation portant sur des entiers naturels, dire si elle est vraie ou fausse. La réponse doit être démontrée en utilisant les écritures

$2k$ et $2k + 1$.

où k désigne un entier naturel.

1. La somme de deux entiers pairs est paire.
2. La somme de deux entiers impairs est impaire.
3. La somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.
4. Le carré d'un entier impair est impair.
5. Le produit de deux entiers consécutifs est impair.

Exercice 13 Bilan : un programme donnant un multiple de 10

Source : D'après le DNB Pondichéry, avril 2014.

On considère le programme suivant :

Programme de calcul

Étape 1 Choisir un entier.

Étape 2 Lui ajouter 3.

Étape 3 Multiplier le résultat par 7.

Étape 4 Ajouter le triple du nombre choisi au départ.

Étape 5 Retrancher 21.

1. Appliquer ce programme à l'entier 4.
2. On note n l'entier choisi au départ. Écrire le résultat du programme en fonction de n .
3. Développer et réduire cette expression.
4. Démontrer que le résultat obtenu est toujours un multiple de 10.

Parcours A – Consolidation

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 14, page 15.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 15, page 16.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 14 **[+]** Consolidation : un programme donnant un multiple de 3

Source : Exercice repris de l'ancien TD d'arithmétique Math93.

On considère le programme suivant :

Programme de calcul

Étape 1 Choisir un entier.

Étape 2 Lui ajouter 3.

Étape 3 Multiplier le résultat par 5.

Étape 4 Retrancher le double du nombre choisi au départ.

1. Appliquer ce programme à l'entier 7.
2. On note n l'entier choisi au départ. Écrire le résultat du programme en fonction de n .
3. Développer et réduire cette expression.
4. Démontrer que le résultat obtenu est toujours un multiple de 3.

Exercice 15

[*] Approfondissement : trois entiers consécutifs

1. Expliquer pourquoi l'un au moins de ces trois entiers est pair.
2. Expliquer pourquoi l'un de ces trois entiers est divisible par 3.
3. En déduire que le produit $n(n+1)(n+2)$ est toujours un multiple de 6.
4. Vérifier cette propriété avec trois entiers consécutifs de votre choix.

Décomposition en facteurs premiers et diviseurs

Exercice 16

Décomposer en produit de facteurs premiers :

180, 756, 1 014, 1 260.

Exercice 17

On considère l'entier $N = 540$.

1. Décomposer N en produit de facteurs premiers.
2. Expliquer pourquoi 45 est un diviseur de N .
3. Déterminer tous les diviseurs de N compris entre 20 et 50.
4. Déterminer le nombre total de diviseurs positifs de N .

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 19,
page 20.

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 20, page 21.

On considère l'entier $M = 600$.

1. Décomposer M en produit de facteurs premiers.
2. Expliquer pourquoi 40 est un diviseur de M .
3. Déterminer tous les diviseurs de M compris entre 20 et 50.
4. Déterminer le nombre total de diviseurs positifs de M .

Exercice 20 [*] Approfondissement : exactement quinze diviseurs



Aide

On admet le résultat suivant : si

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

est la décomposition en facteurs premiers de N , alors le nombre de diviseurs positifs de N est

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1).$$

Trouver le plus petit entier naturel qui possède exactement 15 diviseurs positifs. Justifier qu'il est bien le plus petit.

Thème VI

Fractions irréductibles

Exercice 21 Révisions : calculer avec des fractions

Source : Le calcul E est adapté du DNB Amérique du Nord, juin 2014.

Effectuer les calculs suivants et donner chaque résultat sous forme irréductible :

$$A = \frac{3}{4} + \frac{5}{6}, \quad B = \frac{7}{10} - \frac{3}{4}, \quad C = \frac{14}{15} \times \frac{25}{21},$$

$$D = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) \div \frac{7}{9}, \quad E = \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{7}\right) \div \frac{1}{5}.$$

Rendre irréductibles les fractions suivantes en détaillant les décompositions :

$$\frac{180}{252}, \quad \frac{756}{441}, \quad \frac{1\,014}{1\,260}.$$

On considère la fraction $F = \frac{1\,386}{1\,980}$.

- Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 25, page 26.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

On considère la fraction $G = \frac{1\,575}{2\,310}$.

1. Décomposer le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers.
2. Rendre G irréductible en faisant apparaître les facteurs simplifiés.
3. Justifier que la fraction obtenue est irréductible.

Exercice 25

Déterminer le plus petit entier naturel non nul n pour lequel la fraction

$$\frac{84}{n}$$

est égale à une fraction irréductible de dénominateur 15.

Thème VII

PGCD et PPCM

Exercice 26 Calculer directement un PGCD et un PPCM

Pour chacun des couples d'entiers suivants :

1. décomposer les deux entiers en produits de facteurs premiers ;
 2. déterminer leur PGCD ;
 3. déterminer leur PPCM.
1. 252 et 360.
 2. 168 et 270.

Partages et périodicité

Former le plus grand nombre de groupes

Source : Sujet zéro officiel de mathématiques du DNB, série générale, sujet B, partie 2, exercice 4.

Dans un collège, 91 filles et 77 garçons participent à un club sciences. On souhaite former des groupes identiques : chaque groupe doit avoir le même nombre de filles et le même nombre de garçons.

1. Décomposer 91 et 77 en produits de facteurs premiers.
2. En déduire le nombre maximal de groupes que l'on peut former. Justifier.
3. Dans ce cas, combien d'élèves y aura-t-il dans chaque groupe ?

Source : Exercice adapté d'un ancien sujet de Brevet.

1. Après combien de temps repasseront-elles ensemble pour la première fois sur la ligne de départ ?
2. Elles roulent pendant 6 heures. Donner tous les instants, autres que le départ, où elles repassent ensemble sur cette ligne.

Exercice 29 [!] Bilan : une mosaïque

Source : D'après le DNB Amérique du Sud, novembre 2016.

Une surface rectangulaire de 108 cm sur 225 cm doit être recouverte sans découpe par des carreaux carrés identiques.

1. Des carreaux de 3 cm conviennent-ils ? Des carreaux de 6 cm ? Justifier.
2. Décomposer 108 et 225 en produits de facteurs premiers.
3. Déterminer la plus grande longueur possible pour le côté d'un carreau.
4. Combien de carreaux seront alors nécessaires ?

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 30,
page 31.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 31, page 32.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 30 **[+]** Consolidation : même problème

Une surface rectangulaire de 168 cm sur 252 cm doit être recouverte sans découpe par des carreaux carrés identiques.

1. Des carreaux de 6 cm conviennent-ils ? Des carreaux de 10 cm ? Justifier.
2. Décomposer 168 et 252 en produits de facteurs premiers.
3. Déterminer la plus grande longueur possible pour le côté d'un carreau.
4. Combien de carreaux seront alors nécessaires ?

Exercice 31 [*] Approfondissement : carreaux sur le pourtour

Source : Annale zéro officielle du DNB à compter de la session 2017, exercice 6.

Un panneau de 240 cm sur 360 cm est recouvert de carreaux carrés identiques, posés sans découpe ni jointure.

1. Quelles sont toutes les longueurs entières possibles du côté des carreaux comprises entre 10 cm et 20 cm ?
2. On choisit des carreaux de 15 cm. Une rangée de carreaux bleus est posée sur tout le pourtour et les autres carreaux sont blancs. Combien de carreaux bleus utilise-t-on ?

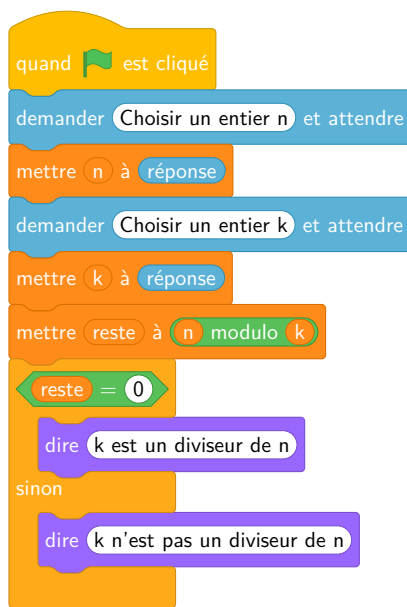
Thème IX

Algorithmique et Scratch

Exercice 32 Scratch : tester si un entier est un diviseur

Source : Exercice original, dans l'esprit des exercices Scratch du DNB.

On considère le programme Scratch suivant.

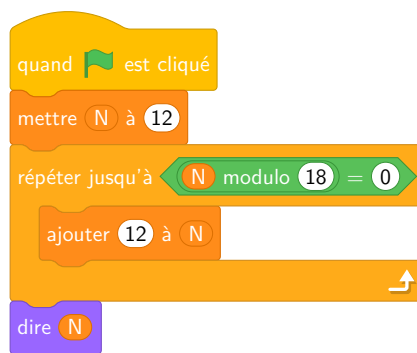


1. À quoi correspond la variable `reste` dans ce programme ?
2. On choisit $n = 84$ et $k = 7$. Quel message est affiché ? Justifier.
3. On choisit maintenant $n = 84$ et $k = 5$. Quel message est affiché ? Justifier.
4. Expliquer pourquoi ce programme permet de tester si k est un diviseur de n .

Exercice 33 Scratch : rechercher un premier multiple commun

Source : Exercice original, dans l'esprit des exercices Scratch du DNB.

Le programme suivant doit afficher le plus petit multiple positif de 12 qui est aussi divisible par 18.



1. Quelles sont les premières valeurs prises par la variable N ? Expliquer pourquoi toutes ces valeurs sont des multiples de 12.
2. Pourquoi la boucle s'arrête-t-elle lorsque N est divisible par 18 ?
3. Quelle valeur le programme affiche-t-il ?
4. Que représente le nombre obtenu pour 12 et 18 ?

Thème X

Exercices du Brevet

Exercice 34 [FLASH] Automatismes : divisibilité et fractions

Source : Question 1 issue du sujet de référence de mathématiques n° 2 du DNB, septembre 2026 ; autres questions dans l'esprit de la liste officielle d'automatismes.

Répondre sans calculatrice.

1. Donner un entier à cinq chiffres divisible par 9 et se terminant par 7.
2. Rendre la fraction $\frac{18}{24}$ irréductible.
3. Donner tous les diviseurs positifs de 24.
4. Le nombre 2025 est-il divisible par 3 ? par 9 ?

Exercice 35 [DNB] Objectif Brevet : diviseurs et probabilité

Source : Sujet zéro officiel de mathématiques du DNB, série générale, sujet B, partie 2, exercice 2.

Une urne contient 21 jetons numérotés de 1 à 21, indiscernables au toucher. On tire un jeton au hasard.

1. On note A l'événement « obtenir 2, 3 ou 10 ». Calculer $P(A)$ sous forme irréductible.
2. On note B l'événement « obtenir un jeton dont le numéro est un diviseur de 24 ».
 2. a. Donner les issues de l'événement B .
 2. b. Déterminer $P(B)$ sous forme irréductible.

Exercice 36

Source : DNB Pondichéry, avril 2014.

Emma et Arthur disposent de 3 003 dragées au chocolat et de 3 731 dragées aux amandes.

1. Ils répartissent d'abord les dragées de façon identique dans 20 corbeilles. Combien reste-t-il de dragées de chaque sorte ?
2. Ils souhaitent maintenant préparer des ballotins de composition identique en utilisant toutes les dragées.
 2. a. Peuvent-ils préparer 90 ballotins ? Justifier.
 2. b. Quel est le nombre maximal de ballotins ?
 2. c. Quelle sera alors la composition de chaque ballotin ?

Exercice 37 [!] Bilan : bilan du chapitre

Une association possède 420 bouteilles d'eau et 588 barres de céréales. Elle veut préparer le plus grand nombre possible de lots identiques en utilisant tout le stock.

1. Décomposer 420 et 588 en produits de facteurs premiers.
2. Déterminer le nombre maximal de lots. Justifier.
3. Donner la composition de chaque lot.
4. L'association range ensuite les lots dans des cartons pouvant contenir au maximum 16 lots. Combien de cartons faut-il prévoir ? Écrire la division euclidienne utilisée.
5. La fraction $\frac{420}{588}$ est-elle irréductible ? Sinon, la rendre irréductible.
6. Deux appareils de l'association sont vérifiés périodiquement : le premier toutes les 18 minutes et le second toutes les 24 minutes. Ils sont vérifiés ensemble à 9 h. À quelle heure seront-ils vérifiés ensemble pour la première fois après 9 h ? Justifier.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 38,
page 39.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 39, page 40.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 38 [+] Consolidation : même bilan

Une association possède 630 jus de fruits et 882 biscuits. Elle veut préparer le plus grand nombre possible de lots identiques en utilisant tout le stock.

1. Décomposer 630 et 882 en produits de facteurs premiers.
2. Déterminer le nombre maximal de lots. Justifier.
3. Donner la composition de chaque lot.
4. L'association range ensuite les lots dans des cartons pouvant contenir au maximum 20 lots. Combien de cartons faut-il prévoir ? Écrire la division euclidienne utilisée.
5. La fraction $\frac{630}{882}$ est-elle irréductible ? Sinon, la rendre irréductible.
6. Deux appareils de l'association sont vérifiés périodiquement : le premier toutes les 20 minutes et le second toutes les 30 minutes. Ils sont vérifiés ensemble à 14 h. À quelle heure seront-ils vérifiés ensemble pour la première fois après 14 h ? Justifier.

Exercice 39 [*] Approfondissement : trois contraintes

On cherche le plus petit entier naturel N strictement supérieur à 100 tel que :

- la division de N par 6 laisse un reste égal à 1 ;
- la division de N par 8 laisse un reste égal à 1 ;
- la division de N par 15 laisse un reste égal à 1.

Déterminer N en justifiant qu'il est bien le plus petit entier possible.

Défis de concours

★ ★ ★

「*」

Cinq entiers naturels non nuls, tous différents, ont pour somme 264. Leur plus grand diviseur commun est noté d . Déterminer la plus grande valeur possible de d , puis donner un exemple de cinq entiers qui permet de l'atteindre.

Exercice 41 ★★ ★ [*] Approfondissement : la pyramide multiplicative

Source : D'après Kangourou des mathématiques 2024, sujet C (4e-3e), question 23.

Une pyramide comporte trois entiers naturels non nuls sur sa ligne inférieure. Chaque case située au-dessus contient le produit des deux cases placées immédiatement en dessous.

La case du sommet contient 720. On note k l'entier placé au milieu de la ligne inférieure. Combien de valeurs différentes k peut-il prendre ?

★ ★ ★

Combien existe-t-il d'entiers à quatre chiffres dont la somme des chiffres est égale au produit des chiffres?

★ ★ ★

EN Choose a , b and c from $3^1, 3^2, \dots, 3^8$, with $a \leq b \leq c$. How many triples make ab/c , ac/b and bc/a integers?

FR On choisit a , b et c parmi $3^1, 3^2, \dots, 3^8$, avec $a \leq b \leq c$. Combien de triplets rendent entiers les quotients ab/c , ac/b et bc/a ?

Exercice 44 ★★★ [*] **Approfondissement : trois chiffres à choisir**

Source : D'après Concours Pascal (Grade 9), Université de Waterloo, 2025, question 25.

Les lettres A , B et C représentent des chiffres (de 0 à 9) qui peuvent être égaux. Une même lettre désigne toujours le même chiffre. On forme les trois nombres à six chiffres

$$\overline{7A6B5C}, \quad \overline{2B9C5A}, \quad \overline{7C1A6B}.$$

EN How many choices of the digits (A, B, C) make the sum of these three numbers divisible by 36?

FR De combien de façons peut-on choisir les chiffres (A, B, C) pour que la somme de ces trois nombres soit divisible par 36 ?

↩ **Fin du devoir** ↪