

Chapitre 3

Nombres relatifs

Version prof

Sommaire du chapitre

I	Ensembles de nombres et notations	2
II	Définitions et droite graduée	4
III	Additionner et soustraire des nombres relatifs	6
IV	Repérage sur un plan	8
V	Bilan du chapitre	11



Objectifs du chapitre

Dans ce chapitre, on apprend à :

- comprendre les nombres relatifs (*signed numbers*);
- distinguer les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$;
- repérer un nombre relatif sur une droite graduée (*number line*);
- utiliser l'opposé d'un nombre (*opposite*) et sa valeur absolue (*absolute value*);
- additionner et soustraire des nombres relatifs;
- repérer un point dans un plan avec deux coordonnées (*coordinates*).

I Ensembles de nombres et notations



Repère historique

Les nombres négatifs ont d'abord été utilisés pour des besoins pratiques : dettes, pertes, températures, positions par rapport à une origine. Ils ont été employés très tôt en Chine et en Inde, mais ils ont été acceptés beaucoup plus tardivement en Europe. Aujourd'hui, ils sont indispensables pour repérer des positions, calculer des variations et résoudre des soustractions qui seraient impossibles avec les seuls nombres positifs.

Définition 1 (Ensembles de nombres)

On regroupe les nombres dans des ensembles.

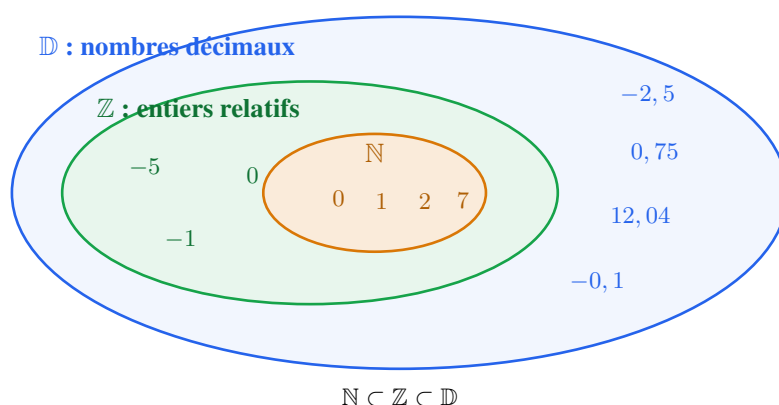
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** :

0, 1, 2, 3, 4, ...

- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** :

..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

- $\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux** : ce sont les nombres qui peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.



Propriété 1 (Inclusions)

Tout entier naturel est un entier relatif, et tout entier relatif est un nombre décimal. On écrit :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}.$$



Exemples

- $4 \in \mathbb{N}$, donc $4 \in \mathbb{Z}$ et $4 \in \mathbb{D}$.
- $-7 \notin \mathbb{N}$ mais $-7 \in \mathbb{Z}$ et $-7 \in \mathbb{D}$.
- $2,5 \notin \mathbb{Z}$ mais $2,5 \in \mathbb{D}$.
- $-0,75 \notin \mathbb{Z}$ mais $-0,75 \in \mathbb{D}$.



Notations

Le symbole $\in$ signifie « appartient à ». Par exemple, $-3 \in \mathbb{Z}$ signifie que -3 est un entier relatif.

Le symbole $\notin$ signifie « n'appartient pas à ». Par exemple, $-3 \notin \mathbb{N}$ signifie que -3 n'est pas un entier naturel.

La notation $\mathbb{Z}$ vient de l'allemand *Zahlen*, qui signifie « nombres ».

FR/US Vocabulaire France / US

En français, l'ensemble des entiers naturels est souvent noté :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

En anglais, surtout dans les manuels américains, on distingue souvent :

$$\text{natural numbers} = \{1; 2; 3; \dots\}$$

et

$$\text{whole numbers} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}.$$

Ainsi, le mot *natural numbers* ne correspond pas toujours exactement à l'ensemble français $\mathbb{N}$ si celui-ci contient 0.

FR/US Vocabulaire France / US

Mot français

Mot anglais utile

entier naturel	whole number ; natural number
entier relatif	integer
nombre décimal	decimal number
ensemble de nombres	set of numbers
appartient à	belongs to ; is an element of
inclusion	inclusion ; subset relation



Exercice 1 Exercice du cours

Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

$$\begin{array}{lll} 5 \in \mathbb{N}, & -4 \notin \mathbb{N}, & -4 \in \mathbb{Z}, \\ 3, 2 \notin \mathbb{Z}, & 3, 2 \in \mathbb{D}, & -8 \in \mathbb{D}. \end{array}$$

Correction.

$$\begin{array}{lll} 5 \in \mathbb{N}, & -4 \notin \mathbb{N}, & -4 \in \mathbb{Z}, \\ 3, 2 \notin \mathbb{Z}, & 3, 2 \in \mathbb{D}, & -8 \in \mathbb{D}. \end{array}$$

II Définitions et droite graduée



Idée du chapitre

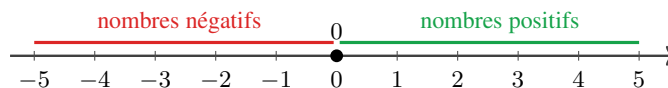
Les nombres relatifs permettent de mesurer des grandeurs qui peuvent aller dans deux sens opposés : températures positives ou négatives, altitudes au-dessus ou au-dessous du niveau de la mer, gains ou pertes, déplacements vers la droite ou vers la gauche.

Définition 2 (Nombre relatif)

Un **nombre relatif** est un nombre auquel on associe un signe :

- un signe $+$ pour un nombre positif ;
- un signe $-$ pour un nombre négatif.

Le nombre 0 est à la fois positif et négatif. Il n'est ni strictement positif ni strictement négatif.



Notation

Pour un nombre positif, le signe $+$ peut ne pas être écrit. Ainsi :

$$+5 = 5.$$

En revanche, le signe $-$ d'un nombre négatif doit toujours être écrit.



Exercice 2 Exercice du cours

Dire si chaque nombre est positif, négatif ou nul.

-7 4 $+12$ 0 $-0,5$

Correction.

- -7 est négatif.
- 4 et $+12$ sont positifs.
- 0 est nul.
- $-0,5$ est négatif.

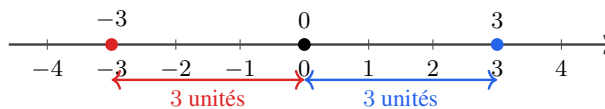
Définition 3 (Opposé d'un nombre)

Deux nombres sont **opposés** lorsque leur somme est égale à 0.

L'opposé d'un nombre a est noté $-a$.

Propriété 2 (Deux nombres opposés)

Deux nombres opposés sont à la même distance de 0, mais ils sont de signes contraires.



Exemples

L'opposé de 4 est -4 , car :

$$4 + (-4) = 0.$$

L'opposé de -8 est 8, car :

$$-8 + 8 = 0.$$

Définition 4 (Valeur absolue)

La **valeur absolue** d'un nombre relatif est sa distance à 0 sur une droite graduée.

La valeur absolue de a se note :

$$|a|.$$

Propriété 3 (Calculer une valeur absolue)

La valeur absolue d'un nombre positif est ce nombre.

La valeur absolue d'un nombre négatif est son opposé.

Exemples

$$|5| = 5, \quad |-5| = 5, \quad |0| = 0.$$

? Exercice 3 Exercice du cours

Compléter.

$$|-7| = 7, \quad |9| = 9, \quad |-2,5| = 2,5.$$

Correction.

$$|-7| = 7, \quad |9| = 9, \quad |-2,5| = 2,5.$$

La valeur absolue mesure une distance à 0 : elle est donc toujours positive ou nulle.



Additionner et soustraire des nombres relatifs



Additionner deux nombres relatifs

- Si les deux nombres ont le **même signe**, on additionne les distances à 0 et on garde le signe commun.
- Si les deux nombres ont des **signes contraires**, on soustrait les distances à 0 et on garde le signe du nombre qui a la plus grande distance à 0.



Exemples

$$(-4) + (-6) = -10$$

car les deux nombres sont négatifs.

$$(-9) + 5 = -4$$

car $9 > 5$ et le nombre qui a la plus grande distance à 0 est -9 .



Exercice 4 Exercice du cours

Calculer.

$$A = (-3) + (-8), \quad B = (-7) + 12,$$

$$C = 15 + (-4), \quad D = (-6) + 6.$$

Correction.

$$A = (-3) + (-8) = -11.$$

$$B = (-7) + 12 = 5.$$

$$C = 15 + (-4) = 11.$$

$$D = (-6) + 6 = 0.$$

Propriété 4 (Soustraire un nombre relatif)

Soustraire un nombre relatif revient à additionner son opposé.

Pour tous nombres relatifs a et b :

$$a - b = a + (-b).$$

**Exemples**

$$7 - (-3) = 7 + 3 = 10.$$

$$-5 - 4 = -5 + (-4) = -9.$$

**Exercice 5 Exercice du cours**

Calculer en transformant d'abord la soustraction en addition.

$$E = 8 - (-5), \quad F = -4 - 7,$$

$$G = -3 - (-9), \quad H = 2,5 - 6.$$

Correction.

$$E = 8 - (-5) = 8 + 5 = 13.$$

$$F = -4 - 7 = -4 + (-7) = -11.$$

$$G = -3 - (-9) = -3 + 9 = 6.$$

$$H = 2,5 - 6 = -3,5.$$

IV Repérage sur un plan

Définition 5 (Repère du plan)

Un **repère du plan** est formé :

- d'un point O , appelé **origine** du repère ;
- de deux axes gradués qui se coupent en O .

Ces deux axes permettent de repérer chaque point du plan par deux nombres.

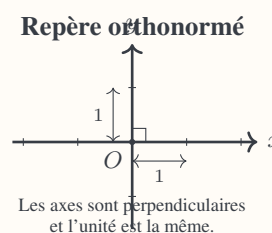
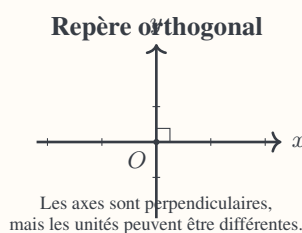
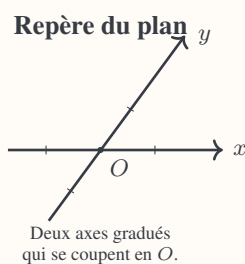
Définition 6 (Repère orthogonal et repère orthonormé)

Un **repère orthogonal** est un repère dont les deux axes sont perpendiculaires.

Un **repère orthonormé** est un repère orthogonal dans lequel l'unité est la même sur les deux axes.



Trois types de repères



Définition 7 (Axes d'un repère orthonormé)

Dans un repère orthonormé :

- l'axe horizontal est appelé **axe des abscisses** ;
- l'axe vertical est appelé **axe des ordonnées**.

FR/US Vocabulaire France / US

Dans un repère du plan, on utilise aussi le vocabulaire anglais suivant :

Français	Anglais
axe des abscisses	<i>x-axis</i>
axe des ordonnées	<i>y-axis</i>
origine du repère	<i>origin</i>
abscisse	<i>x-coordinate</i>
ordonnée	<i>y-coordinate</i>
coordonnées	<i>coordinates</i>
repère du plan	<i>coordinate plane</i>

Ainsi, pour un point $A(3; 2)$, le nombre 3 est l'abscisse de A et le nombre 2 est l'ordonnée de A .
En anglais, on dit que 3 est la *x-coordinate* de A et que 2 est la *y-coordinate* de A .

Définition 8 (Coordonnées d'un point)

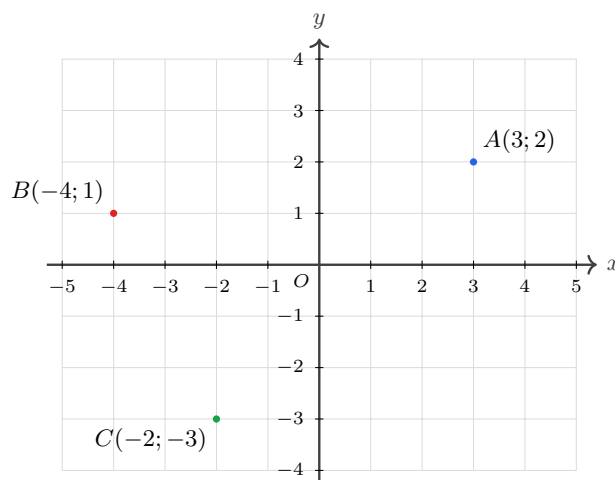
Dans un repère, un point est repéré par deux nombres appelés ses **coordonnées**.

On écrit par exemple :

$$A(3; 2).$$

Le premier nombre est l'**abscisse** du point.

Le deuxième nombre est l'**ordonnée** du point.

**Lire les coordonnées d'un point**

Pour lire les coordonnées d'un point, on lit toujours dans cet ordre :

(abscisse; ordonnée).

Autrement dit, on lit d'abord le déplacement horizontal, puis le déplacement vertical.

En anglais, on lit :

(*x*-coordinate; *y*-coordinate).

Le premier nombre indique la position selon l'*x*-axis.

Le deuxième nombre indique la position selon l'*y*-axis.

**Exemples**

Sur le repère ci-dessus :

$$A(3; 2), \quad B(-4; 1), \quad C(-2; -3).$$

Pour le point $A(3; 2)$:

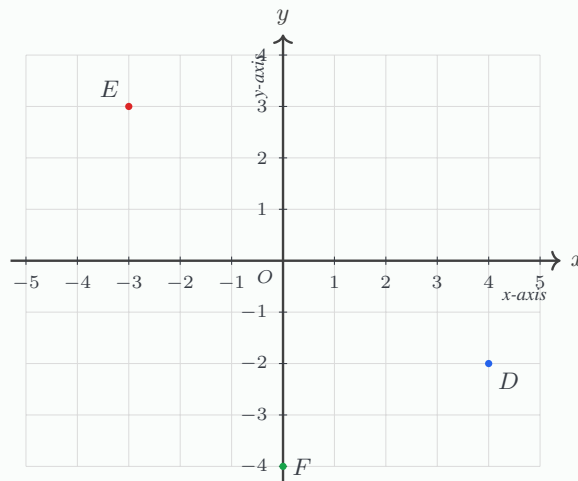
- son abscisse est 3;
- son ordonnée est 2.

En anglais :

- the *x*-coordinate of A is 3;
- the *y*-coordinate of A is 2.

? Exercice 6 Exercice du cours

Dans le repère ci-dessous, lire les coordonnées des points D , E et F .



Correction.

Pour lire les coordonnées, on lit d'abord l'abscisse, puis l'ordonnée.

$$D(4; -2), \quad E(-3; 3), \quad F(0; -4).$$

Le point F est sur l'axe des ordonnées, donc son abscisse est 0.

En anglais, on peut dire :

the x -coordinate of F is 0.

v Bilan du chapitre

À retenir

- Les ensembles de nombres vus dans ce chapitre sont $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{D}$, avec $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
- Un nombre relatif est un nombre positif, négatif ou nul.
- Deux nombres opposés ont la même distance à 0 et des signes contraires.
- La valeur absolue $|a|$ est la distance du nombre a à 0.
- Pour additionner deux nombres relatifs, on regarde leurs signes et leurs distances à 0.
- Soustraire un nombre revient à additionner son opposé : $a - b = a + (-b)$.
- Dans un repère du plan, les coordonnées se lisent dans l'ordre (abscisse; ordonnée).

FR/US Vocabulaire France / US

Mot français	Mot anglais utile
nombre relatif	signed number ; directed number
nombre positif	positive number
nombre négatif	negative number
droite graduée	number line
opposé d'un nombre	opposite of a number ; additive inverse
valeur absolue	absolute value
distance à zéro	distance from zero
repère	coordinate plane ; coordinate system
abscisse	x -coordinate
ordonnée	y -coordinate
coordonnées	coordinates
entier naturel	whole number ; natural number
entier relatif	integer
nombre décimal	decimal number



Phrase importante

La notation $|a|$ ne donne pas le signe de a : elle donne la distance entre a et 0. Par exemple, $|-6| = 6$.

↩ **Fin du cours** ↪