

TD – EXERCICES

Arithmétique

Divisibilité, nombres premiers et fractions irréductibles

Version corrigée – Version imprimable

Sommaire du TD

I	Rappels : calculs et ensembles de nombres	2
II	Division euclidienne	4
III	Multiples, diviseurs et nombres premiers	6
IV	Calcul littéral et arithmétique	8
V	Décomposition en facteurs premiers et diviseurs	11
VI	Fractions irréductibles	14
VII	PGCD et PPCM	16
VIII	Partages et périodicité	17
IX	Algorithmique et Scratch	20
X	Exercices du Brevet	23
XI	Défis de concours	26

Objectifs du TD

- Réviser le calcul avec des fractions et des racines carrées, puis classer un résultat dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{D}$.
- Effectuer et interpréter une division euclidienne.
- Utiliser les notions de multiple, de diviseur et les critères de divisibilité.
- Reconnaître un nombre premier et décomposer un entier en facteurs premiers.
- Rendre une fraction irréductible et déterminer les diviseurs d'un entier.
- Calculer un PGCD et un PPCM et les utiliser dans des problèmes de partage ou de périodicité.
- Utiliser le calcul littéral pour démontrer des propriétés arithmétiques.
- Lire et compléter un programme Scratch faisant intervenir la divisibilité.

Thème I

Rappels : calculs et ensembles de nombres

Exercice 1 Calculer puis classer

Pour chacune des expressions suivantes :

- effectuer le calcul en détaillant les étapes ;
- indiquer le **plus petit ensemble (au sens de l'inclusion)** parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$ auquel appartient le résultat.



Aide

On rappelle que, pour tout nombre $a \geq 0$ et tout nombre k ,

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \text{et} \quad (k\sqrt{a})^2 = k\sqrt{a} \times k\sqrt{a} = k^2 \times a.$$

On rappelle aussi que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.

1.

$$A = \frac{2}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{15}{2}.$$



Corrigé

On effectue d'abord la multiplication.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{15}{2} \\ &= \frac{2}{5} - \frac{4 \times 15}{5 \times 2} \\ &= \frac{2}{5} - 6 \\ &= \frac{2}{5} - \frac{30}{5} \\ &= -\frac{28}{5} \end{aligned}$$

$$A = -5,6$$

Le nombre $-5,6$ est décimal mais n'est pas entier. Ainsi :

$$A \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad A \notin \mathbb{Z}.$$

2.

$$B = (2\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{2})^2.$$



Corrigé

$$\begin{aligned} B &= (2\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{2})^2 \\ &= 2^2 \times (\sqrt{3})^2 - 5^2 \times (\sqrt{2})^2 \\ &= 4 \times 3 - 25 \times 2 \\ &= 12 - 50 \end{aligned}$$

$$B = -38$$

Le nombre -38 est un entier relatif mais n'est pas un entier naturel. Donc :

$$B \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad B \notin \mathbb{N}.$$

3.

$$C = \frac{3}{4} \times 8 - \frac{11}{2}.$$



Corrigé

$$\begin{aligned} C &= \frac{3}{4} \times 8 - \frac{11}{2} \\ &= 6 - \frac{11}{2} \\ &= \frac{12}{2} - \frac{11}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{C = 0,5}$$

Le nombre 0,5 est décimal mais n'est pas entier. Ainsi :

$$\boxed{C \in \mathbb{D} \quad \text{et} \quad C \notin \mathbb{Z}.}$$

4.

$$D = 5 - \frac{3}{2} \times \frac{8}{3}.$$



Corrigé

On effectue d'abord la multiplication.

$$\begin{aligned} D &= 5 - \frac{3}{2} \times \frac{8}{3} \\ &= 5 - \frac{3 \times 8}{2 \times 3} \\ &= 5 - 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{D = 1}$$

Le nombre 1 est un entier naturel. Donc :

$$\boxed{D \in \mathbb{N}.}$$

5.

$$E = (3\sqrt{5})^2 - 40.$$



Corrigé

$$\begin{aligned} E &= (3\sqrt{5})^2 - 40 \\ &= 3^2 \times (\sqrt{5})^2 - 40 \\ &= 9 \times 5 - 40 \\ &= 45 - 40 \end{aligned}$$

$$\boxed{E = 5}$$

Le nombre 5 est un entier naturel. Ainsi :

$$\boxed{E \in \mathbb{N}.}$$

6.

$$F = \frac{5}{6} \times 12 - 13.$$

**Corrigé**

$$F = \frac{5}{6} \times 12 - 13$$

$$= 10 - 13$$

$$\boxed{F = -3}$$

Le nombre -3 est un entier relatif mais n'est pas un entier naturel. Donc :

$$\boxed{F \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad F \notin \mathbb{N}.}$$

Thème II**Division euclidienne****Exercice 2 Effectuer et interpréter une division euclidienne**

Pour chacune des divisions suivantes, donner le quotient et le reste, puis écrire l'égalité correspondante :

$$725 \div 18, \quad 2035 \div 24, \quad 10\,000 \div 137.$$

[Corrigé ci-dessous](#)

**Corrigé**

$$725 = 18 \times 40 + 5,$$

$$2\,035 = 24 \times 84 + 19,$$

$$10\,000 = 137 \times 72 + 136.$$

Les quotients sont respectivement 40, 84 et 72 ; les restes sont 5, 19 et 136.

Exercice 3 Un voyage scolaire

Source : Exercice adapté d'un ancien sujet de Brevet.

Pour un voyage, 154 élèves et 13 adultes doivent prendre des bus de 24 places. Tous les passagers doivent être assis.

- Combien de personnes participent au voyage ?
- Effectuer la division euclidienne utile.
- Combien de bus faut-il réserver ? Justifier l'arrondi effectué.

[Corrigé ci-dessous](#)

**Corrigé**

- Il y a $154 + 13 = 167$ participants.
- $167 = 24 \times 6 + 23$.
- Six bus ne transportent que 144 personnes. Comme il reste 23 personnes, il faut réserver $\boxed{7 \text{ bus}}$.

Exercice 4 [!] Bilan : division et interprétation

Une association dispose de 1 247 livres. Elle range au maximum 32 livres par carton.

- Effectuer la division euclidienne de 1 247 par 32.
- Interpréter le quotient et le reste dans cette situation.
- Combien de cartons sont nécessaires pour ranger tous les livres ?

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 5, page 5.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 6, page 5.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

[Corrigé ci-dessous](#)

**Corrigé**

- $1\,247 = 32 \times 38 + 31$.
- On peut remplir 38 cartons et il reste 31 livres.
- Il faut donc 39 cartons.

Exercice 5 **[+] Consolidation : même méthode**

Un collège doit ranger 1 385 manuels dans des caisses contenant au maximum 36 manuels.

- Effectuer la division euclidienne de 1 385 par 36.
- Interpréter le quotient et le reste dans cette situation.
- Combien de caisses sont nécessaires pour ranger tous les manuels ?

[Corrigé ci-dessous](#)

**Corrigé**

- $1\,385 = 36 \times 38 + 17$.
- On remplit 38 caisses et il reste 17 manuels.
- Il faut donc 39 caisses.

Exercice 6 **[*] Approfondissement : retrouver le dividende**

Dans la division euclidienne d'un entier N par 17, le quotient est le double du reste. De plus, le reste est strictement supérieur à 5 et $N < 250$. Déterminer toutes les valeurs possibles de N .

[Corrigé ci-dessous](#)

**Corrigé**

Notons r le reste. Le quotient vaut $2r$, donc

$$N = 17 \times 2r + r = 35r.$$

Comme r est un reste dans une division par 17, $0 \leq r < 17$. De plus, $r > 5$ et $35r < 250$, donc $r < \frac{250}{35} < 8$. Ainsi $r \in \{6, 7\}$ et

$$\boxed{N = 210 \text{ ou } N = 245}.$$

Thème III

Multiples, diviseurs et nombres premiers

Exercice 7 Critères de divisibilité

Sans effectuer de division, étudier la divisibilité de chacun des nombres 7 236, 4 515 et 8 070 par 2, 3, 4, 5, 9 et 10. Chaque réponse doit être justifiée.

Corrigé ci-dessous



Corrigé

- 7 236 se termine par 6, ses deux derniers chiffres forment 36 et $7 + 2 + 3 + 6 = 18$. Il est donc divisible par 2, 3, 4 et 9, mais pas par 5 ni par 10.
- 4 515 se termine par 5, ses deux derniers chiffres forment 15 et $4 + 5 + 1 + 5 = 15$. Il est divisible par 3 et 5, mais pas par 2, 4, 9 ni 10.
- 8 070 se termine par 0, ses deux derniers chiffres forment 70 et $8 + 0 + 7 + 0 = 15$. Il est divisible par 2, 3, 5 et 10, mais pas par 4 ni par 9.

Exercice 8 Reconnaître un nombre premier

À l'aide des critères de divisibilité et de la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée dans le cours, étudier les nombres

51, 67, 87, 91, 97.

Pour chaque nombre non premier, donner une décomposition en produit de deux entiers strictement supérieurs à 1.

Corrigé ci-dessous



Corrigé

On a :

$$51 = 3 \times 17,$$

$$87 = 3 \times 29,$$

$$91 = 7 \times 13.$$

Les nombres 51, 87 et 91 ne sont donc pas premiers.

D'après la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée dans le cours, 67 et 97 sont premiers.

67 et 97 sont premiers.

Exercice 9 [!] Bilan : vrai ou faux

Source : D'après plusieurs exercices du DNB, sessions antérieures à 2017.

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse en justifiant soigneusement.

- Les diviseurs communs à 12 et 18 sont exactement les diviseurs de 6.
- Tout nombre premier est impair.
- Tout nombre impair est premier.
- Si un entier est divisible par 6, alors il est divisible par 2 et par 3.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 10, page 7.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 11, page 7.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

1. Vraie : les diviseurs communs sont 1, 2, 3 et 6, qui sont les diviseurs de 6.
2. Fausse : 2 est premier et pair.
3. Fausse : 9 est impair mais $9 = 3 \times 3$.
4. Vraie : soit n un entier naturel divisible par 6. Il existe un entier naturel k tel que $n = 6k$. Ainsi $n = 2(3k) = 3(2k)$. Comme $3k$ et $2k$ sont des entiers naturels, n est divisible par 2 et par 3.

Exercice 10 **[+] Consolidation : vrai ou faux**

Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse en justifiant soigneusement.

1. Les diviseurs communs à 20 et 30 sont exactement les diviseurs de 10.
2. Tout nombre pair est composé.
3. Tout nombre premier supérieur à 2 est impair.
4. Si un entier est divisible par 15, alors il est divisible par 3 et par 5.

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

1. Vraie : les diviseurs communs sont 1, 2, 5 et 10.
2. Fausse : 2 est pair et premier.
3. Vraie : soit n un nombre premier supérieur à 2. S'il était pair, 2 serait un diviseur de n distinct de 1 et de n , ce qui contredirait la définition d'un nombre premier. Donc n est impair.
4. Vraie : soit n un entier naturel divisible par 15. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 15k = 3(5k) = 5(3k)$. Comme $5k$ et $3k$ sont des entiers naturels, n est divisible par 3 et par 5.

Exercice 11 **[*] Approfondissement : un entier à cinq chiffres**

Source : Question 1 d'après le sujet de référence de mathématiques n° 2 du DNB, septembre 2026, partie 1, question 4.

1. Donner un entier à cinq chiffres divisible par 9 et se terminant par 7.
2. Déterminer tous les chiffres que l'on peut placer dans la case de $52\square 7$ pour obtenir un multiple de 9.
3. Parmi les nombres obtenus, lesquels sont aussi divisibles par 3 mais ne sont divisibles ni par 2 ni par 5 ?

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

1. Par exemple, 10017 convient car $1 + 0 + 0 + 1 + 7 = 9$.
2. La somme des chiffres de $52\square 7$ vaut $14 + \square$. Elle doit être un multiple de 9. Le seul chiffre possible est donc 4, car $14 + 4 = 18$. Le nombre est 5247.
3. Tout multiple de 9 est divisible par 3. Le nombre 5247 se termine par 7 : il n'est divisible ni par 2 ni par 5. Il convient donc.

Thème IV

Calcul littéral et arithmétique

Exercice 12 Vrai ou faux : pair ou impair ?

Pour chaque affirmation portant sur des entiers naturels, dire si elle est vraie ou fausse. La réponse doit être démontrée en utilisant les écritures

$$2k \quad \text{et} \quad 2k + 1,$$

où k désigne un entier naturel.

1. La somme de deux entiers pairs est paire.
2. La somme de deux entiers impairs est impaire.
3. La somme d'un entier pair et d'un entier impair est impaire.
4. Le carré d'un entier impair est impair.
5. Le produit de deux entiers consécutifs est impair.

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

1. Vraie. Soient a et b deux entiers naturels pairs. Il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $a = 2p$ et $b = 2q$. Alors

$$a + b = 2p + 2q = 2(p + q).$$

Comme $p + q \in \mathbb{N}$, la somme $a + b$ est paire.

2. Fausse.

- Contre-exemple : 3 et 5 sont impairs, mais

$$3 + 5 = 8 = 2 \times 4,$$

donc leur somme est paire.

- Plus précisément, soient a et b deux entiers naturels impairs. Il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $a = 2p + 1$ et $b = 2q + 1$. Alors

$$a + b = (2p + 1) + (2q + 1) = 2(p + q + 1).$$

Comme $p + q + 1 \in \mathbb{N}$, cette somme est paire et non impaire.

3. Vraie. Soient a un entier naturel pair et b un entier naturel impair. Il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $a = 2p$ et $b = 2q + 1$. Alors

$$a + b = 2p + (2q + 1) = 2(p + q) + 1.$$

Comme $p + q \in \mathbb{N}$, la somme $a + b$ est impaire.

4. Vraie. Soit a un entier naturel impair. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2p + 1$. Alors

$$a^2 = (2p + 1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1.$$

Comme $2p^2 + 2p \in \mathbb{N}$, le carré a^2 est impair.

5. Fausse.

- Contre exemple :
Par exemple 3 et 4 sont des entiers qui se suivent et leur produit 12 est pair.
- Plus précisément.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Si n est pair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$; alors $n(n + 1) = 2(p(n + 1))$ est pair. Si n est impair, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$; alors $n + 1 = 2(p + 1)$ et $n(n + 1) = 2(n(p + 1))$ est pair. Dans les deux cas, le nombre entre parenthèses est un entier naturel : le produit de deux entiers naturels consécutifs est toujours pair.

Exercice 13 [!] Bilan : un programme donnant un multiple de 10

Source : D'après le DNB Pondichéry, avril 2014.

On considère le programme suivant :

Programme de calcul	
Étape 1	Choisir un entier.
Étape 2	Lui ajouter 3.
Étape 3	Multiplier le résultat par 7.
Étape 4	Ajouter le triple du nombre choisi au départ.
Étape 5	Retrancher 21.

1. Appliquer ce programme à l'entier 4.
2. On note n l'entier choisi au départ. Écrire le résultat du programme en fonction de n .
3. Développer et réduire cette expression.
4. Démontrer que le résultat obtenu est toujours un multiple de 10.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 14, page 9.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 15, page 10.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Corrigé ci-dessous



Corrigé

1. Pour 4, on obtient

$$(4 + 3) \times 7 + 3 \times 4 - 21 = 49 + 12 - 21 = 40.$$
2. Le résultat est $7(n + 3) + 3n - 21$.
3.

$$7(n + 3) + 3n - 21 = 7n + 21 + 3n - 21 = 10n.$$
4. Puisque le nombre choisi n est un entier, $10n$ est le produit de 10 par un entier. Le résultat est donc toujours un multiple de 10.

Exercice 14 **[+]** Consolidation : un programme donnant un multiple de 3

Source : Exercice repris de l'ancien TD d'arithmétique Math93.

On considère le programme suivant :

Programme de calcul	
Étape 1	Choisir un entier.
Étape 2	Lui ajouter 3.
Étape 3	Multiplier le résultat par 5.
Étape 4	Retrancher le double du nombre choisi au départ.

1. Appliquer ce programme à l'entier 7.
2. On note n l'entier choisi au départ. Écrire le résultat du programme en fonction de n .
3. Développer et réduire cette expression.
4. Démontrer que le résultat obtenu est toujours un multiple de 3.

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

1. Pour 7, on obtient

$$(7 + 3) \times 5 - 2 \times 7 = 50 - 14 = 36.$$

2. Le résultat est $5(n + 3) - 2n$.

- 3.

$$5(n + 3) - 2n = 5n + 15 - 2n = 3n + 15 = 3(n + 5).$$

4. Puisque le nombre choisi n est un entier, $n + 5$ est aussi un entier. Le résultat $3(n + 5)$ est donc toujours un multiple de 3.

Exercice 15 **[*] Approfondissement : trois entiers consécutifs**

On choisit trois entiers consécutifs n , $n + 1$ et $n + 2$.

- Expliquer pourquoi l'un au moins de ces trois entiers est pair.
- Expliquer pourquoi l'un de ces trois entiers est divisible par 3.
- En déduire que le produit $n(n + 1)(n + 2)$ est toujours un multiple de 6.
- Vérifier cette propriété avec trois entiers consécutifs de votre choix.

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 2p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, alors n est pair. Sinon, $n = 2p + 1$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, et $n + 1 = 2(p + 1)$ est pair. Dans les deux cas, l'un des trois facteurs est pair : le produit $P = n(n + 1)(n + 2)$ est divisible par 2.
- Par division euclidienne de n par 3, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$ tels que $n = 3q + r$. Si $r = 0$, n est divisible par 3 ; si $r = 1$, $n + 2 = 3(q + 1)$ l'est ; si $r = 2$, $n + 1 = 3(q + 1)$ l'est. Donc P est divisible par 3.
- D'après les deux premières réponses, $2 \mid P$ et $3 \mid P$. Comme 2 et 3 sont premiers entre eux, leur produit divise P . Il existe donc un entier naturel k tel que $P = 6k$: P est un multiple de 6.
- Par exemple, $7 \times 8 \times 9 = 504 = 6 \times 84$.

Thème V

Décomposition en facteurs premiers et diviseurs

Exercice 16 Décomposer un entier

Décomposer en produit de facteurs premiers :

180, 756, 1 014, 1 260.

Corrigé ci-dessous



Corrigé

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5,$$

$$1\,014 = 2 \times 3 \times 13^2,$$

$$756 = 2^2 \times 3^3 \times 7,$$

$$1\,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7.$$

Exercice 17 Lister tous les diviseurs

1. Décomposer 360 en produit de facteurs premiers.
2. En déduire la liste de tous ses diviseurs positifs.
3. Combien 360 possède-t-il de diviseurs positifs ?

Corrigé ci-dessous



Corrigé

1. $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$

2. Tout diviseur positif est de la forme $2^a 3^b 5^c$, avec $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$ et $c \in \{0, 1\}$. En les énumérant, on obtient

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

3. Il y a 4 choix pour a , 3 pour b et 2 pour c , soit $4 \times 3 \times 2 = \boxed{24}$ diviseurs positifs.

Exercice 18 [!] Bilan : décomposition et diviseurs

On considère l'entier $N = 540$.

1. Décomposer N en produit de facteurs premiers.
2. Expliquer pourquoi 45 est un diviseur de N .
3. Déterminer tous les diviseurs de N compris entre 20 et 50.
4. Déterminer le nombre total de diviseurs positifs de N .

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 19, page 12.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 20, page 12.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

- $540 = 2^2 \times 3^3 \times 5$.
- $540 = 45 \times 12$, avec $12 \in \mathbb{N}$: donc 45 divise 540.
- Tout diviseur positif de 540 est de la forme $2^a 3^b 5^c$, avec $a \in \{0, 1, 2\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $c \in \{0, 1\}$. En ne retenant que les valeurs comprises entre 20 et 50, on obtient 20, 27, 30, 36 et 45.
- Un diviseur s'écrit $2^a 3^b 5^c$, avec $a \in \{0, 1, 2\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $c \in \{0, 1\}$. Il y en a $3 \times 4 \times 2 = \boxed{24}$.

Exercice 19 **[+] Consolidation : même méthode**

On considère l'entier $M = 600$.

- Décomposer M en produit de facteurs premiers.
- Expliquer pourquoi 40 est un diviseur de M .
- Déterminer tous les diviseurs de M compris entre 20 et 50.
- Déterminer le nombre total de diviseurs positifs de M .

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

- $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$.
- $600 = 40 \times 15$, avec $15 \in \mathbb{N}$: donc 40 divise 600.
- Tout diviseur positif de 600 est de la forme $2^a 3^b 5^c$, avec $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, $b \in \{0, 1\}$ et $c \in \{0, 1, 2\}$. En ne retenant que les valeurs comprises entre 20 et 50, on obtient 20, 24, 25, 30, 40 et 50.
- Il y a 4 choix pour a , 2 pour b et 3 pour c , soit $4 \times 2 \times 3 = \boxed{24}$ diviseurs positifs.

Exercice 20 **[*] Approfondissement : exactement quinze diviseurs****Aide**

On admet le résultat suivant : si

$$N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

est la décomposition en facteurs premiers de N , alors le nombre de diviseurs positifs de N est

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1).$$

Trouver le plus petit entier naturel qui possède exactement 15 diviseurs positifs. Justifier qu'il est bien le plus petit.

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

Soit $N > 1$ un entier naturel dont la décomposition en facteurs premiers est $p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s}$. Son nombre de diviseurs positifs est $(a_1 + 1) \cdots (a_s + 1)$. Pour que ce nombre soit 15, les seules possibilités sont une décomposition de la forme p^{14} ou $p^4 q^2$, où p et q sont deux nombres premiers distincts, car

$$15 = 15 \quad \text{ou} \quad 15 = 5 \times 3.$$

Le plus petit nombre de la première forme est 2^{14} . Pour minimiser la seconde forme, on choisit les deux plus petits nombres premiers, 2 et 3, puis on attribue le plus grand exposant à 2 :

$$2^4 \times 3^2 = 16 \times 9 = 144.$$

Or $144 < 2^{14}$ et 144 possède $(4 + 1)(2 + 1) = 15$ diviseurs. Le plus petit entier cherché est donc 144.

Thème VI

Fractions irréductibles

Exercice 21 Révisions : calculer avec des fractions

Source : Le calcul E est adapté du DNB Amérique du Nord, juin 2014.

Effectuer les calculs suivants et donner chaque résultat sous forme irréductible :

$$A = \frac{3}{4} + \frac{5}{6}, \quad B = \frac{7}{10} - \frac{3}{4}, \quad C = \frac{14}{15} \times \frac{25}{21},$$

$$D = \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right) \div \frac{7}{9}, \quad E = \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{7}\right) \div \frac{1}{5}.$$

Corrigé ci-dessous



Corrigé

$$A = \frac{9}{12} + \frac{10}{12} = \boxed{\frac{19}{12}},$$

$$B = \frac{28}{40} - \frac{30}{40} = \frac{-2}{40} = \boxed{-\frac{1}{20}},$$

$$C = \frac{14}{21} \times \frac{25}{15} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{3} = \boxed{\frac{10}{9}},$$

$$D = \left(\frac{5}{6} + \frac{2}{6}\right) \times \frac{9}{7} = \frac{7}{6} \times \frac{9}{7} = \boxed{\frac{3}{2}},$$

$$E = \frac{5}{7} \times 5 = \boxed{\frac{25}{7}}.$$

Exercice 22 Simplifier à l'aide des facteurs premiers

Rendre irréductibles les fractions suivantes en détaillant les décompositions :

$$\frac{180}{252}, \quad \frac{756}{441}, \quad \frac{1014}{1260}.$$

Corrigé ci-dessous



Corrigé

$$\frac{180}{252} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 5}{2^2 \times 3^2 \times 7} = \boxed{\frac{5}{7}},$$

$$\frac{756}{441} = \frac{2^2 \times 3^3 \times 7}{3^2 \times 7^2} = \boxed{\frac{12}{7}},$$

$$\frac{1014}{1260} = \frac{2 \times 3 \times 13^2}{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7} = \boxed{\frac{169}{210}}.$$

Exercice 23 [!] Bilan : décomposer puis simplifier

On considère la fraction $F = \frac{1386}{1980}$.

1. Décomposer le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers.
2. Rendre F irréductible en faisant apparaître les facteurs simplifiés.
3. Justifier que la fraction obtenue est irréductible.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 24, page 15.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 25, page 15.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

1. $1386 = 2 \times 3^2 \times 7 \times 11$ et $1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 11$.

2.

$$F = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3}^2 \times 7 \times \cancel{11}}{2 \times \cancel{2} \times \cancel{3}^2 \times 5 \times \cancel{11}} = \boxed{\frac{7}{10}}.$$

3. 7 est premier et ne divise pas 10 : 7 et 10 n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

Exercice 24 **[+] Consolidation : même méthode**

On considère la fraction $G = \frac{1575}{2310}$.

1. Décomposer le numérateur et le dénominateur en facteurs premiers.
2. Rendre G irréductible en faisant apparaître les facteurs simplifiés.
3. Justifier que la fraction obtenue est irréductible.

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

1. $1575 = 3^2 \times 5^2 \times 7$ et $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$.

2.

$$G = \frac{3 \times \cancel{3} \times 5 \times \cancel{5} \times \cancel{7}}{2 \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times \cancel{7} \times 11} = \boxed{\frac{15}{22}}.$$

3. $15 = 3 \times 5$ et $22 = 2 \times 11$ n'ont aucun facteur premier commun.

Exercice 25 **[*] Approfondissement : une fraction avec une inconnue**

Déterminer le plus petit entier naturel non nul n pour lequel la fraction

$$\frac{84}{n}$$

est égale à une fraction irréductible de dénominateur 15.

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

Soit d le diviseur commun par lequel on simplifie $84/n$ pour obtenir une fraction irréductible. Comme son dénominateur est 15, on doit avoir $n = 15d$; de plus, d divise 84 et le numérateur obtenu est $84/d$. Or $84 = 2^2 \times 3 \times 7$. Pour que $84/d$ soit premier avec $15 = 3 \times 5$, il faut en particulier que 3 divise d . Ainsi $d \geq 3$ et $n = 15d \geq 45$. Cette borne est atteinte

pour $d = 3 : n = 45$ et

$$\frac{84}{45} = \frac{28}{15}.$$

Comme $28 = 2^2 \times 7$ et $15 = 3 \times 5$ n'ont aucun facteur premier commun, cette fraction est irréductible. Le plus petit entier cherché est donc 45.

Thème VII

PGCD et PPCM

Exercice 26 Calculer directement un PGCD et un PPCM

Pour chacun des couples d'entiers suivants :

1. décomposer les deux entiers en produits de facteurs premiers ;
 2. déterminer leur PGCD ;
 3. déterminer leur PPCM.
1. 252 et 360.



Corrigé

On décompose les deux nombres :

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7,$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

Pour le PGCD, on conserve les facteurs premiers communs avec les plus petits exposants :

$$\text{PGCD}(252 ; 360) = 2^2 \times 3^2$$

$$\text{PGCD}(252 ; 360) = 36$$

Pour le PPCM, on conserve tous les facteurs premiers apparaissant dans au moins une décomposition, avec les plus grands exposants :

$$\text{PPCM}(252 ; 360) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$$\text{PPCM}(252 ; 360) = 2\,520$$

2. 168 et 270.



Corrigé

$$168 = 2^3 \times 3 \times 7,$$

$$270 = 2 \times 3^3 \times 5.$$

Ainsi :

$$\text{PGCD}(168 ; 270) = 2 \times 3$$

$$\text{PGCD}(168 ; 270) = 6$$

et :

$$\text{PPCM}(168 ; 270) = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7$$

$$\text{PPCM}(168 ; 270) = 7\,560$$

Thème VIII

Partages et périodicité

Exercice 27 Former le plus grand nombre de groupes

Source : Sujet zéro officiel de mathématiques du DNB, série générale, sujet B, partie 2, exercice 4.

Dans un collège, 91 filles et 77 garçons participent à un club sciences. On souhaite former des groupes identiques : chaque groupe doit avoir le même nombre de filles et le même nombre de garçons.

1. Décomposer 91 et 77 en produits de facteurs premiers.
2. En déduire le nombre maximal de groupes que l'on peut former. Justifier.
3. Dans ce cas, combien d'élèves y aura-t-il dans chaque groupe ?

Corrigé ci-dessous



Corrigé

1. $91 = 7 \times 13$ et $77 = 7 \times 11$.
2. Si l'on forme g groupes identiques en utilisant tous les élèves, g doit diviser à la fois 91 et 77. Réciproquement, tout diviseur commun convient. Comme $91 = 7 \times 13$ et $77 = 7 \times 11$, leur plus grand diviseur commun est 7. On peut donc former au maximum 7 groupes.
3. Chaque groupe contient $91 \div 7 = 13$ filles et $77 \div 7 = 11$ garçons, soit 24 élèves.

Exercice 28 Deux voitures sur un circuit

Source : Exercice adapté d'un ancien sujet de Brevet.

Deux voitures partent en même temps de la ligne de départ. La voiture A effectue un tour en 36 minutes et la voiture B en 30 minutes.

1. Après combien de temps repasseront-elles ensemble pour la première fois sur la ligne de départ ?
2. Elles roulent pendant 6 heures. Donner tous les instants, autres que le départ, où elles repassent ensemble sur cette ligne.

Corrigé ci-dessous



Corrigé

$$36 = 2^2 \times 3^2, \quad 30 = 2 \times 3 \times 5.$$

Un retour commun a lieu à un instant (compté en minutes) multiple à la fois de 36 et de 30. Le plus petit multiple commun vaut $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$ minutes, soit 3 heures.

1. Elles repassent ensemble après 3 heures.
2. Pendant 6 heures, elles se retrouvent après 3 heures puis 6 heures.

Exercice 29 [!] Bilan : une mosaïque

Source : D'après le DNB Amérique du Sud, novembre 2016.

Une surface rectangulaire de 108 cm sur 225 cm doit être recouverte sans découpe par des carreaux carrés identiques.

1. Des carreaux de 3 cm conviennent-ils ? Des carreaux de 6 cm ? Justifier.
2. Décomposer 108 et 225 en produits de facteurs premiers.
3. Déterminer la plus grande longueur possible pour le côté d'un carreau.

4. Combien de carreaux seront alors nécessaires ?

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 30, page 18.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 31, page 18.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Corrigé ci-dessous



Corrigé

1. Pour carrelé sans découpe, la longueur du côté d'un carreau doit diviser chacune des deux dimensions. Or $108 = 3 \times 36$ et $225 = 3 \times 75$: 3 convient. En revanche, 225 n'est pas divisible par 6 : 6 ne convient pas.
2. $108 = 2^2 \times 3^3$ et $225 = 3^2 \times 5^2$.
3. Le côté doit être un diviseur commun de 108 et de 225. D'après leurs décompositions, leur plus grand diviseur commun est $3^2 = 9$; ce choix convient pour les deux dimensions. Le côté maximal mesure donc **9 cm**.
4. Il faut $108 \div 9 = 12$ carreaux sur un côté et $225 \div 9 = 25$ sur l'autre, soit $12 \times 25 = \mathbf{300}$ carreaux.

Exercice 30 **[+]** Consolidation : même problème

Une surface rectangulaire de 168 cm sur 252 cm doit être recouverte sans découpe par des carreaux carrés identiques.

1. Des carreaux de 6 cm conviennent-ils ? Des carreaux de 10 cm ? Justifier.
2. Décomposer 168 et 252 en produits de facteurs premiers.
3. Déterminer la plus grande longueur possible pour le côté d'un carreau.
4. Combien de carreaux seront alors nécessaires ?

Corrigé ci-dessous



Corrigé

1. Pour carrelé sans découpe, le côté doit diviser les deux dimensions. On a $168 = 6 \times 28$ et $252 = 6 \times 42$: 6 convient. En revanche, aucun de ces nombres ne se termine par 0 : 10 ne convient pas.
2. $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ et $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$.
3. Le côté doit être un diviseur commun de 168 et de 252. Leur plus grand diviseur commun, obtenu en prenant les plus petits exposants de chaque facteur premier commun, est $2^2 \times 3 \times 7 = 84$. Le côté maximal mesure donc **84 cm**.
4. Il faut $168 \div 84 = 2$ carreaux sur un côté et $252 \div 84 = 3$ sur l'autre, soit **6 carreaux**.

Exercice 31 **[*]** Approfondissement : carreaux sur le pourtour

Source : Annale zéro officielle du DNB à compter de la session 2017, exercice 6.

Un panneau de 240 cm sur 360 cm est recouvert de carreaux carrés identiques, posés sans découpe ni jointure.

1. Quelles sont toutes les longueurs entières possibles du côté des carreaux comprises entre 10 cm et 20 cm ?
2. On choisit des carreaux de 15 cm. Une rangée de carreaux bleus est posée sur tout le pourtour et les autres carreaux sont blancs. Combien de carreaux bleus utilise-t-on ?

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

1. Les longueurs doivent diviser 240 et 360. Entre 10 et 20, les diviseurs communs sont 10, 12, 15 et 20 cm.
2. Il y a $240 \div 15 = 16$ carreaux sur la hauteur et $360 \div 15 = 24$ sur la longueur. Le pourtour contient

$$2 \times 24 + 2 \times (16 - 2) = 48 + 28 = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">76 \text{ carreaux bleus}.$$

Dans $2 \times 24 + 2 \times (16 - 2)$, on compte les rangées du haut et du bas en entier, puis les deux colonnes latérales en excluant leurs carreaux des coins, déjà comptés.

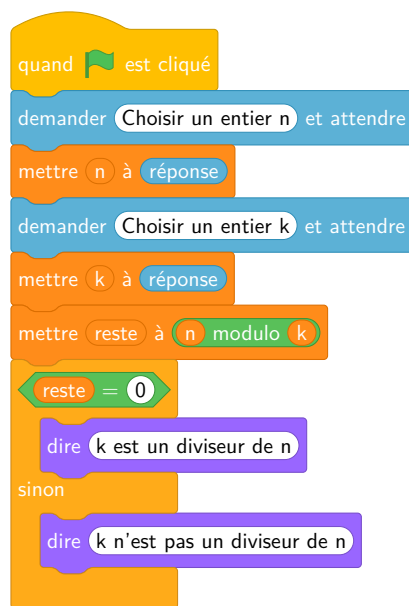
Thème IX

Algorithmique et Scratch

Exercice 32 Scratch : tester si un entier est un diviseur

Source : Exercice original, dans l'esprit des exercices Scratch du DNB.

On considère le programme Scratch suivant.



1. À quoi correspond la variable `reste` dans ce programme ?



Corrigé

La variable `reste` contient le reste de la division euclidienne de n par k .

2. On choisit $n = 84$ et $k = 7$. Quel message est affiché ? Justifier.



Corrigé

On a :

$$84 = 7 \times 12 + 0.$$

Le reste de la division euclidienne de 84 par 7 est donc nul. Le programme affiche :

« k est un diviseur de n ».

3. On choisit maintenant $n = 84$ et $k = 5$. Quel message est affiché ? Justifier.



Corrigé

On a :

$$84 = 5 \times 16 + 4.$$

Le reste n'est pas nul. Le programme affiche donc :

« k n'est pas un diviseur de n ».

4. Expliquer pourquoi ce programme permet de tester si k est un diviseur de n .

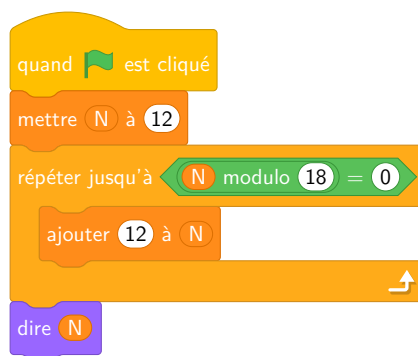
**Corrigé**

Par définition, k divise n si et seulement si le reste de la division euclidienne de n par k est nul. C'est exactement la condition testée par le programme.

Exercice 33 Scratch : rechercher un premier multiple commun

Source : Exercice original, dans l'esprit des exercices Scratch du DNB.

Le programme suivant doit afficher le plus petit multiple positif de 12 qui est aussi divisible par 18.



1. Quelles sont les premières valeurs prises par la variable N ? Expliquer pourquoi toutes ces valeurs sont des multiples de 12.

**Corrigé**

La variable est initialisée à 12, puis on lui ajoute 12 à chaque passage dans la boucle. Elle prend donc successivement les valeurs

12, 24, 36, 48, ...

Toutes ces valeurs sont des multiples de 12.

2. Pourquoi la boucle s'arrête-t-elle lorsque N est divisible par 18 ?

**Corrigé**

La condition d'arrêt est que le reste de la division de N par 18 soit égal à 0. Cela signifie exactement que N est divisible par 18.

3. Quelle valeur le programme affiche-t-il ?

**Corrigé**

On teste les multiples successifs de 12 :

12, 24, 36.

Or $36 = 18 \times 2$. La boucle s'arrête donc pour

$N = 36$.

4. Que représente le nombre obtenu pour 12 et 18 ?

**Corrigé**

Le nombre 36 est le plus petit multiple positif commun à 12 et 18. Ainsi :

$$\text{PPCM}(12 ; 18) = 36 .$$

Thème X

Exercices du Brevet

Exercice 34 [FLASH] Automatismes : divisibilité et fractions

Source : Question 1 issue du sujet de référence de mathématiques n° 2 du DNB, septembre 2026 ; autres questions dans l'esprit de la liste officielle d'automatismes.

Répondre sans calculatrice.

1. Donner un entier à cinq chiffres divisible par 9 et se terminant par 7.
2. Rendre la fraction $\frac{18}{24}$ irréductible.
3. Donner tous les diviseurs positifs de 24.
4. Le nombre 2025 est-il divisible par 3 ? par 9 ?

Corrigé ci-dessous



Corrigé

1. Par exemple 10 017.
2. $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.
3. 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.
4. $2 + 0 + 2 + 5 = 9$: 2025 est divisible par 3 et par 9.

Exercice 35 [DNB] Objectif Brevet : diviseurs et probabilité

Source : Sujet zéro officiel de mathématiques du DNB, série générale, sujet B, partie 2, exercice 2.

Une urne contient 21 jetons numérotés de 1 à 21, indiscernables au toucher. On tire un jeton au hasard.

1. On note A l'événement « obtenir 2, 3 ou 10 ». Calculer $P(A)$ sous forme irréductible.
2. On note B l'événement « obtenir un jeton dont le numéro est un diviseur de 24 ».
 2. a. Donner les issues de l'événement B .
 2. b. Déterminer $P(B)$ sous forme irréductible.

Corrigé ci-dessous



Corrigé

1. Il y a 3 issues favorables parmi 21, donc $P(A) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$.
2. 2. a. Les diviseurs de 24 présents dans l'urne sont 1, 2, 3, 4, 6, 8 et 12.
2. b. Il y a 7 issues favorables, donc $P(B) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$.

Exercice 36 [DNB] Objectif Brevet : des bulletins de dragées

Source : DNB Pondichéry, avril 2014.

Emma et Arthur disposent de 3003 dragées au chocolat et de 3731 dragées aux amandes.

1. Ils répartissent d'abord les dragées de façon identique dans 20 corbeilles. Combien reste-t-il de dragées de chaque sorte ?

2. Ils souhaitent maintenant préparer des ballotins de composition identique en utilisant toutes les dragées.

2. a. Peuvent-ils préparer 90 ballotins ? Justifier.
2. b. Quel est le nombre maximal de ballotins ?
2. c. Quelle sera alors la composition de chaque ballotin ?

Corrigé ci-dessous



Corrigé

1. $3\,003 = 20 \times 150 + 3$ et $3\,731 = 20 \times 186 + 11$. Il reste 3 dragées au chocolat et 11 dragées aux amandes.

2. 2. a. Non : 90 ne divise ni 3 003 ni 3 731.

2. b.

$$3\,003 = 3 \times 7 \times 11 \times 13, \quad 3\,731 = 7 \times 13 \times 41.$$

Le nombre de ballotins doit diviser les deux quantités de dragées puisque tous sont identiques et que tout le stock est utilisé. Le plus grand diviseur commun de 3 003 et 3 731 est $7 \times 13 = 91$. Ils peuvent donc faire au maximum 91 ballotins.

2. c. Chaque ballotin contient $3\,003 \div 91 = 33$ dragées au chocolat et $3\,731 \div 91 = 41$ dragées aux amandes.

Exercice 37 [!] Bilan : bilan du chapitre

Une association possède 420 bouteilles d'eau et 588 barres de céréales. Elle veut préparer le plus grand nombre possible de lots identiques en utilisant tout le stock.

1. Décomposer 420 et 588 en produits de facteurs premiers.
2. Déterminer le nombre maximal de lots. Justifier.
3. Donner la composition de chaque lot.
4. L'association range ensuite les lots dans des cartons pouvant contenir au maximum 16 lots. Combien de cartons faut-il prévoir ? Écrire la division euclidienne utilisée.
5. La fraction $\frac{420}{588}$ est-elle irréductible ? Sinon, la rendre irréductible.
6. Deux appareils de l'association sont vérifiés périodiquement : le premier toutes les 18 minutes et le second toutes les 24 minutes. Ils sont vérifiés ensemble à 9 h. À quelle heure seront-ils vérifiés ensemble pour la première fois après 9 h ? Justifier.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 38, page 25.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 39, page 26.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Corrigé ci-dessous



Corrigé

1. $420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$ et $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$.

2. Le nombre de lots doit diviser 420 et 588, puisque tout le stock est utilisé et que les lots sont identiques. Leur plus grand diviseur commun est $2^2 \times 3 \times 7 = 84$. On peut donc préparer au maximum 84 lots.

3. Chaque lot contient $420 \div 84 = 5$ bouteilles et $588 \div 84 = 7$ barres.

4. $84 = 16 \times 5 + 4$. Cinq cartons sont pleins et un sixième contient les 4 derniers lots : il faut 6 cartons.

5.

$$\frac{420}{588} = \frac{5 \times 84}{7 \times 84} = \frac{5}{7}.$$

6. On cherche le PPCM de 18 et 24 :

$$18 = 2 \times 3^2,$$

$$24 = 2^3 \times 3.$$

Donc :

$$\text{PPCM}(18 ; 24) = 2^3 \times 3^2$$

$$\boxed{\text{PPCM}(18 ; 24) = 72}$$

Les deux appareils sont donc vérifiés ensemble toutes les 72 minutes, soit 1 h 12 min. À partir de 9 h, on obtient :

$$\boxed{10 \text{ h } 12}.$$

Exercice 38 **[+]** Consolidation : même bilan

Une association possède 630 jus de fruits et 882 biscuits. Elle veut préparer le plus grand nombre possible de lots identiques en utilisant tout le stock.

- Décomposer 630 et 882 en produits de facteurs premiers.
- Déterminer le nombre maximal de lots. Justifier.
- Donner la composition de chaque lot.
- L'association range ensuite les lots dans des cartons pouvant contenir au maximum 20 lots. Combien de cartons faut-il prévoir ? Écrire la division euclidienne utilisée.
- La fraction $\frac{630}{882}$ est-elle irréductible ? Sinon, la rendre irréductible.
- Deux appareils de l'association sont vérifiés périodiquement : le premier toutes les 20 minutes et le second toutes les 30 minutes. Ils sont vérifiés ensemble à 14 h. À quelle heure seront-ils vérifiés ensemble pour la première fois après 14 h ? Justifier.

Corrigé ci-dessous



Corrigé

1. $630 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ et $882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$.

2. Le nombre de lots doit diviser 630 et 882, puisque tout le stock est utilisé et que les lots sont identiques. Leur plus grand diviseur commun est $2 \times 3^2 \times 7 = 126$. On peut donc préparer au maximum $\boxed{126 \text{ lots}}$.

3. Chaque lot contient $630 \div 126 = 5$ jus et $882 \div 126 = 7$ biscuits.

4. $126 = 20 \times 6 + 6$. Six cartons sont pleins et un septième contient les derniers lots : il faut $\boxed{7 \text{ cartons}}$.

5.

$$\frac{630}{882} = \frac{5 \times 126}{7 \times 126} = \boxed{\frac{5}{7}}.$$

6. On cherche le PPCM de 20 et 30 :

$$20 = 2^2 \times 5,$$

$$30 = 2 \times 3 \times 5.$$

Donc :

$$\text{PPCM}(20 ; 30) = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\boxed{\text{PPCM}(20 ; 30) = 60}$$

Les deux appareils sont donc vérifiés ensemble toutes les 60 minutes. Ils seront à nouveau vérifiés ensemble à :

$$\boxed{15 \text{ h}}.$$

Exercice 39 **[*] Approfondissement : trois contraintes**

On cherche le plus petit entier naturel N strictement supérieur à 100 tel que :

- la division de N par 6 laisse un reste égal à 1 ;
- la division de N par 8 laisse un reste égal à 1 ;
- la division de N par 15 laisse un reste égal à 1.

Déterminer N en justifiant qu'il est bien le plus petit entier possible.

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

Les trois restes sont égaux à 1 si et seulement si $N - 1$ est divisible par 6, par 8 et par 15. On cherche donc leurs multiples communs :

$$6 = 2 \times 3, \quad 8 = 2^3, \quad 15 = 3 \times 5.$$

Leur plus petit multiple commun est

$$2^3 \times 3 \times 5 = 120.$$

Ainsi $N - 1 = 120k$ pour un entier naturel k . La condition $N > 100$ donne $N - 1 > 99$; le plus petit k possible est donc 1. Ainsi

$$\boxed{N = 121}.$$

On vérifie que $121 = 6 \times 20 + 1 = 8 \times 15 + 1 = 15 \times 8 + 1$.

Thème XI**Défis de concours****Exercice 40** ★★★ **[*] Approfondissement : un PGCD aussi grand que possible**

Source : D'après Concours Gauss 8, Université de Waterloo, 2024, question 23.

Cinq entiers naturels non nuls, tous différents, ont pour somme 264. Leur plus grand diviseur commun est noté d . Déterminer la plus grande valeur possible de d , puis donner un exemple de cinq entiers qui permet de l'atteindre.

Corrigé ci-dessous

**Corrigé**

Puisque d divise chacun des cinq entiers, on peut écrire ces entiers sous la forme

$$da_1, da_2, da_3, da_4, da_5,$$

où les a_i sont cinq entiers naturels non nuls et différents. On a alors

$$d(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 264.$$

La plus petite somme de cinq entiers naturels non nuls et différents vaut

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15.$$

Ainsi, $264/d \geq 15$, donc $d \leq 17,6$. De plus, d doit être un diviseur de 264. Or

$$264 = 2^3 \times 3 \times 11.$$

Les diviseurs de 264 inférieurs ou égaux à 17 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11 et 12. Le plus grand est 12.

Cette valeur est effectivement possible car

$$264 = 12(1 + 2 + 3 + 4 + 12).$$

Les cinq entiers 12, 24, 36, 48 et 144 sont différents, ont pour somme 264 et ont pour PGCD 12. Par conséquent,

$$\boxed{d_{\max} = 12}.$$

Exercice 41 ★★ ★ [*] Approfondissement : la pyramide multiplicative

Source : D'après Kangourou des mathématiques 2024, sujet C (4e-3e), question 23.

Une pyramide comporte trois entiers naturels non nuls sur sa ligne inférieure. Chaque case située au-dessus contient le produit des deux cases placées immédiatement en dessous.

La case du sommet contient 720. On note k l'entier placé au milieu de la ligne inférieure. Combien de valeurs différentes k peut-il prendre ?

Corrigé ci-dessous



Corrigé

Notons a , k et b les trois entiers de la ligne inférieure. Les deux cases de la ligne suivante contiennent ak et kb . Le sommet contient donc

$$(ak)(kb) = abk^2.$$

Il faut ainsi que k^2 soit un diviseur de 720. Or

$$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5.$$

Dans la décomposition de k , l'exposant de 2 peut donc être 0, 1 ou 2, celui de 3 peut être 0 ou 1, et celui de 5 doit être nul. Ainsi,

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}.$$

Réciproquement, pour chacune de ces valeurs, $720/k^2$ est un entier : on peut choisir $a = 1$ et $b = 720/k^2$. Toutes ces valeurs conviennent donc.

k peut prendre 6 valeurs.

Exercice 42 ★★ ★ [*] Approfondissement : somme et produit des chiffres

Source : D'après MATHCOUNTS, Problem of the Week, 25 juillet 2022.

Combien existe-t-il d'entiers à quatre chiffres dont la somme des chiffres est égale au produit des chiffres ?

Corrigé ci-dessous



Corrigé

Aucun chiffre ne peut être nul : sinon le produit serait nul, alors que la somme d'au moins un chiffre non nul serait strictement positive. Rangeons les quatre chiffres dans l'ordre croissant et notons-les $a \leq b \leq c \leq d$.

Si $a \geq 2$, alors

$$abcd \geq 4cd \quad \text{et} \quad a + b + c + d \leq 2c + 2d.$$

Comme $c, d \geq 2$, on a $4cd - 2c - 2d = 2c(2d - 1) - 2d \geq 4(2d - 1) - 2d = 6d - 4 > 0$. L'égalité cherchée est donc impossible. Ainsi $a = 1$ et

$$bcd = 1 + b + c + d.$$

Si $b \geq 3$, alors $bcd \geq 3cd \geq 9d$. Or $c \leq d$, donc $1 + b + c + d \leq 1 + 3d < 9d$ puisque $d \geq 3$. L'égalité est donc impossible.

Si $b = 2$, l'égalité $2cd = 3 + c + d$ donne

$$(2c - 1)(2d - 1) = 7,$$

ce qui est impossible avec $2 \leq c \leq d$: chaque facteur du membre de gauche vaut au moins 3, donc leur produit vaut au moins $9 > 7$.

Il reste donc $b = 1$. On obtient

$$cd = 2 + c + d, \quad \text{soit} \quad (c - 1)(d - 1) = 3.$$

Comme $c \leq d$, on a $c - 1 = 1$ et $d - 1 = 3$. Les quatre chiffres sont donc nécessairement 1, 1, 2 et 4.

On a 4 choix pour la position du 2, puis 3 choix pour celle du 4 ; les deux autres chiffres sont des 1. Ainsi, il existe $4 \times 3 = 12$ entiers.

Exercice 43 ★★ ★ [*] Approfondissement : quotients de puissances

Source : D'après Concours Pascal (Grade 9), Université de Waterloo, 2024, question 25.

EN Choose a, b and c from $3^1, 3^2, \dots, 3^8$, with $a \leq b \leq c$. How many triples make ab/c , ac/b and bc/a integers?

FR On choisit a, b et c parmi $3^1, 3^2, \dots, 3^8$, avec $a \leq b \leq c$. Combien de triplets rendent entiers les quotients ab/c , ac/b et bc/a ?

Corrigé ci-dessous



Corrigé

Écrivons $a = 3^i$, $b = 3^j$ et $c = 3^k$, où $1 \leq i \leq j \leq k \leq 8$. Comme b divise c , le produit ac est divisible par b . De même, a divise b , donc bc est divisible par a . Enfin, $ab = 3^{i+j}$ et $c = 3^k$: le quotient ab/c est entier si et seulement si $i + j \geq k$. Pour une valeur fixée de k , on examine les couples (i, j) tels que $1 \leq i \leq j \leq k$ et $i + j \geq k$. Par exemple, pour $k = 4$:

- $i = 1$: $j = 3$ ou 4 , soit 2 couples ;
- $i = 2$: $j = 2, 3, 4$, soit 3 couples ;
- $i = 3$: $j = 3$ ou 4 , soit 2 couples ;
- $i = 4$: $j = 4$, soit 1 couple.

On compte de la même manière pour les autres valeurs de k :

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de couples (i, j)	1	3	5	8	11	15	19	24

Au total, le nombre de triplets convenables est

$$1 + 3 + 5 + 8 + 11 + 15 + 19 + 24 = 86.$$

Exercice 44 ★★ ★ [*] Approfondissement : trois chiffres à choisir

Source : D'après Concours Pascal (Grade 9), Université de Waterloo, 2025, question 25.

Les lettres A, B et C représentent des chiffres (de 0 à 9) qui peuvent être égaux. Une même lettre désigne toujours le même chiffre. On forme les trois nombres à six chiffres

$$\overline{7A6B5C}, \quad \overline{2B9C5A}, \quad \overline{7C1A6B}.$$

EN How many choices of the digits (A, B, C) make the sum of these three numbers divisible by 36?

FR De combien de façons peut-on choisir les chiffres (A, B, C) pour que la somme de ces trois nombres soit divisible par 36 ?

Corrigé ci-dessous



Corrigé

Notons $S = A + B + C$ et T la somme des trois nombres. En regroupant les chiffres selon leur position,

$$\begin{aligned} T &= 1616160 + 10000S + 100S + S \\ &= 10101(160 + S). \end{aligned}$$

Le nombre 10101 est impair, donc premier avec 4. Par ailleurs, $10101 = 3 \times 3367$, et 3367 n'est pas divisible par 3 car la somme de ses chiffres vaut 19. Il apporte donc exactement un facteur 3 au produit T . Ainsi T est divisible par $36 = 4 \times 9$ si et seulement si $160 + S$ est divisible à la fois par 4 et par 3, c'est-à-dire par 12, puisque 3 et 4 sont premiers entre eux.

Comme $0 \leq S \leq 27$, on a $160 \leq 160 + S \leq 187$. Les multiples de 12 dans cet intervalle sont 168 et 180. Il faut donc que $S = 8$ ou $S = 20$.

Si $S = 8$, on choisit A de 0 à 8. Pour chacun de ces choix, il y a respectivement 9, 8, ..., 1 possibilités pour (B, C) , soit $9 + 8 + \dots + 1 = 45$ triplets.

Si $S = 20$, le chiffre A va de 2 à 9. Il y a respectivement 1, 2, ..., 8 possibilités pour (B, C) , soit $1 + 2 + \dots + 8 = 36$ triplets.

Finalement, il existe

$$45 + 36 = 81 \text{ triplets.}$$

↩ **Fin du devoir** ↪