

COURS

Arithmétique

Divisibilité, nombres premiers et fractions irréductibles

Version professeur

Sommaire du chapitre

I	Rappel : les ensembles de nombres	2
II	Rappel : Division euclidienne	3
III	Multiples et diviseurs	4
IV	Nombres premiers	5
V	Décomposition en facteurs premiers	6
VI	Fractions irréductibles	7
VII	Applications de la décomposition	8



Objectifs du chapitre

À la fin de ce chapitre, on doit savoir :

- effectuer et interpréter une division euclidienne ;
- utiliser les notions de multiple, de diviseur et les critères de divisibilité ;
- reconnaître un nombre premier ;
- décomposer un entier en produit de facteurs premiers ;
- utiliser cette décomposition pour rendre une fraction irréductible ;
- calculer le PGCD et le PPCM de deux entiers ;
- rechercher méthodiquement tous les diviseurs d'un entier.

I Rappel : les ensembles de nombres

Définition 1 (Les entiers naturels)

De façon **intuitive**, un **entier naturel** (*whole number*) est un nombre positif ou nul qui peut s'écrire sans virgule. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots\}.$$



Une définition plus rigoureuse

La définition précédente est simple à comprendre, mais elle n'est pas totalement rigoureuse : elle décrit surtout une **écriture** du nombre. Par exemple, 3, 3,0 et $\frac{6}{2}$ désignent le même nombre.

Mathématiquement, on peut définir $\mathbb{N}$ comme le **plus petit ensemble** qui vérifie les deux propriétés suivantes :

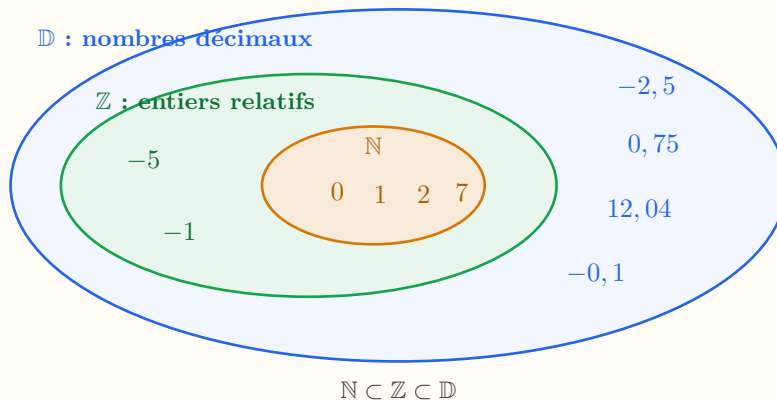
- $0 \in \mathbb{N}$;
- si $n \in \mathbb{N}$, alors $n + 1 \in \mathbb{N}$.

Autrement dit, on part de 0 puis on construit successivement $1 = 0 + 1$, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, etc. Cette définition, fondée sur la notion de **successeur**, est plus rigoureuse mais aussi plus délicate.



Rappel : ensembles de nombres

En cinquième, on a vu les entiers naturels $\mathbb{N}$, les entiers relatifs $\mathbb{Z}$ (*integers*) et les nombres décimaux $\mathbb{D}$ (*decimal numbers*). On peut représenter les inclusions entre ces ensembles à l'aide du diagramme suivant :



On lit :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}.$$

Ainsi, tout entier naturel est un entier relatif, et tout entier relatif est un nombre décimal.

Par exemple, $5 \in \mathbb{N}$ tandis que $-5 \notin \mathbb{N}$ mais $-5 \in \mathbb{Z}$. Dans ce chapitre, les divisions euclidiennes et les décompositions en facteurs premiers portent sur des entiers naturels.

FR/US Vocabulaire France / US

En France, on inclut généralement 0 parmi les **entiers naturels** :

$$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}.$$

Dans les manuels américains, *whole numbers* désigne cet ensemble avec 0, tandis que *natural numbers* désigne souvent $\{1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$, sans 0. Pour savoir si 0 est inclus, il faut regarder la convention indiquée dans le document.

II Rappel : Division euclidienne

Définition 2 (Division Euclidienne)

Effectuer une **division euclidienne** (*division with remainder*) de $a \in \mathbb{N}$ par $b \in \mathbb{N}$ non nul, c'est trouver deux entiers naturels, le **quotient** q (*quotient*) et le **reste** r (*remainder*), tels que :

$$a = b \times q + r, \text{ avec } 0 \leq r < b.$$



Exemple

$$\begin{array}{r|l} 185 & 7 \\ -14 & 26 \\ \hline 45 & \\ -42 & \\ \hline 3 & \end{array} \implies 185 = 7 \times 26 + 3$$

Dans la division euclidienne de 185 par 7, on a :

$$\begin{cases} \text{quotient : } q = 26 \\ \text{reste : } r = 3 < 7 \end{cases}$$

car $185 = 7 \times 26 + 3$.

Avec la calculatrice

- Casio fx-92 Spéciale Collège

185 $\div$ 7 EXE

185 $\div$ 7

Q= 26
R= 3

- TI-Collège Plus :

185 2nde $\div$ 7 entrer

185 $\div$ 7 Q=26 R=3

III Multiples et diviseurs

Définition 3 (Multiple et diviseur)

Soient a et b deux entiers naturels, avec $b \neq 0$.

- Un nombre entier a est un **multiple** (*multiple*) de b non nul lorsque le reste de la division euclidienne de a par b est 0.
- On dit que b est un **diviseur de a** (*factor ; divisor*) ou que a est divisible par b .
- L'entier naturel b divise l'entier naturel a si et seulement s'il existe un entier naturel q tel que :

$$a = b \times q$$



Exemple

L'entier $a = 15$ est un multiple de $b = 3$ car $15 = 3 \times 5$. Les entiers 3 et 5 sont donc des diviseurs de 15.

Propriété 1 (Critères de divisibilité)

Les **critères de divisibilité** (*divisibility rules*) permettent de reconnaître rapidement si un entier naturel est divisible :

- par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;
- par 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 ;
- par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 ;
- par 10 si son chiffre des unités est 0.

Propriété 2 (Entier pair et impair)

Soit $a \in \mathbb{N}$. L'entier naturel a est :

- pair (*even*) lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2 \times k$;
- impair (*odd*) lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = 2 \times k + 1$.



Exemple

- Par exemple 10 est pair car il existe $k = 5 \in \mathbb{N}$ tel que $10 = 2 \times 5$.
- Par exemple 51 est impair car il existe $k = 25 \in \mathbb{N}$ tel que $51 = 2 \times 25 + 1$.

IV Nombres premiers

Définition 4 (Nombres premiers)

Un **nombre premier** (*prime number*) est un entier naturel qui possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.



Exemples

Liste des 25 nombres premiers inférieurs à 100.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.



Euclide et les nombres premiers

Euclide est un mathématicien grec qui a enseigné à Alexandrie, en Égypte, vers 300 avant notre ère. Dans son ouvrage *Les Éléments*, il montre qu'il existe une infinité de nombres premiers en utilisant ce que l'on nomme : démonstration par l'absurde.

Observons d'abord la liste 2, 3, 5. Multiplions ses nombres, puis ajoutons 1 :

$$2 \times 3 \times 5 = 30 \quad \longrightarrow \quad \boxed{2 \times 3 \times 5 + 1 = 31}.$$

Le nombre 31 n'est divisible par aucun nombre de la liste :

$$31 = 2 \times 15 + 1, \quad 31 = 3 \times 10 + 1, \quad 31 = 5 \times 6 + 1.$$

Chaque division laisse un reste égal à 1.

Donc 2 possibilités, soit 31 est premier, soit il est divisible par un autre entier que 2, 3 et 5.

Supposons maintenant que $p_1, p_2, \dots, p_k$ soit la liste de **tous** les nombres premiers et posons

$$N = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k + 1.$$

La division de N par chacun des nombres de la liste laisse un reste égal à 1. Pourtant, $N \geq 2$ est premier ou possède un diviseur premier. Ce nombre premier ne figure donc pas dans la liste : elle n'était pas complète.

Il existe ainsi une **infinité de nombres premiers**.

v Décomposition en facteurs premiers

Propriété 3 (Admis)

Un nombre entier supérieur ou égal à 2 se décompose en produit de facteurs premiers (*prime factors*). Cette **décomposition en facteurs premiers** (*prime factorization*) est unique, à l'ordre des facteurs près.



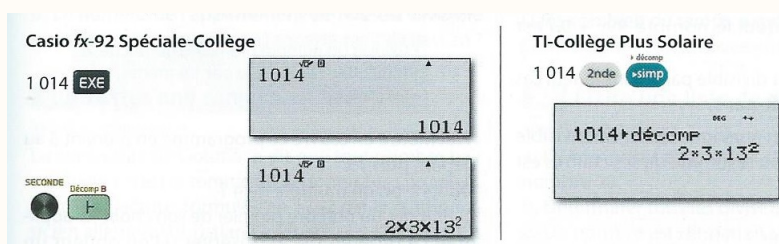
Exemple

$$1014 = 2 \times 507$$

$$1014 = 2 \times (3 \times 169)$$

$$1014 = 2 \times 3 \times (13 \times 13)$$

$$1014 = 2 \times 3 \times 13^2$$



Exercice 1 À faire dans le cours

Décomposer 756 en produit de facteurs premiers.

$$\begin{aligned} 756 &= 2 \times 378 \\ &= 2^2 \times 189 \\ &= 2^2 \times 3 \times 63 \\ &= 2^2 \times 3^3 \times 7. \end{aligned}$$

Donc $756 = 2^2 \times 3^3 \times 7$.

VI Fractions irréductibles

Définition 5 (Fractions irréductibles)

Une fraction est dite **irréductible** (*fraction in lowest terms*) lorsque le numérateur (*numerator*) et le dénominateur (*denominator*) n'ont pas de diviseur commun autre que 1.



Exemple

Pour rendre irréductible une fraction, on peut utiliser la décomposition en facteurs premiers du numérateur et du dénominateur.

$$\begin{aligned}\frac{1014}{84} &= \frac{2 \times 3 \times 13^2}{2^2 \times 3 \times 7} \\ &= \frac{\color{red}{2} \times \color{blue}{3} \times 13^2}{\color{red}{2} \times 2 \times \color{blue}{3} \times 7} \\ &= \frac{13^2}{2 \times 7} \\ \frac{1014}{84} &= \frac{169}{14}\end{aligned}$$

Donc on obtient la fraction sous forme irréductible :

$$\boxed{\frac{1014}{84} = \frac{169}{14}}$$



Exercice 2

De la même façon, donner la forme irréductible de la fraction suivante en détaillant tous les calculs :

$$\begin{aligned}\frac{245}{525} &= \frac{5 \times 7^2}{3 \times 5^2 \times 7} \\ &= \frac{7}{3 \times 5} \\ &= \boxed{\frac{7}{15}}.\end{aligned}$$

VII Applications de la décomposition

VII.1 Calculer le Plus Grand Commun Diviseur de deux entiers (PGCD)

Mhode 1 (PGCD)

Le **PGCD** (*greatest common factor, GCF; greatest common divisor, GCD*) se calcule ainsi :

1. On écrit la décomposition des entiers en facteurs premiers.
2. On recherche les facteurs communs des deux entiers (on les entoure par exemple) .
3. On calcule alors le produit des facteurs communs.

Pour résumer, le PGCD de deux nombres entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant à la fois dans la décomposition de a et de b .



Exemple

Exemple : Calcul du Plus Grand Commun Diviseur de 126 et 180.

$$\begin{cases} 180 = \boxed{2} \times 2 \times \boxed{3} \times \boxed{3} \times 5 \\ 126 = \boxed{2} \times \boxed{3} \times \boxed{3} \times 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 180 = \underbrace{(2 \times 3 \times 3)}_{18} \times 2 \times 5 \\ 126 = \underbrace{(2 \times 3 \times 3)}_{18} \times 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 180 = \boxed{18} \times 10 \\ 126 = \boxed{18} \times 7 \end{cases}$$

Le **Plus Grand Diviseur Commun** des entiers 180 et 126 est donc 18.



Exercice 3

Calculer le Plus Grand Commun Diviseur de 150 et 120.

$$\begin{cases} 150 = 2 \times 3 \times 5^2 \\ 120 = 2^3 \times 3 \times 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{PGCD}(150 ; 120) = 2 \times 3 \times 5 = 30}.$$

VII.2 Calculer le Plus Petit Multiple Commun de deux entiers (PPCM)

Mhods 2 (PPCM)

Le **PPCM** (*least common multiple, LCM*) se calcule ainsi :

1. On écrit la décomposition des entiers en facteurs premiers.
2. On met en évidence les facteurs communs (donc le PGCD) et on complète les décompositions par les facteurs qui manquent pour obtenir des produit égaux.
3. On calcule alors ce multiple commun.

Pour résumer, le PPCM de deux nombres entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant dans a ou dans b .

Le PPCM est le produit du PGCD par le reste des facteurs non communs.



Exemple

Exemple : Calcul du Plus Petit Multiple Commun de 126 et 180.

On va exhiber les entiers N et P tels que :

$$180 \times N = 126 \times P = \text{PPCM de } 126 \text{ et } 180$$

Il est souvent plus facile de trouver le PPCM quand on a le PGCD.

$$\begin{cases} 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 126 = 2 \times 3^2 \times 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 180 = \boxed{18} \times 10 \\ 126 = \boxed{18} \times 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 180 \times 7 = \underbrace{(18 \times 10)}_{180} \times 7 \\ 126 \times 10 = \underbrace{(18 \times 7)}_{126} \times 10 \end{cases}$$

$$\boxed{PPCM = \underbrace{18}_{PGCD} \times 10 \times 7 = 1\,260} \quad \text{et} \quad \boxed{180 \times 7 = 1\,260 = 126 \times 10}$$

Le **Plus Petit Multiple Commun** des entiers 180 et 126 est donc 1 260.



Exercice 4

Calculer le PPCM de 150 et 120.

$$\begin{cases} 150 = 30 \times 5 \\ 120 = 30 \times 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{PPCM(150 ; 120) = 30 \times 5 \times 4 = 600}$$

On vérifie : $150 \times 4 = 600 = 120 \times 5$.

Propriété 4 (Une remarque utile)

Le produit de deux entiers naturels a et b est égal au produit de leur PGCD et PPCM.

$$PGCD(a ; b) \times PPCM(a ; b) = a \times b$$

VII.3 Complément : Lister tous les diviseurs d'un entier

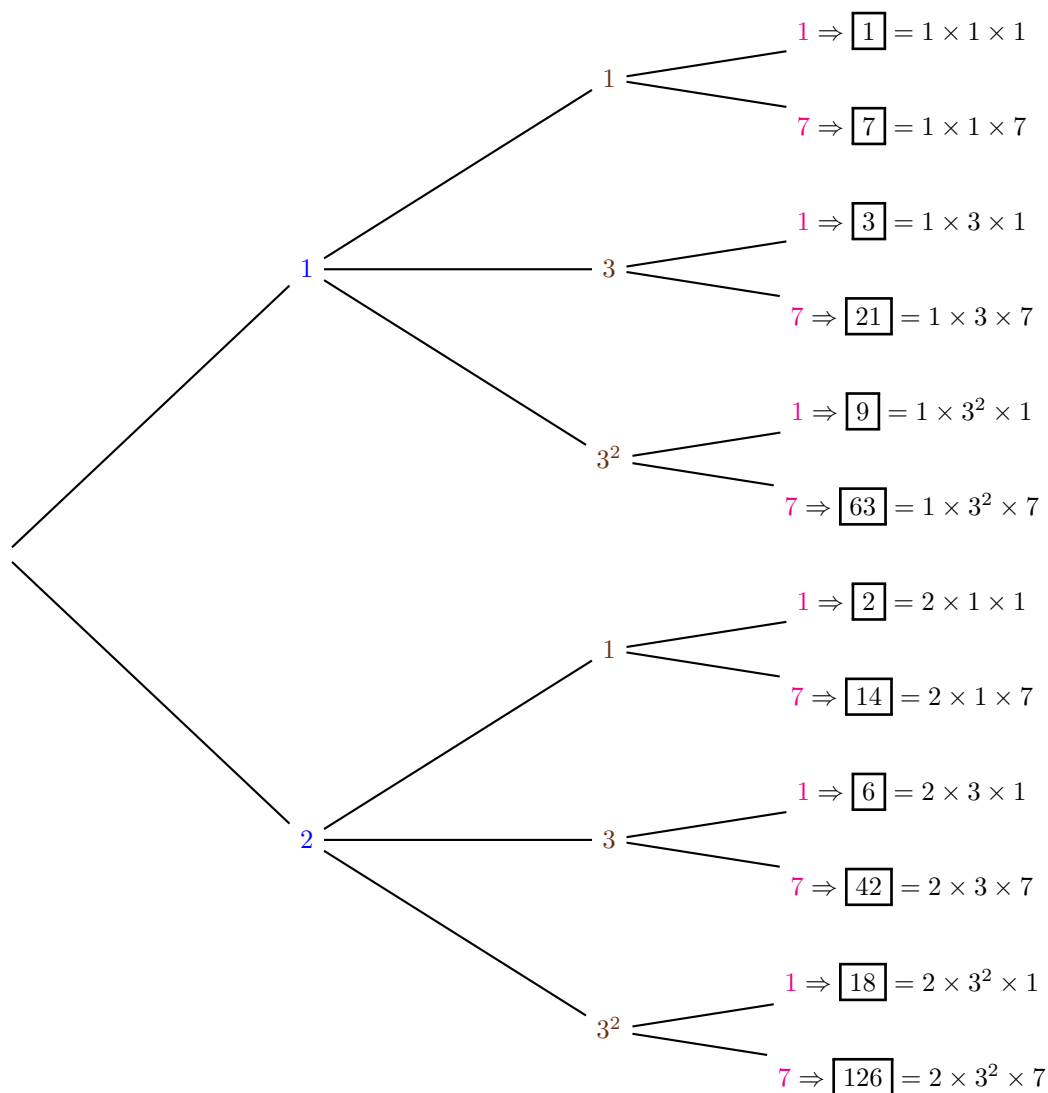
Mhode 3

Pour trouver **tous les diviseurs** (*all the factors*) d'un entier :

1. On écrit la décomposition de l'entier en facteurs premiers.
2. On complète un arbre présentant toutes les puissances des facteurs premiers.
3. On effectue le produit de chaque branche.

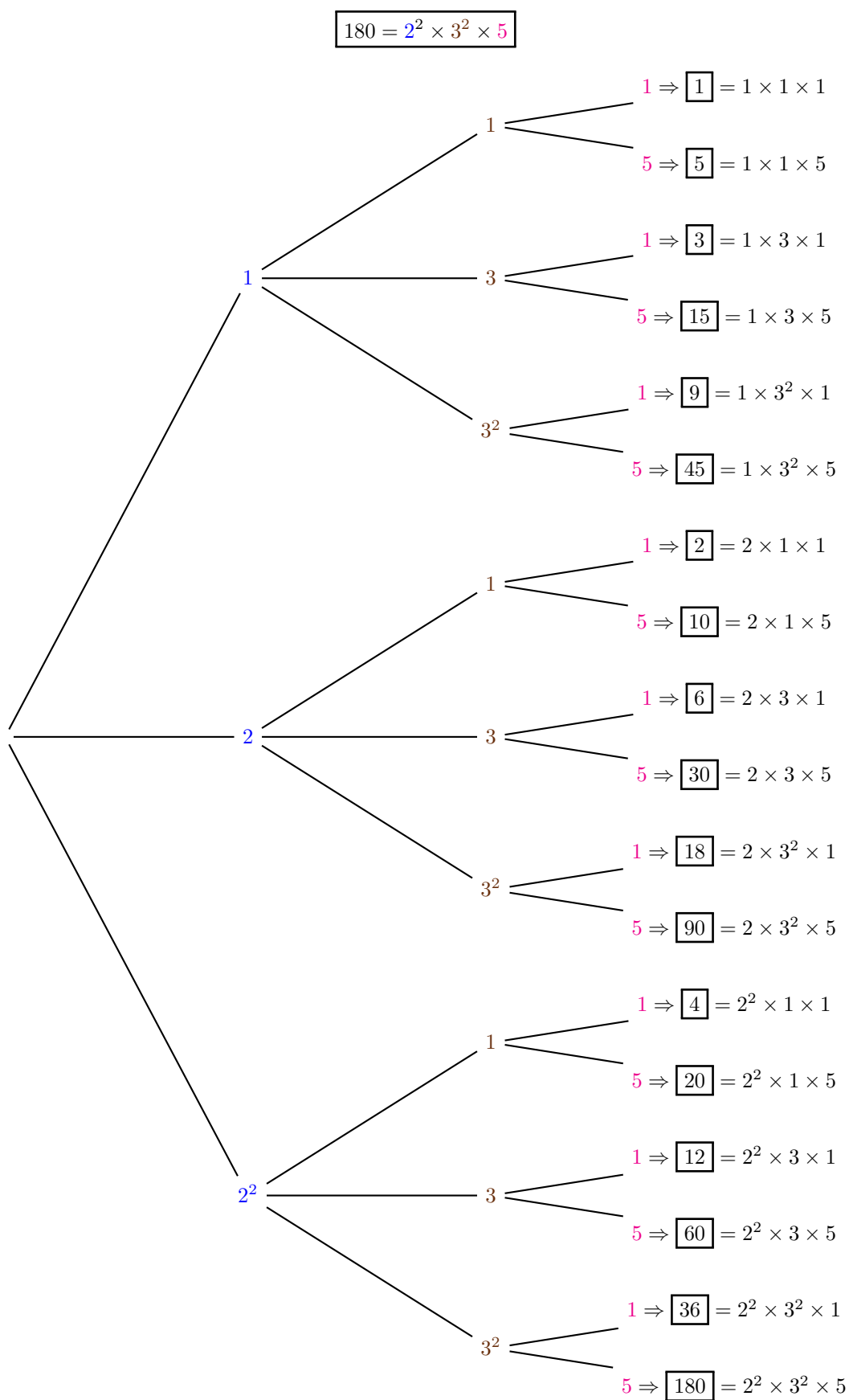
Exemples : Calcul des diviseurs de 126.

$$126 = 2 \times 3^2 \times 7$$



Les diviseurs de 126 sont donc : 1, 7, 3, 21, 9, 63, 2, 14, 6, 42, 18 et 126

VII.4 Complément : Lister tous les diviseurs de 180



Les diviseurs de 180 sont donc : 1, 5, 3, 15, 9, 45, 2, 10, 6, 30, 18, 90, 4, 20, 12, 60, 36 et 180

↔ **Fin du cours** ↔