

COURS

Chapitre 2

Calcul littéral

Version prof

Sommaire du chapitre

I	Vocabulaire et formes d'une expression	2
II	Calculer la valeur d'une expression littérale	2
III	Réduire une expression littérale	3
IV	Développer avec la distributivité	4
V	Factoriser par un facteur commun	5
VI	Les identités remarquables	7
VII	Développer avec une identité remarquable	8
VIII	Factoriser avec une identité remarquable	8
IX	Factorisations mixtes	9
X	Bilan du chapitre	10
XI	Lexique français-anglais	11

 Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, on apprend à :

- reconnaître une somme et un produit ;
- calculer la valeur d'une expression littérale pour une valeur donnée ;
- réduire une expression littérale ;
- développer avec la distributivité simple ou la double distributivité ;
- factoriser en faisant apparaître un facteur commun ;
- connaître et utiliser les trois identités remarquables ;
- choisir entre développer et factoriser selon la forme recherchée ;
- contrôler la vraisemblance d'une transformation algébrique.

CONNAÎTRE

REPRÉSENTER

RAISONNER

CALCULER

COMMUNIQUER



Limites de ce chapitre

Ce chapitre porte sur la transformation des expressions littérales. Les équations et les équations produit nul seront étudiées ultérieurement.

I Vocabulaire et formes d'une expression

Définition 1 (Somme, produit et termes)

Une expression littérale (algebraic expression) est une expression contenant une ou plusieurs lettres qui représentent des nombres.

- Une expression dont la dernière opération effectuée est une addition ou une soustraction est une somme (sum). Les éléments ajoutés ou soustraits sont ses termes (terms).
- Une expression dont la dernière opération effectuée est une multiplication est un produit (product). Les éléments multipliés sont ses facteurs (factors).



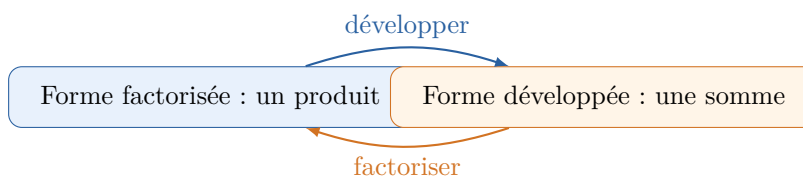
Reconnaître la nature d'une expression

Pour chacune des expressions suivantes, préciser s'il s'agit d'une somme ou d'un produit, puis identifier ses termes ou ses facteurs.

- $3x + 7$ est une somme de deux termes : $3x$ et 7 .
- $5(x - 2)$ est un produit de deux facteurs : 5 et $x - 2$.
- $(2x + 1)(x - 4)$ est un produit de deux facteurs.
- $(x + 3)^2 - 16$ est une différence, donc une somme algébrique de deux termes.

Définition 2 (Réduire, développer et factoriser)

- Réduire (to simplify / combine like terms), c'est regrouper les termes de même nature.
- Développer (to expand), c'est transformer un produit en une somme.
- Factoriser (to factor), c'est transformer une somme en un produit.



Écritures implicites

On n'écrit généralement pas le signe de multiplication entre un nombre et une lettre, ou devant une parenthèse :

$$3 \times x = 3x, \quad 5 \times (x + 2) = 5(x + 2), \quad x \times x = x^2.$$

II Calculer la valeur d'une expression littérale

Définition 3 (Évaluer une expression)

Évaluer une expression littérale (to evaluate an algebraic expression), c'est calculer sa valeur après avoir remplacé chaque lettre par le nombre donné.

**Substituer une valeur à une lettre**

Pour calculer la valeur d'une expression lorsque x est donné :

1. on remplace chaque occurrence de x par le nombre donné ;
2. on place ce nombre entre parenthèses, surtout s'il est négatif ;
3. on effectue le calcul en respectant les priorités opératoires.

**Calculer une valeur**

On considère l'expression $A(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

Pour $x = -2$, on obtient :

$$\begin{aligned} A(-2) &= 3 \times (-2)^2 - 5 \times (-2) + 1 \\ &= 3 \times 4 + 10 + 1 \\ &= 23. \end{aligned}$$

**Attention au signe**

Lorsque la valeur remplacée est négative, les parenthèses sont indispensables :

$$(-2)^2 = 4 \quad \text{alors que} \quad -2^2 = -4.$$

III Réduire une expression littérale**Propriété 1**

On peut additionner ou soustraire uniquement des termes de même nature.

$$ax + bx = (a + b)x \quad \text{et} \quad ax^2 + bx^2 = (a + b)x^2.$$

En revanche, on ne peut pas réduire $x + x^2$.

**Réduire une expression**

Réduire les expressions

$$A(x) = 7x - 3 + 2x + 8 \quad \text{et} \quad B(x) = 4x^2 - 3x + 5 + 2x^2 + 7x - 9.$$

$$\begin{aligned} A(x) &= 7x - 3 + 2x + 8 \\ &= 7x + 2x - 3 + 8 \\ &= 9x + 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(x) &= 4x^2 - 3x + 5 + 2x^2 + 7x - 9 \\ &= (4 + 2)x^2 + (-3 + 7)x + (5 - 9) \\ &= 6x^2 + 4x - 4. \end{aligned}$$

**Attention aux exposants**

Les termes $3x$ et $5x$ sont de même nature, mais les termes $3x$ et $5x^2$ ne le sont pas.

IV Développer avec la distributivité**IV.1 Distributivité simple : rappel****Propriété 2 (Distributivité simple)**

Pour tous nombres k , a et b :

$$\boxed{k(a + b) = ka + kb} \quad \text{et} \quad \boxed{k(a - b) = ka - kb}.$$

**Développer puis réduire**

1. Multiplier le facteur placé devant la parenthèse par chacun des termes de la parenthèse.
2. Supprimer les parenthèses en respectant les signes.
3. Réduire les termes de même nature.

**Distributivité simple**

Développer et réduire

$$C(x) = 5(2x - 3) + 4x \quad \text{et} \quad D(x) = -3(4x + 5) + 2x.$$

$$\begin{aligned} C(x) &= 5(2x - 3) + 4x \\ &= 5 \times 2x - 5 \times 3 + 4x \\ &= 10x - 15 + 4x \\ &= 14x - 15. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x) &= -3(4x + 5) + 2x \\ &= -3 \times 4x - 3 \times 5 + 2x \\ &= -12x - 15 + 2x \\ &= -10x - 15. \end{aligned}$$

**Multiplier par un nombre négatif**

Dans $-3(4x + 5)$, le facteur -3 multiplie les deux termes. On obtient donc $-12x - 15$, et non $-12x + 5$.

IV.2 Double distributivité**Propriété 3 (Double distributivité)**

Pour tous nombres a , b , c et d :

$$\boxed{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}.$$

Chaque terme de la première parenthèse multiplie chaque terme de la seconde.



Le modèle d'aire américain : *area model* ou *box method*

Pour développer $(2x + 3)(x + 4)$, on partage un rectangle en quatre rectangles. Les dimensions sont décomposées en $2x + 3$ et $x + 4$; chaque case contient le produit de la longueur placée en haut par celle placée à gauche.

		$2x$	3
x		$2x \times x = 2x^2$	$3 \times x = 3x$
4		$2x \times 4 = 8x$	$3 \times 4 = 12$

On additionne ensuite les quatre aires :

$$\begin{aligned}(2x + 3)(x + 4) &= 2x^2 + 3x + 8x + 12 \\ &= 2x^2 + 11x + 12.\end{aligned}$$



Avec des termes négatifs

Le modèle d'aire explique naturellement les produits de termes positifs. Avec des termes négatifs, on conserve la même grille comme outil de calcul et on applique la règle des signes dans chaque case.



Développer un produit de deux sommes

Développer et réduire $E(x) = (2x + 3)(x - 4)$.

$$\begin{aligned}E(x) &= (2x + 3)(x - 4) \\ &= 2x \times x + 2x \times (-4) + 3 \times x + 3 \times (-4) \\ &= 2x^2 - 8x + 3x - 12 \\ &= 2x^2 - 5x - 12.\end{aligned}$$



Un signe moins dans chaque parenthèse

Développer et réduire $F(x) = (3x - 2)(x - 5)$.

$$\begin{aligned}F(x) &= (3x - 2)(x - 5) \\ &= 3x \times x + 3x \times (-5) - 2 \times x + (-2) \times (-5) \\ &= 3x^2 - 15x - 2x + 10 \\ &= 3x^2 - 17x + 10.\end{aligned}$$

v Factoriser par un facteur commun

Propriété 4 (Distributivité utilisée dans l'autre sens)

Pour tous nombres k , a et b :

$$\boxed{ka + kb = k(a + b)} \quad \text{et} \quad \boxed{ka - kb = k(a - b)}.$$

Le nombre ou l'expression k est le facteur commun (common factor).

**Factoriser par un facteur commun**

1. Repérer les deux termes de la somme ou de la différence.
2. Identifier le facteur présent dans chacun des termes.
3. Écrire ce facteur devant une parenthèse.
4. Dans la parenthèse, écrire ce qui reste de chaque terme.
5. Vérifier en développant mentalement le résultat obtenu.

**Facteur commun immédiatement visible**

Factoriser

$$G(x) = 5x + 15 \quad \text{et} \quad H(x) = 7x^2 - 21x.$$

$$\begin{aligned} G(x) &= 5x + 15 \\ &= 5 \times x + 5 \times 3 \\ &= 5(x + 3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x) &= 7x^2 - 21x \\ &= 7x \times x - 7x \times 3 \\ &= 7x(x - 3). \end{aligned}$$

**Le facteur commun est une expression**Factoriser $I(x) = (x + 2)(3x - 1) + 5(x + 2)$.

$$\begin{aligned} I(x) &= (x + 2)(3x - 1) + 5(x + 2) \\ &= (x + 2)(3x - 1) + (x + 2) \times 5 \\ &= (x + 2)[(3x - 1) + 5] \\ &= (x + 2)(3x + 4). \end{aligned}$$

**Faire apparaître le facteur commun**

Factoriser

$$J(x) = (2x - 3)(x + 4) - (2x - 3) \quad \text{et} \quad K(x) = (x + 1)^2 - 4(x + 1).$$

$$\begin{aligned} J(x) &= (2x - 3)(x + 4) - (2x - 3) \\ &= (2x - 3)(x + 4) - (2x - 3) \times 1 \\ &= (2x - 3)[(x + 4) - 1] \\ &= (2x - 3)(x + 3). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K(x) &= (x + 1)^2 - 4(x + 1) \\ &= (x + 1)(x + 1) - 4(x + 1) \\ &= (x + 1)[(x + 1) - 4] \\ &= (x + 1)(x - 3). \end{aligned}$$

**Le facteur 1**Dans une expression comme $A \times B - A$, on écrit mentalement $A \times B - A \times 1$. On peut alors factoriser :

$$A \times B - A = A(B - 1).$$

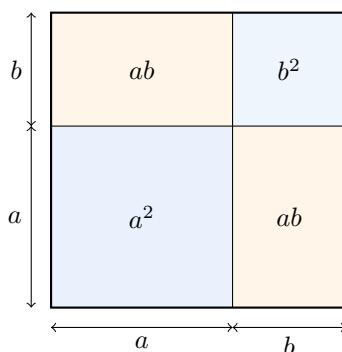
VI Les identités remarquables

VI.1 Découvrir la première identité



Une lecture géométrique

Les identités remarquables traduisent des égalités d'aires connues depuis l'Antiquité. Elles permettent aujourd'hui d'effectuer rapidement certains développements et certaines factorisations.



L'aire du grand carré peut être calculée de deux façons :

$$(a + b)^2 \quad \text{ou} \quad a^2 + ab + ab + b^2.$$

On obtient donc $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

VI.2 Les trois identités à connaître

Propriété 5 (Identités remarquables)

Pour tous nombres a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$



Comment les mémoriser ?

- Le carré d'une somme ou d'une différence contient trois termes : le carré du premier, le double produit, puis le carré du second.
- Dans $(a - b)^2$, seul le double produit est négatif.
- Le produit de la somme et de la différence contient deux termes : une différence de carrés.



Erreur classique

En général,

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad (a - b)^2 \neq a^2 - b^2.$$

Le terme $2ab$ ne doit pas être oublié.

VII Développer avec une identité remarquable



Reconnaître a et b

Avant d'appliquer une identité remarquable, on identifie les deux expressions qui jouent les rôles de a et de b . On écrit ensuite directement les trois termes obtenus, puis on réduit si nécessaire.



Carré d'une somme

Développer $L(x) = (3x + 5)^2$.

$$\begin{aligned} L(x) &= (3x + 5)^2 \\ &= (3x)^2 + 2 \times 3x \times 5 + 5^2 \\ &= 9x^2 + 30x + 25. \end{aligned}$$

Ainsi, $(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$.



Carré d'une différence

Développer $M(x) = (2x - 7)^2$.

$$\begin{aligned} M(x) &= (2x - 7)^2 \\ &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2 \\ &= 4x^2 - 28x + 49. \end{aligned}$$

Ainsi, $(2x - 7)^2 = 4x^2 - 28x + 49$.



Somme par différence

Développer $N(x) = (4x - 3)(4x + 3)$.

$$\begin{aligned} N(x) &= (4x - 3)(4x + 3) \\ &= (4x)^2 - 3^2 \\ &= 16x^2 - 9. \end{aligned}$$

Ainsi, $(4x - 3)(4x + 3) = 16x^2 - 9$.



Quand ne pas utiliser une identité remarquable ?

Le produit $(x + 2)(x + 5)$ ne correspond à aucune identité remarquable : les deux parenthèses ne sont ni identiques, ni de la forme $a - b$ et $a + b$. Il faut utiliser la double distributivité.

VIII Factoriser avec une identité remarquable

2. S'il y a trois termes, vérifier que le terme central est $2ab$ ou $-2ab$.
3. S'il y a deux termes séparés par un signe moins, vérifier qu'il s'agit d'une différence de carrés.
4. Écrire la forme factorisée correspondante.



Reconnaître un carré parfait

Factoriser $P(x) = x^2 + 10x + 25$.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 + 10x + 25 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 \\ &= (x + 5)^2. \end{aligned}$$



Le double produit est négatif

Factoriser $Q(x) = 9x^2 - 24x + 16$.

$$\begin{aligned} Q(x) &= 9x^2 - 24x + 16 \\ &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2 \\ &= (3x - 4)^2. \end{aligned}$$



Différence de deux carrés

Factoriser $R(x) = 25x^2 - 49$.

$$\begin{aligned} R(x) &= 25x^2 - 49 \\ &= (5x)^2 - 7^2 \\ &= (5x - 7)(5x + 7). \end{aligned}$$



Une somme de deux carrés

L'expression $a^2 + b^2$ ne correspond à aucune des trois identités remarquables. Avec les outils de la classe de 3e, elle ne se factorise pas en général.

IX Factorisations mixtes

Définition 4 (Factorisation mixte)

Une factorisation mixte nécessite une transformation intermédiaire : faire apparaître un facteur commun ou reconnaître d'abord une identité remarquable.



Reconnaître d'abord une différence de carrés

Factoriser $S(x) = x^2 + 6x + 9 - (2x - 1)^2$.

$$\begin{aligned} S(x) &= x^2 + 6x + 9 - (2x - 1)^2 \\ &= (x + 3)^2 - (2x - 1)^2 \\ &= [(x + 3) - (2x - 1)][(x + 3) + (2x - 1)] \\ &= (-x + 4)(3x + 2). \end{aligned}$$

Ainsi, $S(x) = (-x + 4)(3x + 2)$.



Faire apparaître un facteur commun

Factoriser $T(x) = (x - 3)^2 - 5x + 15$.

$$\begin{aligned} T(x) &= (x - 3)^2 - 5x + 15 \\ &= (x - 3)^2 - 5(x - 3) \\ &= (x - 3)[(x - 3) - 5] \\ &= (x - 3)(x - 8). \end{aligned}$$

Ainsi, $T(x) = (x - 3)(x - 8)$.



Choisir une stratégie

Avant de calculer, observer la structure de l'expression :

- un produit contenant des parenthèses invite à développer ;
- une somme dont les termes ont un facteur commun invite à factoriser ;
- un carré de somme, un carré de différence ou une somme par différence invite à utiliser une identité remarquable ;
- une expression plus complexe peut nécessiter deux étapes successives.

x Bilan du chapitre

Objectif	Forme de départ	Outil principal
Évaluer	Expression littérale et valeur donnée	Remplacer la lettre, puis calculer
Réduire	Somme comportant des termes de même nature	Regrouper les coefficients
Développer	Produit	Distributivité simple, double distributivité ou identité remarquable
Factoriser	Somme ou différence	Facteur commun ou identité remarquable
Contrôler	Deux expressions supposées égales	Développer la forme factorisée ou tester une valeur simple

Propriété 6 (Formulaire à connaître)

$$\begin{aligned} k(a + b) &= ka + kb, \\ k(a - b) &= ka - kb, \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ (a - b)(a + b) &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$



Réflexe de vérification

Après une factorisation, développer mentalement le résultat permet souvent de détecter une erreur de signe ou l'oubli d'un facteur.

XI Lexique français–anglais

Français	English	Français	English
expression littérale	algebraic expression	terme	term
somme	sum	produit	product
facteur	factor	facteur commun	common factor
évaluer	evaluate	valeur d'une expression	value of an expression
réduire	simplify / combine like terms	développer	expand
factoriser	factor	forme développée	expanded form
forme factorisée	factored form	identité remarquable	special product formula
carré parfait	perfect square	double produit	twice the product

↩ Fin du cours ↪