

COURS

Arithmétique

Divisibilité, nombres premiers et fractions irréductibles

Version élève

Sommaire du chapitre

I	Division euclidienne	2
II	Multiples et diviseurs	2
III	Nombres premiers	4
IV	Décomposition en facteurs premiers	4
V	Fractions irréductibles	5
VI	Rechercher tous les diviseurs d'un entier	6
VII	Applications de la décomposition	7



Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, on doit savoir :

- effectuer et interpréter une division euclidienne ;
- utiliser les notions de multiple, de diviseur et les critères de divisibilité ;
- reconnaître un nombre premier ;
- décomposer un entier en produit de facteurs premiers ;
- utiliser cette décomposition pour rendre une fraction irréductible ;
- rechercher méthodiquement tous les diviseurs d'un entier.

**Exemple**

$15 = 3 \times 5$. Ainsi, 15 est un multiple de 3 et de 5 ; 3 et 5 sont des diviseurs de 15.

Propriété 1 (Critères de divisibilité)

Un entier est divisible :

- par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
- par 10 si son chiffre des unités est 0.

**De notre écriture décimale aux critères de divisibilité**

Notre écriture des nombres est dite décimale et positionnelle : elle utilise dix chiffres et la valeur d'un chiffre dépend de sa position. Née en Inde, transmise par les mathématiciens du monde arabe, elle est notamment diffusée en Europe par Fibonacci dans son Liber abaci, publié en 1202.

Cette écriture explique les critères de divisibilité par 3 et par 9. En effet, 10, 100, 1 000, etc. ont tous le même reste que 1 dans une division par 3 ou par 9. Un nombre et la somme de ses chiffres ont donc le même reste dans une division par 3 ou par 9.

**Exercice 2 À faire dans le cours**

Sans effectuer de division, déterminer si 7 830 est divisible par 2, par 3, par 5, par 9 et par 10. Justifier.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Propriété 2 (Entiers pairs et impairs)

Soit $a \in \mathbb{N}$.

- L'entier naturel a est pair s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k$.
- L'entier naturel a est impair s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2k + 1$.

**Exemples**

10 est pair car $10 = 2 \times 5$. De même, 51 est impair car $51 = 2 \times 25 + 1$.

III

Nombres premiers

Définition 4 (Nombre premier)

Un nombre premier est un entier naturel qui possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

 Remarque

Le nombre 1 n'est pas premier : il ne possède qu'un seul diviseur positif. Le nombre 2 est le seul nombre premier pair.

 Les nombres premiers inférieurs à 100

.....

.....

.....

.....

 Euclide et l'infinité des nombres premiers

Vers 300 avant notre ère, le mathématicien grec Euclide démontre qu'il existe une infinité de nombres premiers. L'idée de sa preuve est la suivante : si l'on pense avoir écrit tous les nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$, on considère

$$N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1.$$

Aucun des nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$ ne divise N , puisqu'il reste toujours 1. Le nombre N est donc premier ou possède un diviseur premier absent de la liste. Dans les deux cas, la liste n'était pas complète.

 Exercice 3 À faire dans le cours

Parmi 51, 67, 87 et 91, déterminer les nombres premiers. Justifier les réponses négatives par une décomposition.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

IV

Décomposition en facteurs premiers

Propriété 3 (Décomposition en facteurs premiers – admise)

Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers. Cette décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près.

Mhode 1 (Décomposer un entier en facteurs premiers)

On cherche successivement le plus petit nombre premier qui divise l'entier, puis on recommence avec le quotient obtenu, jusqu'à obtenir un quotient égal à 1.

 Exemple

Décomposer 1 014 en produit de facteurs premiers.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

? Exercice 4 À faire dans le cours

Décomposer 1 260 en produit de facteurs premiers.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

v

Fractions irréductibles

Définition 5 (Fraction irréductible)

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont aucun diviseur positif commun autre que 1.

Mhode 2 (Rendre une fraction irréductible)

1. Décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers.
2. Simplifier les facteurs communs au numérateur et au dénominateur.
3. Vérifier qu'il ne reste plus aucun facteur commun.

 Exemple

Rendre la fraction $\frac{1\,014}{84}$ irréductible.

.....

.....

.....

.....

?

Exercice 5 À faire dans le cours

Rendre la fraction $\frac{245}{525}$ irréductible en détaillant toutes les étapes.

VI

Rechercher tous les diviseurs d'un entier

Mhode 3 (Lister tous les diviseurs)

1.

Décomposer l'entier en produit de facteurs premiers.
2.

Former tous les produits possibles en choisissant, pour chaque facteur premier, un exposant compris entre 0 et l'exposant maximal de la décomposition.
3.

Ranger les diviseurs obtenus dans l'ordre croissant et vérifier qu'aucun n'a été oublié.

 Exemple avec 126

On a $126 = 2 \times 3^2 \times 7$. Tout diviseur de 126 est donc de la forme $2^a 3^b 7^c$, avec $a \in \{0, 1\}$, $b \in \{0, 1, 2\}$ et $c \in \{0, 1\}$.

?

Exercice 6 À faire dans le cours

Sachant que $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, dresser la liste de tous les diviseurs positifs de 180.

VII Applications de la décomposition

VII.1 Plus grand commun diviseur

Définition 6 (PGCD)

Le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels non nuls est le plus grand entier qui divise ces deux nombres. On le note $\text{PGCD}(a, b)$.

Mhode 4 (Calculer un PGCD à l'aide des facteurs premiers)

On décompose les deux entiers en facteurs premiers, puis on conserve chaque facteur premier commun avec le plus petit exposant.

Exemple

Calculer le PGCD de 126 et de 180.

Exercice 7 À faire dans le cours

Calculer $\text{PGCD}(150, 120)$ à l'aide des décompositions en facteurs premiers.

VII.2 Plus petit commun multiple

Définition 7 (PPCM)

Le plus petit commun multiple de deux entiers naturels non nuls est le plus petit entier strictement positif qui est multiple de ces deux nombres. On le note $\text{PPCM}(a, b)$.

On décompose les deux entiers en facteurs premiers, puis on conserve tous les facteurs premiers présents avec, pour chacun, le plus grand exposant.


$$\boxed{\text{PGCD}(a, b) \times \text{PPCM}(a, b) = a \times b}.$$

$$18 \times 1\,260 = 22\,680 \quad \text{et} \quad 126 \times 180 = 22\,680.$$

↵ Fin du cours ↗