

TD – EXERCICES

TD 5

Probabilités et loi binomiale

Version corrigée

Sommaire du TD

I	Probabilités conditionnelles, arbres et indépendance	2
II	Schéma de Bernoulli, coefficients binomiaux et loi binomiale	5
III	Calculatrice : probabilités ponctuelles, cumulées et intervalles	7
IV	Espérance, variance, écart-type et problèmes de seuil	9
V	Exercices du baccalauréat	10
VI	Now We Can Talk – Pour aller plus loin	16

Objectifs

- Réactiver les probabilités conditionnelles, les arbres pondérés, les probabilités totales et l'indépendance.
- Reconnaître un schéma de Bernoulli et justifier rigoureusement qu'une variable suit une loi binomiale.
- Utiliser les coefficients binomiaux et la formule $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.
- Calculer et interpréter des probabilités ponctuelles, cumulées et sur un intervalle avec la calculatrice.
- Utiliser $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.
- Résoudre des problèmes de seuil et des exercices récents du baccalauréat.

Thème I

Probabilités conditionnelles, arbres et indépendance

Exercice 1 Permis de conduire et probabilités conditionnelles

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation : la formation avec *conduite accompagnée* et la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation ;
- 225 personnes ont suivi une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.

On considère les événements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec conduite accompagnée » ;

T : « la personne a suivi une formation traditionnelle » ;

R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;

R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;

R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Calculer $P(A)$ et $P(T)$.



Corrigé

On a :

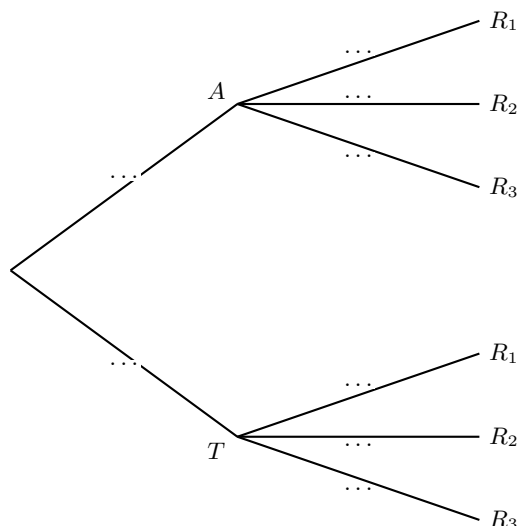
$$P(A) = \frac{75}{300} = \frac{1}{4},$$

$$P(T) = \frac{225}{300} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi :

$$P(A) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(T) = \frac{3}{4}.$$

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré correspondant à la situation.





Corrigé

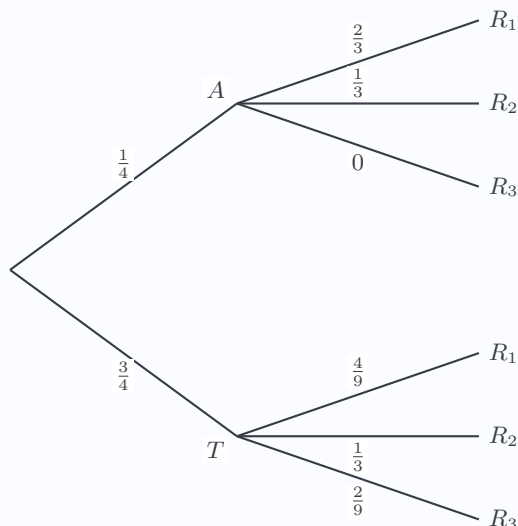
Depuis la branche A :

$$P_A(R_1) = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}, \quad P_A(R_2) = \frac{25}{75} = \frac{1}{3}, \quad P_A(R_3) = 0.$$

Depuis la branche T :

$$P_T(R_1) = \frac{100}{225} = \frac{4}{9}, \quad P_T(R_2) = \frac{75}{225} = \frac{1}{3}, \quad P_T(R_3) = \frac{50}{225} = \frac{2}{9}.$$

L'arbre complété est :



3. Calculer les probabilités suivantes :

$$P(A \cap R_1), \quad P(A \cap R_2), \quad P(A \cap R_3), \quad P(T \cap R_1), \quad P(T \cap R_2), \quad P(T \cap R_3).$$



Corrigé

Pour chaque chemin, on multiplie les probabilités des branches :

$$P(A \cap R_1) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P(A \cap R_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12},$$

$$P(A \cap R_3) = \frac{1}{4} \times 0 = 0,$$

$$P(T \cap R_1) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{3},$$

$$P(T \cap R_2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4},$$

$$P(T \cap R_3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{6}.$$

Ainsi :

$P(A \cap R_1) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap R_2) = \frac{1}{12}, \quad P(A \cap R_3) = 0,$ $P(T \cap R_1) = \frac{1}{3}, \quad P(T \cap R_2) = \frac{1}{4}, \quad P(T \cap R_3) = \frac{1}{6}.$
--

4. En déduire $P(R_1)$, $P(R_2)$ et $P(R_3)$.

**Corrigé**

Les événements A et T forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R_1) &= P(A \cap R_1) + P(T \cap R_1) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(R_1) = \frac{1}{2}}$$

De même :

$$P(R_2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4}$$

$$\boxed{P(R_2) = \frac{1}{3}}$$

et

$$P(R_3) = 0 + \frac{1}{6}$$

$$\boxed{P(R_3) = \frac{1}{6}}$$

5. La personne interrogée a réussi l'examen à la première présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?

**Corrigé**

On cherche $P_{R_1}(A)$:

$$\begin{aligned} P_{R_1}(A) &= \frac{P(A \cap R_1)}{P(R_1)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{R_1}(A) = \frac{1}{3}}$$

6. La personne interrogée a réussi l'examen à la deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec conduite accompagnée ?

**Corrigé**

On cherche $P_{R_2}(A)$:

$$\begin{aligned} P_{R_2}(A) &= \frac{P(A \cap R_2)}{P(R_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{R_2}(A) = \frac{1}{4}}$$

7. La personne interrogée a réussi l'examen à la troisième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation traditionnelle ?

**Corrigé**

On cherche $P_{R_3}(T)$:

$$\begin{aligned} P_{R_3}(T) &= \frac{P(T \cap R_3)}{P(R_3)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{R_3}(T) = 1}$$

Toutes les personnes ayant réussi à la troisième présentation dans ce groupe ont donc suivi une formation traditionnelle.

8. La personne interrogée n'a pas réussi l'examen à sa première présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation traditionnelle ?

**Corrigé**

On cherche $P_{\overline{R_1}}(T)$. D'abord :

$$\begin{aligned} P(\overline{R_1}) &= 1 - P(R_1) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(\overline{R_1}) = \frac{1}{2}}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} P(T \cap \overline{R_1}) &= P(T \cap R_2) + P(T \cap R_3) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(T \cap \overline{R_1}) = \frac{5}{12}}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P_{\overline{R_1}}(T) &= \frac{P(T \cap \overline{R_1})}{P(\overline{R_1})} \\ &= \frac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{\overline{R_1}}(T) = \frac{5}{6}}$$

9. On note B l'événement : « la personne a réussi l'examen à la première ou à la deuxième présentation ».

9. a. Calculer $P(B)$.

**Corrigé**

Les événements R_1 et R_2 sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(R_1) + P(R_2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{5}{6}}$$

9. b. Calculer $P_A(B)$.



Corrigé

Parmi les personnes ayant suivi une formation avec conduite accompagnée, toutes ont réussi à la première ou à la deuxième présentation. Donc :

$$P_A(B) = 1.$$

9. c. Calculer $P_B(A)$.



Corrigé

On cherche :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Or toutes les personnes ayant suivi une formation avec conduite accompagnée appartiennent à B , donc $A \subset B$ et

$$P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{4}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{6}{5} \end{aligned}$$

$$P_B(A) = \frac{3}{10}$$

10. Les événements A et R_2 sont-ils indépendants ? Même question pour A et R_1 , puis pour A et R_3 .



Corrigé

Pour A et R_2 :

$$P(A \cap R_2) = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad P(A)P(R_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Donc A et R_2 sont indépendants.

Pour A et R_1 :

$$P(A \cap R_1) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P(A)P(R_1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Comme $\frac{1}{6} \neq \frac{1}{8}$, A et R_1 ne sont pas indépendants.

Enfin, pour A et R_3 :

$$P(A \cap R_3) = 0 \quad \text{et} \quad P(A)P(R_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}.$$

Comme $0 \neq \frac{1}{24}$, A et R_3 ne sont pas indépendants.

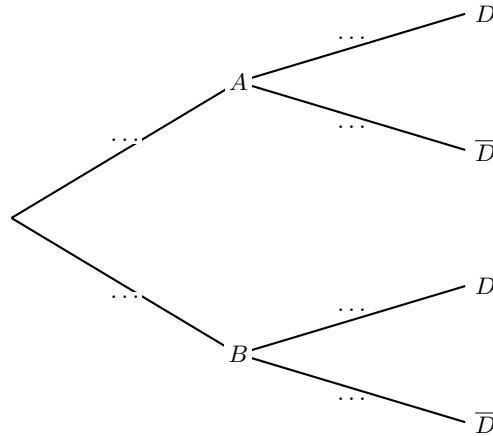
A et R_2 sont indépendants, mais A et R_1 ainsi que A et R_3 ne le sont pas.

Exercice 2 [!] Bilan Contrôle qualité dans deux ateliers

Une entreprise fabrique une pièce dans deux ateliers A et B . On sait que 60 % des pièces proviennent de l'atelier A et que les autres proviennent de l'atelier B . Parmi les pièces fabriquées dans l'atelier A , 4 % sont défectueuses ; parmi celles fabriquées dans l'atelier B , 9 % sont défectueuses.

On choisit une pièce au hasard. On note D l'événement : « la pièce est défectueuse ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré représentant la situation.

**Corrigé**

On a

$$P(A) = 0,60, \quad P(B) = 0,40,$$

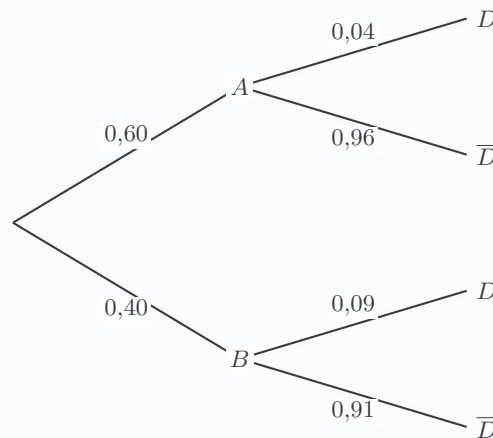
ainsi que

$$P_A(D) = 0,04, \quad P_B(D) = 0,09.$$

Les probabilités des événements contraires sont donc

$$P_A(\overline{D}) = 0,96, \quad P_B(\overline{D}) = 0,91.$$

L'arbre complété est :



2. Calculer $P(A \cap D)$.

**Corrigé**

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(A \cap D) &= P(A) \times P_A(D) \\ &= 0,60 \times 0,04 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A \cap D) = 0,024}$$

3. Montrer que $P(D) = 0,06$.

**Corrigé**

Les événements A et B forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D) \\&= 0,60 \times 0,04 + 0,40 \times 0,09 \\&= 0,024 + 0,036\end{aligned}$$

$$\boxed{P(D) = 0,06}$$

4. Une pièce choisie est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de l'atelier B .

**Corrigé**

On cherche $P_D(B)$. Comme $P(D) = 0,06 \neq 0$:

$$\begin{aligned}P_D(B) &= \frac{P(B \cap D)}{P(D)} \\&= \frac{0,40 \times 0,09}{0,06} \\&= \frac{0,036}{0,06}\end{aligned}$$

$$\boxed{P_D(B) = 0,60}$$

5. Les événements B et D sont-ils indépendants ? Justifier.

**Corrigé**

On a

$$P_B(D) = 0,09 \quad \text{et} \quad P(D) = 0,06.$$

Comme

$$P_B(D) \neq P(D),$$

les événements B et D ne sont pas indépendants.

$$\boxed{B \text{ et } D \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 3, page 4.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

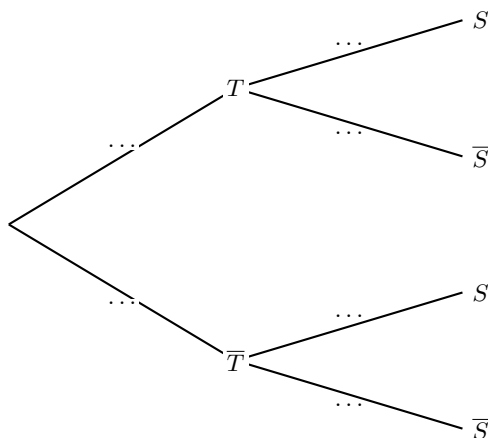
Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 4, page 4.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 3 [+] Consolidation Une enquête de satisfaction

Dans une entreprise, 35 % des salariés travaillent à distance au moins deux jours par semaine. Parmi eux, 72 % se déclarent satisfaits de leur organisation. Parmi les autres salariés, 54 % se déclarent satisfaits.

On note T l'événement : « le salarié travaille à distance au moins deux jours par semaine » et S : « le salarié est satisfait ».

1. Compléter l'arbre pondéré de la situation.

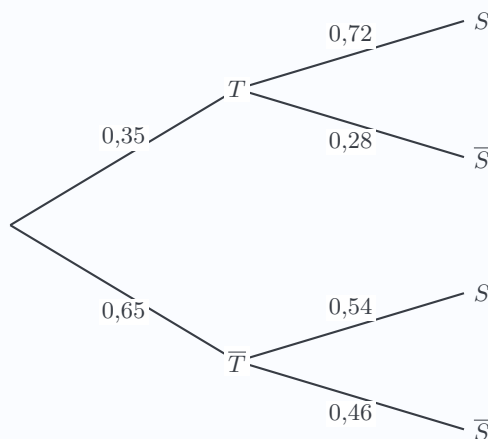


Corrigé

On a

$$\begin{aligned} P(T) &= 0,35, & P(\bar{T}) &= 0,65, \\ P_T(S) &= 0,72, & P_T(\bar{S}) &= 0,28, \\ P_{\bar{T}}(S) &= 0,54, & P_{\bar{T}}(\bar{S}) &= 0,46. \end{aligned}$$

L'arbre complété est :



2. Calculer $P(T \cap S)$ puis $P(S)$.



Corrigé

D'abord :

$$\begin{aligned} P(T \cap S) &= P(T)P_T(S) \\ &= 0,35 \times 0,72 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(T \cap S) = 0,252}$$

Puis, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(T)P_T(S) + P(\bar{T})P_{\bar{T}}(S) \\ &= 0,35 \times 0,72 + 0,65 \times 0,54 \\ &= 0,252 + 0,351 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(S) = 0,603}$$

3. Calculer $P_S(T)$ et interpréter le résultat.



Corrigé

Comme $P(S) = 0,603 \neq 0$:

$$\begin{aligned} P_S(T) &= \frac{P(T \cap S)}{P(S)} \\ &= \frac{0,252}{0,603} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_S(T) \approx 0,418}$$

Parmi les salariés satisfaits, environ 41,8 % travaillent donc à distance au moins deux jours par semaine.

Exercice 4 [*] Approfondissement Retrouver une probabilité inconnue

On considère deux événements A et B tels que

$$P(A) = 0,40, \quad P_A(B) = 0,30,$$

et on sait que

$$P(B) = 0,42.$$

On pose

$$x = P_{\bar{A}}(B).$$

1. Exprimer $P(B)$ en fonction de x à l'aide de la formule des probabilités totales.



Corrigé

Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B) \\ &= 0,40 \times 0,30 + 0,60x \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B) = 0,12 + 0,60x}$$

2. Déterminer x .



Corrigé

Comme $P(B) = 0,42$:

$$\begin{aligned} 0,12 + 0,60x &= 0,42 \\ 0,60x &= 0,30 \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 0,50}$$

Donc

$$\boxed{P_{\bar{A}}(B) = 0,50.}$$

3. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

**Corrigé**

On a

$$P_A(B) = 0,30 \quad \text{et} \quad P(B) = 0,42.$$

Ces deux probabilités étant différentes, A et B ne sont pas indépendants.

A et B ne sont pas indépendants.

Thème II

Schéma de Bernoulli, coefficients binomiaux et loi binomiale



Point Bac – Justifier une loi binomiale

La justification doit tenir en une phrase en faisant apparaître les trois idées essentielles :

On a une répétition de $n = \dots$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « ... » a toujours pour probabilité $p = \dots$) et indépendantes (justification donnée par l'énoncé).

On conclut ensuite en français :

« Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = \dots$ et $p = \dots$ »
puis avec la notation symbolique :

$$X \sim \mathcal{B}(n ; p).$$

Lors d'un prélèvement dans une population ou un stock très important, si l'énoncé précise que le prélèvement peut être **assimilé à un tirage avec remise**, il faut le mentionner explicitement pour justifier le modèle d'épreuves indépendantes.

Exercice 5 **[!] Bilan** Loi $\mathcal{B}(5 ; 0,1)$ et livres primés

Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,1$.

1. Montrer en détaillant les calculs que $P(X = 2) = 0,0729$.



Corrigé

Comme

$$X \sim \mathcal{B}(5 ; 0,1),$$

on a, pour tout $k \in \{0, \dots, 5\}$,

$$P(X = k) = \binom{5}{k} (0,1)^k (0,9)^{5-k}.$$

Pour $k = 2$:

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{5}{2} (0,1)^2 (0,9)^3 \\ &= 10 \times 0,01 \times 0,729 \end{aligned}$$

$$P(X = 2) = 0,0729$$

2. À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau donnant la loi de probabilité de X .

k	0	1	2	3	4	5	Total
$P(X = k)$	0,59049	0,32805	0,0729	0,00810	0,00045	0,00001	1



Corrigé

À la calculatrice, on obtient la loi indiquée dans le tableau. On vérifie que la somme des probabilités vaut 1.

3. En déduire $P(X \geq 3)$, $P(X < 2)$ et $P(X \geq 1)$.

**Corrigé**

À partir du tableau :

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0,00810 + 0,00045 + 0,00001 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \geq 3) = 0,00856}$$

De même :

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= 0,59049 + 0,32805 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X < 2) = 0,91854}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - 0,59049 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \geq 1) = 0,40951}$$

4. Calculer $P(2 \leq X \leq 4)$.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 4) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= 0,0729 + 0,00810 + 0,00045 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(2 \leq X \leq 4) = 0,08145}$$

5. Calculer l'espérance mathématique de X .

**Corrigé**

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(n ; p)$, on a $E(X) = np$. Ainsi :

$$E(X) = 5 \times 0,1$$

$$\boxed{E(X) = 0,5}$$

6. Dans une librairie, 10 % des livres sont primés. Un client achète cinq livres et on suppose les choix indépendants. On note Y le nombre de livres primés achetés.
6. a. Justifier que $Y \sim \mathcal{B}(5 ; 0,1)$.

**Point Bac – Rédaction type à compléter**

On a une répétition de $n = 5$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « le livre est primé » a toujours pour probabilité $p = 0,1$) et indépendantes (l'énoncé précise que les choix sont indépendants). Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,1$.

$$\boxed{Y \sim \mathcal{B}(5 ; 0,1)}.$$

**Corrigé**

On a une répétition de $n = 5$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « le livre est primé » a toujours pour probabilité $p = 0,1$) et indépendantes (l'énoncé précise que les choix sont indépendants).
Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,1$.

$$Y \sim \mathcal{B}(5 ; 0,1).$$

6. b. Calculer la probabilité qu'exactly trois livres soient primés.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} P(Y = 3) &= \binom{5}{3} (0,1)^3 (0,9)^2 \\ &= 10 \times 0,001 \times 0,81 \end{aligned}$$

$$P(Y = 3) = 0,0081$$

6. c. Calculer la probabilité qu'au moins un livre soit primé.

**Corrigé**

L'événement contraire est « aucun livre n'est primé ». Donc :

$$\begin{aligned} P(Y \geq 1) &= 1 - P(Y = 0) \\ &= 1 - (0,9)^5 \end{aligned}$$

$$P(Y \geq 1) = 0,40951$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 6, page 6.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 7, page 6.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 6 **[+] Consolidation** **Même travail avec $\mathcal{B}(6 ; 0,2)$**

Soit $X \sim \mathcal{B}(6 ; 0,2)$.

1. Calculer exactement $P(X = 2)$.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= \binom{6}{2} (0,2)^2 (0,8)^4 \\ &= 15 \times 0,04 \times 0,4096 \end{aligned}$$

$$P(X = 2) = 0,24576$$

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer $P(X \geq 4)$, $P(X < 2)$ et $P(X \geq 1)$.

**Corrigé**

À la calculatrice :

$$P(X \geq 4) = 0,01696$$

$$P(X < 2) = 0,65536$$

$$P(X \geq 1) = 0,737856$$

3. Calculer $P(2 \leq X \leq 5)$ puis $E(X)$.

**Corrigé**

À la calculatrice :

$$P(2 \leq X \leq 5) = 0,344576$$

De plus :

$$E(X) = 6 \times 0,2$$

$$E(X) = 1,2$$

Exercice 7 [*] Approfondissement Huit tirs au but

Un joueur réussit un tir au but avec une probabilité de 0,65. On suppose les tirs indépendants et effectués dans les mêmes conditions. Il effectue huit tirs. On note X le nombre de tirs réussis.

1. Justifier que $X \sim \mathcal{B}(8 ; 0,65)$.

**Corrigé**

On a une répétition de $n = 8$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « le tir est réussi » a toujours pour probabilité $p = 0,65$ car les tirs sont effectués dans les mêmes conditions) et indépendantes (l'énoncé le précise). Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,65$.

$$X \sim \mathcal{B}(8 ; 0,65).$$

2. Calculer $P(X = 6)$ en faisant apparaître le coefficient binomial.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} P(X = 6) &= \binom{8}{6} (0,65)^6 (0,35)^2 \\ &= 28(0,65)^6 (0,35)^2 \end{aligned}$$

$$P(X = 6) \approx 0,2587$$

3. Calculer $P(X \geq 6)$ puis $P(2 \leq X \leq 6)$.

**Corrigé**

À la calculatrice :

$$P(X \geq 6) \approx 0,4278$$

$$P(2 \leq X \leq 6) \approx 0,8273$$

4. Calculer et interpréter $E(X)$.

**Corrigé**

$$E(X) = 8 \times 0,65$$

$$E(X) = 5,2$$

Sur un grand nombre de séries de huit tirs réalisées dans les mêmes conditions, le joueur réussira en moyenne 5,2 tirs par série.

Thème III

Calculatrice : probabilités ponctuelles, cumulées et intervalles



Calculatrice – loi binomiale

On commence toujours par identifier la loi $X \sim \mathcal{B}(n ; p)$ et traduire l'événement demandé.

Calcul	NumWorks	TI-83 Premium CE	Xcas
$P(X = k)$	Probabilités → Binomiale → renseigner n, p → choisir $X = k$	2nde → VARS → DISTR → binomFdp(n, p, k)	binomial(n, k, p)
$P(X \leq k)$	Probabilités → Binomiale → choisir $X \leq k$	2nde → VARS → DISTR → binomFRép(n, p, k)	binomial_cdf(n, p, k)
$P(X \geq k)$	choisir directement $X \geq k$	$1 - \text{binomFRép}(n, p, k-1)$	$1 - \text{binomial_cdf}(n, p, k-1)$
$P(a \leq X \leq b)$	choisir directement $a \leq X \leq b$	$\text{binomFRép}(n, p, b) - \text{binomFRép}(n, p, a-1)$	$\text{binomial_cdf}(n, p, a, b)$

Exercice 8 [!] Bilan Loi $\mathcal{B}(50 ; 0,3)$ et contrôle qualité

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,3$.

1. Déterminer, à 10^{-4} près, $P(X = 25)$, $P(X \leq 22)$ et $P(X > 14)$.



Corrigé

On a

$$X \sim \mathcal{B}(50 ; 0,3).$$

À la calculatrice :

$$P(X = 25) \approx 0,0014$$

$$P(X \leq 22) \approx 0,9877$$

Pour la troisième probabilité :

$$P(X > 14) = 1 - P(X \leq 14)$$

$$P(X > 14) \approx 0,5532$$

2. Déterminer, à 10^{-4} près, $P(10 \leq X \leq 20)$.



Corrigé

$$P(10 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 9)$$

$$P(10 \leq X \leq 20) \approx 0,9120$$

3. Déterminer, à 10^{-4} près, $P(10 < X \leq 20)$.

**Corrigé**

Comme X prend des valeurs entières,

$$10 < X \leq 20 \iff 11 \leq X \leq 20.$$

Ainsi :

$$P(10 < X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 10)$$

$$P(10 < X \leq 20) \approx 0,8734$$

4. Calculer l'espérance mathématique de X .

**Corrigé**

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ &= 50 \times 0,3 \end{aligned}$$

$$E(X) = 15$$

5. Dans une usine, 30 % des pièces produites sont défectueuses. On prélève au hasard 50 pièces dans un stock suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise. On note Y le nombre de pièces défectueuses.

5. a. Justifier que $Y \sim \mathcal{B}(50 ; 0,3)$.

**Point Bac – Rédaction type à compléter**

On a une répétition de $n = 50$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « la pièce est défectueuse » a toujours pour probabilité $p = 0,3$) et indépendantes (le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un **tirage avec remise**).

Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,3$.

$$Y \sim \mathcal{B}(50 ; 0,3).$$

**Corrigé**

On a une répétition de $n = 50$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « la pièce est défectueuse » a toujours pour probabilité $p = 0,3$) et indépendantes (le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement à un **tirage avec remise**).

Ainsi, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,3$.

$$Y \sim \mathcal{B}(50 ; 0,3).$$

5. b. Calculer la probabilité qu'exactly 25 pièces soient défectueuses.

**Corrigé**

$$P(Y = 25) = \binom{50}{25} (0,3)^{25} (0,7)^{25}$$

$$P(Y = 25) \approx 0,0014$$

5. c. Calculer la probabilité qu'au moins 15 pièces soient défectueuses.

**Corrigé**

$$P(Y \geq 15) = 1 - P(Y \leq 14)$$

$$P(Y \geq 15) \approx 0,5532$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 9, page 8.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 10, page 8.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 9 **[+] Consolidation** **S'entraîner avec $\mathcal{B}(40 ; 0,15)$**

Soit $X \sim \mathcal{B}(40 ; 0,15)$.

1. Déterminer, à 10^{-4} près, $P(X = 5)$, $P(X \leq 7)$ et $P(X > 4)$.

**Corrigé**

À la calculatrice :

$$P(X = 5) \approx 0,1692$$

$$P(X \leq 7) \approx 0,7559$$

Enfin :

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4)$$

$$P(X > 4) \approx 0,7367$$

2. Déterminer, à 10^{-4} près, $P(3 \leq X \leq 8)$ puis $P(3 < X \leq 8)$.

**Corrigé**

$$P(3 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 2)$$

$$P(3 \leq X \leq 8) \approx 0,8160$$

Comme X est entière :

$$P(3 < X \leq 8) = P(4 \leq X \leq 8)$$

$$P(3 < X \leq 8) \approx 0,7344$$

3. Calculer $E(X)$.

**Corrigé**

$$E(X) = 40 \times 0,15$$

$$E(X) = 6$$

Exercice 10 [*] **Approfondissement** Trouver un seuil à la calculatrice

Dans un lot de composants électroniques, la probabilité qu'un composant soit défectueux est 0,08. On prélève indépendamment 60 composants et on note X le nombre de composants défectueux.

1. Justifier que $X \sim \mathcal{B}(60 ; 0,08)$.

**Corrigé**

On a une répétition de $n = 60$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « le composant est défectueux » a toujours pour probabilité $p = 0,08$) et indépendantes (l'énoncé précise que les prélèvements sont indépendants). Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,08$.

$$X \sim \mathcal{B}(60 ; 0,08).$$

2. Calculer $P(X = 4)$, $P(X \leq 6)$ et $P(X \geq 8)$ à 10^{-4} près.

**Corrigé**

À la calculatrice :

$$P(X = 4) \approx 0,1873$$

$$P(X \leq 6) \approx 0,7980$$

$$P(X \geq 8) \approx 0,1044$$

3. Déterminer le plus petit entier m tel que $P(X \leq m) \geq 0,95$.

**Corrigé**

On cherche le premier entier m pour lequel la probabilité cumulée atteint au moins 0,95. À la calculatrice :

$$P(X \leq 7) \approx 0,8956 < 0,95$$

et

$$P(X \leq 8) \approx 0,9518 \geq 0,95.$$

Ainsi :

$$m = 8.$$

Thème IV

Espérance, variance, écart-type et problèmes de seuil

Exercice 11 Bilan Un service après-vente

Un service après-vente estime que, pour un appareil vendu, la probabilité d'un retour sous garantie est 0,12. On considère 80 appareils vendus, les retours étant modélisés comme indépendants. On note X le nombre d'appareils retournés sous garantie.

1. Justifier que $X \sim \mathcal{B}(80 ; 0,12)$.



Corrigé

On a une répétition de $n = 80$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « l'appareil est retourné sous garantie » a toujours pour probabilité $p = 0,12$) et indépendantes (les retours sont modélisés comme indépendants). Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 80$ et $p = 0,12$.

$$X \sim \mathcal{B}(80 ; 0,12).$$

2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.



Corrigé

Pour une loi binomiale :

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1 - p), \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Ainsi :

$$E(X) = 80 \times 0,12$$

$$E(X) = 9,6$$

Puis :

$$V(X) = 80 \times 0,12 \times 0,88$$

$$V(X) = 8,448$$

Enfin :

$$\sigma(X) = \sqrt{8,448}$$

$$\sigma(X) \approx 2,91$$

3. Interpréter l'espérance dans le contexte.



Corrigé

Sur un grand nombre de groupes de 80 appareils vendus dans des conditions comparables, le nombre moyen de retours sous garantie est 9,6.

On attend en moyenne 9,6 retours pour 80 appareils vendus.

4. Calculer $P(7 \leq X \leq 13)$ à 10^{-3} près.

**Corrigé**

$$P(7 \leq X \leq 13) = P(X \leq 13) - P(X \leq 6)$$

$$P(7 \leq X \leq 13) \approx 0,765$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 12, page 9.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 13, page 9.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 12 **[+] Consolidation** **Défauts sur une chaîne de production**

Une chaîne produit des objets dont 4 % présentent un défaut. On observe 150 objets, de manière indépendante, et on note X le nombre d'objets défectueux.

1. Donner la loi de X .

**Corrigé**

On a une répétition de $n = 150$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « l'objet est défectueux » a toujours pour probabilité $p = 0,04$) et indépendantes (l'énoncé précise que les objets sont observés de manière indépendante). Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 150$ et $p = 0,04$.

$$X \sim \mathcal{B}(150 ; 0,04).$$

2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

**Corrigé**

$$E(X) = 150 \times 0,04$$

$$E(X) = 6$$

$$V(X) = 150 \times 0,04 \times 0,96$$

$$V(X) = 5,76$$

$$\sigma(X) = \sqrt{5,76}$$

$$\sigma(X) = 2,4$$

3. Calculer $P(3 \leq X \leq 9)$ à 10^{-3} près.

**Corrigé**

$$P(3 \leq X \leq 9) = P(X \leq 9) - P(X \leq 2)$$

$$P(3 \leq X \leq 9) \approx 0,862$$

Exercice 13 [*] **Approfondissement** Retrouver le paramètre puis un seuil

On sait qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(25 ; p)$ et que

$$E(X) = 3.$$

1. Déterminer p .

**Corrigé**

Pour une loi binomiale $\mathcal{B}(25 ; p)$:

$$E(X) = 25p.$$

Comme $E(X) = 3$:

$$25p = 3$$

$$\boxed{p = 0,12}$$

2. En déduire $V(X)$ et $\sigma(X)$.

**Corrigé**

$$V(X) = 25 \times 0,12 \times 0,88$$

$$\boxed{V(X) = 2,64}$$

Puis :

$$\sigma(X) = \sqrt{2,64}$$

$$\boxed{\sigma(X) \approx 1,625}$$

3. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un succès parmi 25 épreuves.

**Corrigé**

L'événement contraire est « aucun succès ». Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - (0,88)^{25} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X \geq 1) \approx 0,9591}$$

4. On répète maintenant l'épreuve un nombre n de fois. Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'obtenir au moins un succès soit supérieure ou égale à 0,995.

**Corrigé**

Pour n épreuves indépendantes :

$$P(\text{au moins un succès}) = 1 - (0,88)^n.$$

On cherche le premier entier n tel que

$$1 - (0,88)^n \geq 0,995.$$

À la calculatrice :

$$1 - (0,88)^{41} \approx 0,9947 < 0,995$$

et

$$1 - (0,88)^{42} \approx 0,9953 \geq 0,995.$$

Ainsi :

$$n = 42.$$

Thème V

Exercices du baccalauréat

Exercice 14 [BAC] D'après Bac 2026 Asie – Probabilités conditionnelles et suites

Source bac : D'après Bac 2026 Asie – Sujet 1, 9 juin 2026 – exercice 1.

Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre.

On modélise la situation de la façon suivante :

- au premier tir, il atteint le centre de la cible avec une probabilité de $\frac{1}{2}$;
- pour les tirs suivants :
 - lorsqu'il a atteint le centre au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne à nouveau le centre est $\frac{4}{5}$;
 - lorsqu'il n'a pas atteint le centre au tir précédent, la probabilité qu'il atteigne le centre est $\frac{1}{3}$.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on considère l'événement

T_n : « le tireur atteint le centre de la cible au n -ième tir ».

On note

$$p_n = P(T_n).$$

1. Donner la valeur de p_1 puis montrer que

$$p_2 = \frac{17}{30}.$$

**Corrigé**

D'après l'énoncé :

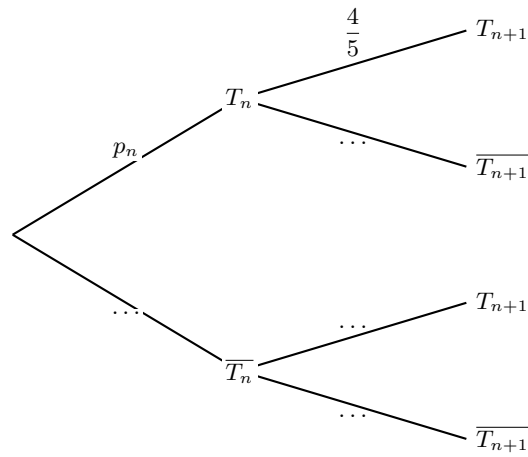
$$p_1 = \frac{1}{2}.$$

Les événements T_1 et $\overline{T_1}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_2 &= P(T_2) \\ &= P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T_1} \cap T_2) \\ &= P(T_1)P_{T_1}(T_2) + P(\overline{T_1})P_{\overline{T_1}}(T_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{12}{30} + \frac{5}{30} \end{aligned}$$

$$p_2 = \frac{17}{30}$$

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.

**Corrigé**

On a :

$$P(T_n) = p_n \quad \text{et} \quad P(\overline{T_n}) = 1 - p_n.$$

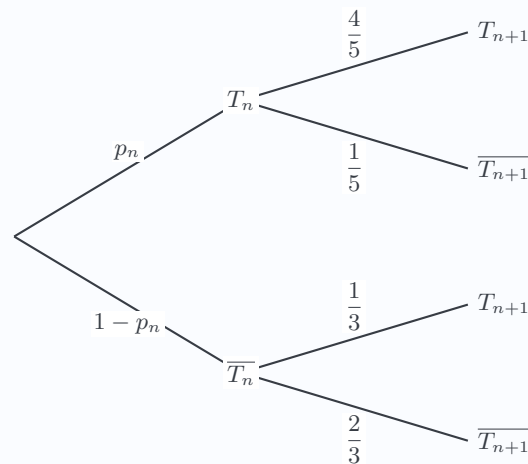
D'après l'énoncé :

$$P_{T_n}(T_{n+1}) = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$

On complète les branches contraires par complément à 1 :

$$P_{T_n}(\overline{T_{n+1}}) = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad P_{\overline{T_n}}(\overline{T_{n+1}}) = \frac{2}{3}.$$

L'arbre complété est donc :



3. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}.$$

**Corrigé**

Soit $n \geq 1$.

Les événements T_n et $\overline{T_n}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
 p_{n+1} &= P(T_{n+1}) \\
 &= P(T_n)P_{T_n}(T_{n+1}) + P(\overline{T_n})P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) \\
 &= p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3} \\
 &= \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_n \\
 &= \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right)p_n + \frac{1}{3} \\
 &= \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}.$$

4. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel $n \geq 1$, par

$$u_n = p_n - \frac{5}{8}.$$

4. a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et préciser sa raison.



Corrigé

Pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{5}{8} \\
 &= \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3} - \frac{5}{8} \\
 &= \frac{7}{15}p_n - \frac{7}{24} \\
 &= \frac{7}{15} \left(p_n - \frac{5}{8}\right)
 \end{aligned}$$

$$u_{n+1} = \frac{7}{15}u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison

$$q = \frac{7}{15}.$$

4. b. Déterminer une expression de u_n en fonction de n .



Corrigé

On a :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= p_1 - \frac{5}{8} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

$$u_1 = -\frac{1}{8}$$

La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_1 = -\frac{1}{8}$ et de raison $\frac{7}{15}$.

Ainsi, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = -\frac{1}{8} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1}.$$

4. c. En déduire une expression de p_n en fonction de n .



Corrigé

Par définition :

$$u_n = p_n - \frac{5}{8},$$

donc

$$p_n = u_n + \frac{5}{8}.$$

Par conséquent, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1}.$$

5. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.



Corrigé

On a :

$$0 < \frac{7}{15} < 1.$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1} = 0.$$

Or :

$$p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1}.$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{5}{8}.$$

Comme

$$\frac{5}{8} = 0,625,$$

à long terme, la probabilité que le tireur atteigne le centre de la cible se stabilise à

$$62,5\%.$$

6. On souhaite déterminer le plus petit entier n tel que

$$p_n \geq 0,6.$$

Compléter la fonction suivante, puis donner la valeur renvoyée par `seuil()`.

```
def seuil():
    n = 1
    p = 0.5
    while p < 0.6:
        n = .....
        p = .....
    return .....
```



Corrigé

La variable p contient successivement les valeurs de p_n .
 Pour passer du rang n au rang $n + 1$, on utilise :

$$p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}.$$

La fonction complétée est donc :

```
def seuil():
    n = 1
    p = 0.5
    while p < 0.6:
        n = n + 1
        p = (7/15)*p + 1/3
    return n
```

Calculons les premières valeurs :

$$\begin{aligned} p_1 &= 0,5, \\ p_2 &= \frac{17}{30} \approx 0,5667, \\ p_3 &\approx 0,5978 < 0,6, \\ p_4 &\approx 0,6123 \geq 0,6. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{seuil}() = 4}.$$

Exercice 15 [BAC] D'après Bac 2013 Enquête sur les rythmes scolaires

Source bac : D'après Bac Pondichéry 2013.

Une enquête a été réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur point de vue sur la durée de la pause du midi ainsi que sur les rythmes scolaires.

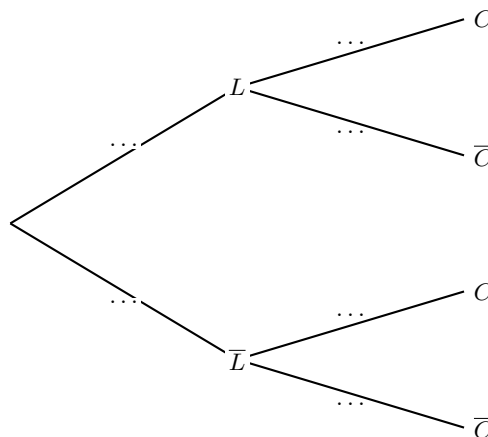
L'enquête révèle que 55 % des élèves sont favorables à une pause plus longue le midi et, parmi ceux qui souhaitent une pause plus longue, 95 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

Parmi ceux qui ne veulent pas de pause plus longue le midi, seulement 10 % sont pour une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.

On choisit un élève au hasard. On note :

- L : « l'élève est favorable à une pause plus longue le midi » ;
- C : « l'élève souhaite une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire ».

1. Compléter l'arbre pondéré décrivant la situation.

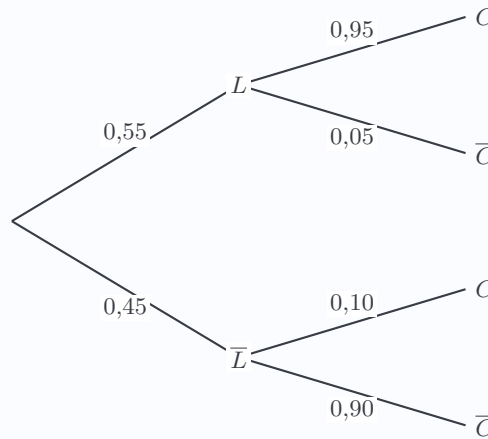


**Corrigé**

On a

$$\begin{aligned} P(L) &= 0,55, & P(\bar{L}) &= 0,45, \\ P_L(C) &= 0,95, & P_L(\bar{C}) &= 0,05, \\ P_{\bar{L}}(C) &= 0,10, & P_{\bar{L}}(\bar{C}) &= 0,90. \end{aligned}$$

L'arbre complété est :



2. Calculer $P(L \cap C)$.

**Corrigé**

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(L \cap C) &= P(L)P_L(C) \\ &= 0,55 \times 0,95 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(L \cap C) = 0,5225}$$

3. Montrer que $P(C) = 0,5675$.

**Corrigé**

Les événements L et $\bar{L}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(L)P_L(C) + P(\bar{L})P_{\bar{L}}(C) \\ &= 0,55 \times 0,95 + 0,45 \times 0,10 \\ &= 0,5225 + 0,045 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(C) = 0,5675}$$

4. On interroge successivement et de façon indépendante quatre élèves pris au hasard parmi les élèves de l'établissement. On note X le nombre d'élèves favorables à une répartition des cours plus étalée sur l'année scolaire.
4. a. Préciser les paramètres de la loi binomiale suivie par X .

**Corrigé**

On a une répétition de $n = 4$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « l'élève est favorable à une répartition des cours plus étalée » a toujours pour probabilité $p = 0,5675$) et indépendantes (l'énoncé précise que les quatre élèves sont interrogés de façon indépendante).

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = 0,5675$.

$$X \sim \mathcal{B}(4 ; 0,5675).$$

4. b. Calculer la probabilité qu'aucun des quatre élèves ne soit favorable. Arrondir à 10^{-4} .



Corrigé

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{4}{0} (0,5675)^0 (0,4325)^4 \\ &= (0,4325)^4 \end{aligned}$$

$$P(X = 0) \approx 0,0350$$

4. c. Calculer la probabilité qu'exactement deux élèves soient favorables.



Corrigé

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} (0,5675)^2 (0,4325)^2$$

$$P(X = 2) \approx 0,3615$$

Exercice 16 [BAC] D'après Bac 2019 Audience d'une émission : retrouver une probabilité inconnue

Source bac : D'après Bac S Antilles-Guyane 2019 – exercice 4, partie A.

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision diffuse d'abord un match, puis une émission consacrée à l'analyse de ce match. On sait que :

- 56 % des téléspectateurs ont regardé le match ;
- parmi les téléspectateurs ayant regardé le match, 25 % ont également regardé l'émission ;
- 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission.

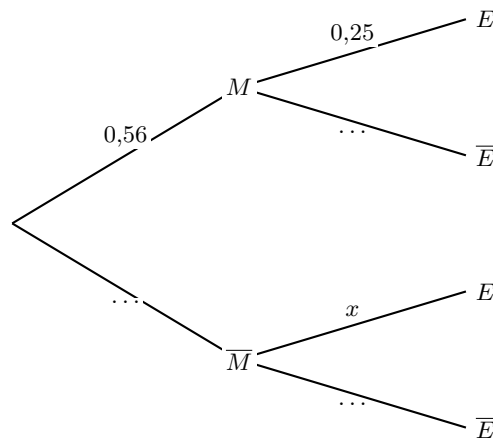
On choisit au hasard un téléspectateur et on note :

- M : « le téléspectateur a regardé le match » ;
- E : « le téléspectateur a regardé l'émission ».

On pose

$$x = P_{\overline{M}}(E).$$

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



Corrigé

On a :

$$P(M) = 0,56, \quad P(\overline{M}) = 1 - 0,56 = 0,44.$$

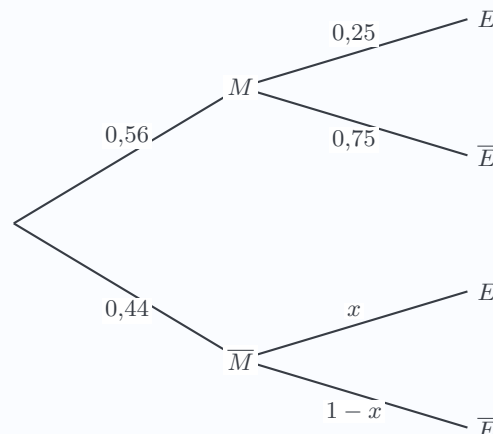
De plus :

$$P_M(E) = 0,25, \quad P_M(\overline{E}) = 1 - 0,25 = 0,75.$$

Enfin, par définition de x :

$$P_{\overline{M}}(E) = x \quad \text{et} \quad P_{\overline{M}}(\overline{E}) = 1 - x.$$

L'arbre complété est donc :



2. Calculer $P(M \cap E)$.

**Corrigé**

D'après la règle du produit le long d'un chemin de l'arbre :

$$\begin{aligned} P(M \cap E) &= P(M) \times P_M(E) \\ &= 0,56 \times 0,25 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(M \cap E) = 0,14}$$

3. 3. a. En utilisant la formule des probabilités totales, exprimer $P(E)$ en fonction de x .

**Corrigé**

Les événements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(M \cap E) + P(\overline{M} \cap E) \\ &= P(M)P_M(E) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(E) \\ &= 0,56 \times 0,25 + 0,44x \end{aligned}$$

$$\boxed{P(E) = 0,14 + 0,44x}$$

3. b. Sachant que $P(E) = 0,162$, déterminer $x = P_{\overline{M}}(E)$.

**Corrigé**

D'après la question précédente :

$$P(E) = 0,14 + 0,44x.$$

Or $P(E) = 0,162$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 0,14 + 0,44x &= 0,162 \\ 0,44x &= 0,022 \\ x &= \frac{0,022}{0,44} \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 0,05}$$

Ainsi :

$$\boxed{P_{\overline{M}}(E) = 0,05.}$$

Parmi les téléspectateurs qui n'ont pas regardé le match, 5 % ont regardé l'émission.

4. Un téléspectateur choisi au hasard n'a pas regardé l'émission. Calculer $P_{\overline{E}}(M)$, à 10^{-3} près.

**Corrigé**

On cherche la probabilité que le téléspectateur ait regardé le match sachant qu'il n'a pas regardé l'émission :

$$P_{\overline{E}}(M) = \frac{P(M \cap \overline{E})}{P(\overline{E})}.$$

D'une part :

$$\begin{aligned} P(M \cap \overline{E}) &= P(M)P_M(\overline{E}) \\ &= 0,56 \times 0,75 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(M \cap \overline{E}) = 0,42}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} P(\overline{E}) &= 1 - P(E) \\ &= 1 - 0,162 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(\overline{E}) = 0,838}$$

Ainsi :

$$P_{\overline{E}}(M) = \frac{0,42}{0,838}$$

$$\boxed{P_{\overline{E}}(M) \approx 0,501}$$

Exercice 17 [BAC] D'après Bac 2026 Amérique du Nord – option hors-ligne

Source bac : D'après Bac 2026 Amérique du Nord – Sujet 1, 20 mai 2026 – exercice 1, partie B.

Une plateforme de diffusion musicale a établi que la probabilité qu'un abonné ait activé l'option « écoute hors-ligne » est 0,4125.

On choisit huit abonnés au hasard et de manière indépendante. On considère qu'il y a suffisamment d'abonnés pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X le nombre d'abonnés ayant activé cette option.

1. On admet que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.



Corrigé

On a une répétition de $n = 8$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « l'abonné a activé l'option écoute hors-ligne » a toujours pour probabilité $p = 0,4125$) et indépendantes (le nombre d'abonnés est suffisamment grand pour assimiler le choix à un **tirage avec remise**, et l'énoncé précise que les choix sont indépendants). Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,4125$.

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(8 ; 0,4125)}.$$

2. Calculer la probabilité qu'aucun de ces huit abonnés n'ait activé l'option. Arrondir au millième.



Corrigé

L'événement demandé est $\{X = 0\}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{8}{0} (0,4125)^0 (0,5875)^8 \\ &= (0,5875)^8 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(X = 0) \approx 0,014}$$

3. Pour tout entier naturel non nul n , on choisit maintenant n abonnés de manière indépendante. On note q_n la probabilité qu'au moins un abonné ait activé l'option.

3. a. Démontrer que

$$q_n = 1 - 0,5875^n.$$



Corrigé

L'événement « au moins un abonné a activé l'option » est le contraire de « aucun abonné n'a activé l'option ». Pour un abonné :

$$P(\text{option non activée}) = 1 - 0,4125 = 0,5875.$$

Les choix étant indépendants :

$$P(\text{aucune activation parmi } n) = 0,5875^n.$$

Ainsi :

$$q_n = 1 - 0,5875^n$$

$$\boxed{q_n = 1 - 0,5875^n}$$

3. b. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $q_n \geq 0,999$.



Corrigé

On cherche le premier entier naturel n tel que

$$1 - 0,5875^n \geq 0,999.$$

À la calculatrice :

$$q_{12} = 1 - 0,5875^{12} \approx 0,998309 < 0,999$$

et

$$q_{13} = 1 - 0,5875^{13} \approx 0,999007 \geq 0,999.$$

Par conséquent :

$$\boxed{n = 13.}$$

Exercice 18 [BAC] D'après Bac 2026 Asie – lancers-francs au basketball

Source bac : D'après Bac 2026 Asie – Sujet 2, 10 juin 2026 – exercice 2.

On pourra traiter indépendamment les deux parties de l'exercice. On arrondira, si nécessaire, les résultats à 10^{-3} près. Dans cet exercice, on s'intéresse aux lancers-francs effectués par un joueur lors de compétitions de basketball. On considère que les conditions des lancers sont identiques et que les lancers sont indépendants deux à deux.

Partie A

Les statistiques de réussite du joueur sont de 49,2 %. Au cours d'un match, il tente 16 lancers-francs. On note X le nombre de lancers-francs réussis.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.



Corrigé

On a une répétition de $n = 16$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « le lancer-franc est réussi » a toujours pour probabilité $p = 0,492$ car les conditions des lancers sont identiques) et indépendantes (l'énoncé précise que les lancers sont indépendants deux à deux).

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 16$ et $p = 0,492$.

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(16 ; 0,492).}$$

2. Déterminer $E(X)$ et l'interpréter.



Corrigé

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ &= 16 \times 0,492 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = 7,872}$$

Sur un grand nombre de matchs comparables dans lesquels le joueur effectue 16 lancers-francs, il en réussira en moyenne 7,872, soit environ 8.

3. Calculer $P(X = 5)$.



Corrigé

$$P(X = 5) = \binom{16}{5} (0,492)^5 (0,508)^{11}$$

$$P(X = 5) \approx 0,073$$

4. Calculer la probabilité que le joueur réussisse au moins six lancers-francs.



Corrigé

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5)$$

$$P(X \geq 6) \approx 0,883$$

Partie B

On note p la probabilité que le joueur réussisse un lancer-franc, avec $p \in [0 ; 1]$. Il effectue maintenant trois lancers-francs. On note Y le nombre de lancers réussis.

1. Déterminer les valeurs prises par Y .



Corrigé

La variable Y compte le nombre de succès parmi trois lancers. Ainsi :

$$Y(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}.$$

2. Exprimer $P(Y = 2)$ en fonction de p .



Corrigé

Comme $Y \sim \mathcal{B}(3 ; p)$:

$$P(Y = 2) = \binom{3}{2} p^2 (1 - p)$$

$$P(Y = 2) = 3p^2(1 - p)$$

3. Donner la loi de probabilité de Y sous forme de tableau.



Corrigé

Pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$P(Y = k) = \binom{3}{k} p^k (1 - p)^{3-k}.$$

Ainsi :

k	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$(1 - p)^3$	$3p(1 - p)^2$	$3p^2(1 - p)$	p^3

4. Montrer que

$$P(Y \geq 2) = -2p^3 + 3p^2.$$



Corrigé

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= P(Y = 2) + P(Y = 3) \\ &= 3p^2(1 - p) + p^3 \\ &= 3p^2 - 3p^3 + p^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(Y \geq 2) = -2p^3 + 3p^2}$$

5. On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2.$$

5. a. Étudier le sens de variation de f sur $[0 ; 1]$.



Corrigé

La fonction f est dérivable sur $[0 ; 1]$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= -6x^2 + 6x \\ &= 6x(1 - x). \end{aligned}$$

Pour $x \in [0 ; 1]$, on a $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$. Donc

$$f'(x) \geq 0.$$

Ainsi, f est croissante sur $[0 ; 1]$. De plus

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(1) = 1.$$

$$\boxed{f \text{ est croissante de } 0 \text{ à } 1 \text{ sur } [0 ; 1].}$$

5. b. En déduire l'existence d'une unique valeur $\alpha \in [0 ; 1]$ telle que $f(\alpha) = 0,9$.



Corrigé

La fonction f est polynomiale, donc continue sur $[0 ; 1]$. Elle est strictement croissante sur $]0 ; 1[$, et

$$f(0) = 0 < 0,9 < 1 = f(1).$$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation

$$f(x) = 0,9$$

admet une unique solution α dans $[0 ; 1]$.

$$\boxed{\exists! \alpha \in [0 ; 1] \text{ tel que } f(\alpha) = 0,9.}$$

5. c. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

**Corrigé**

À la calculatrice :

$$f(0,80) = 0,896 < 0,9$$

et

$$f(0,81) = 0,905418 > 0,9.$$

Comme f est strictement croissante :

$$0,80 < \alpha < 0,81.$$

L'amplitude de cet encadrement vaut $0,01 = 10^{-2}$.

5. d. Interpréter α dans le contexte.

**Corrigé**

On a montré que

$$P(Y \geq 2) = f(p).$$

La relation $f(\alpha) = 0,9$ signifie donc que, lorsque la probabilité de réussite d'un lancer-franc vaut α , la probabilité de réussir au moins deux lancers sur trois vaut 0,9.

Comme $0,80 < \alpha < 0,81$, ce seuil est d'environ 80,5 %.

Exercice 19 [BAC] D'après Bac 2026 Centres étrangers – contrôle de lames d'escrime

Source bac : D'après Bac 2026 Centres étrangers – Sujet 1, exercice 1.

La fédération internationale d'escrime établit des normes de fabrication sur les lames des armes des tireurs afin de garantir au maximum leur sécurité.

Pour tester la conformité de l'acier employé, la lame est pliée puis redressée toutes les secondes jusqu'à la rupture. La lame est conforme si la rupture intervient après plus de cinq heures de test.

Un équipementier d'escrime se fournit auprès de trois fabricants de lames. Son stock est composé de 60 % de lames du fournisseur A , de 12 % de lames du fournisseur B , le reste venant du fournisseur C .

Une étude qualité a montré que :

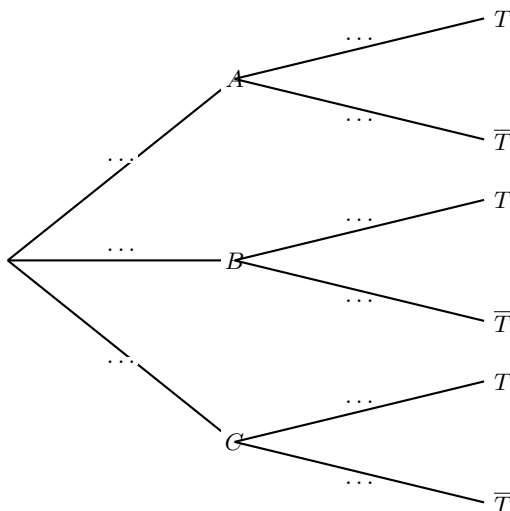
- 90 % des lames du fournisseur A sont conformes ;
- 95 % des lames du fournisseur B sont conformes ;
- 85 % des lames du fournisseur C sont conformes.

Partie A

On considère les événements :

- A : « la lame testée provient du fournisseur A » ;
- B : « la lame testée provient du fournisseur B » ;
- C : « la lame testée provient du fournisseur C » ;
- T : « la lame testée est conforme ».

1. Compléter l'arbre pondéré représentant la situation.



Corrigé

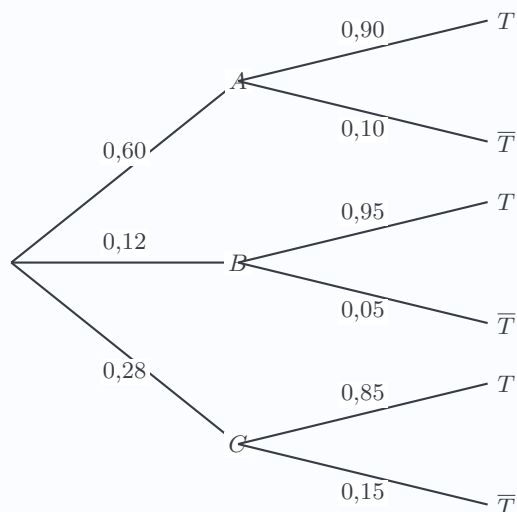
On a :

$$P(A) = 0,60, \quad P(B) = 0,12, \quad P(C) = 1 - 0,60 - 0,12 = 0,28.$$

De plus :

$$P_A(T) = 0,90, \quad P_B(T) = 0,95, \quad P_C(T) = 0,85.$$

Les probabilités des événements contraires sont donc respectivement 0,10, 0,05 et 0,15.



2. Déterminer $P(A \cap \bar{T})$ et interpréter le résultat.



Corrigé

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{T}) &= P(A)P_A(\bar{T}) \\ &= 0,60 \times 0,10 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A \cap \bar{T}) = 0,06}$$

Ainsi, 6 % des lames du stock proviennent du fournisseur A et ne sont pas conformes.

3. Démontrer que la probabilité que la lame testée soit conforme vaut 0,892.



Corrigé

Les événements A, B et C forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(A)P_A(T) + P(B)P_B(T) + P(C)P_C(T) \\ &= 0,60 \times 0,90 + 0,12 \times 0,95 + 0,28 \times 0,85 \\ &= 0,540 + 0,114 + 0,238 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(T) = 0,892}$$

4. Sachant que la lame testée n'est pas conforme, déterminer la probabilité qu'elle provienne du fournisseur B. Arrondir au millième.



Corrigé

On cherche $P_{\bar{T}}(B)$. D'abord :

$$\begin{aligned} P(\bar{T}) &= 1 - P(T) \\ &= 1 - 0,892 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(\bar{T}) = 0,108}$$

De plus :

$$\begin{aligned} P(B \cap \bar{T}) &= P(B)P_B(\bar{T}) \\ &= 0,12 \times 0,05 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(B \cap \bar{T}) = 0,006}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P_{\bar{T}}(B) &= \frac{P(B \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} \\ &= \frac{0,006}{0,108} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{\bar{T}}(B) \approx 0,056}$$

Partie B

D'après la partie A, la probabilité qu'une lame de l'équipementier ne soit pas conforme vaut 0,108.

Lors d'une compétition, l'équipementier apporte un échantillon de 75 lames choisies au hasard et de manière indépendante. Le stock est suffisamment grand pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

On note X le nombre de lames non conformes dans cet échantillon.

1. Préciser les paramètres de la loi binomiale suivie par X .



Corrigé

On a une répétition de $n = 75$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « la lame est non conforme » a toujours pour probabilité $p = 0,108$) et indépendantes (le stock est suffisamment grand pour assimiler le choix à un **tirage avec remise**, et l'énoncé précise que les choix sont indépendants). Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 75$ et $p = 0,108$.

$$\boxed{X \sim \mathcal{B}(75 ; 0,108)}.$$

2. Calculer la probabilité que exactement 6 lames soient non conformes. Arrondir au millième.



Corrigé

Comme $X \sim \mathcal{B}(75 ; 0,108)$:

$$P(X = 6) = \binom{75}{6} (0,108)^6 (0,892)^{69}$$

$$\boxed{P(X = 6) \approx 0,120}$$

3. L'équipementier affirme que la probabilité qu'il y ait strictement plus de 8 lames non conformes est inférieure à 50 %. A-t-il raison ?



Corrigé

Comme X prend des valeurs entières :

$$P(X > 8) = 1 - P(X \leq 8)$$

$$\boxed{P(X > 8) \approx 0,422}$$

Or :

$$0,422 < 0,5.$$

Donc l'affirmation de l'équipementier est correcte.

Exercice 20 [BAC] D'après Bac 2025 Asie – test de dépistage et loi binomiale

Source bac : D'après Bac 2025 Asie – Sujet 2, exercice 1.

Toutes les probabilités, sauf indication contraire, seront arrondies à 10^{-3} .

Un test a été mis au point pour le dépistage du virus du chikungunya. Le laboratoire fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'un individu atteint par le virus ait un test positif est 0,999 ;
- la probabilité qu'un individu non atteint par le virus ait un test positif est 0,005.

On note :

- M : « l'individu choisi est atteint du chikungunya » ;
- T : « le test de l'individu choisi est positif ».

On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus est supérieure à 0,95.

Partie A

Fin 2005, on admet que 270 000 personnes ont été infectées sur une population totale de 750 000 individus sur l'île de La Réunion.

1. Donner $P_M(T)$ et $P_{\bar{M}}(T)$.



Corrigé

D'après l'énoncé :

$$P_M(T) = 0,999 \quad \text{et} \quad P_{\bar{M}}(T) = 0,005.$$

2. Donner la valeur exacte de $P(M)$.

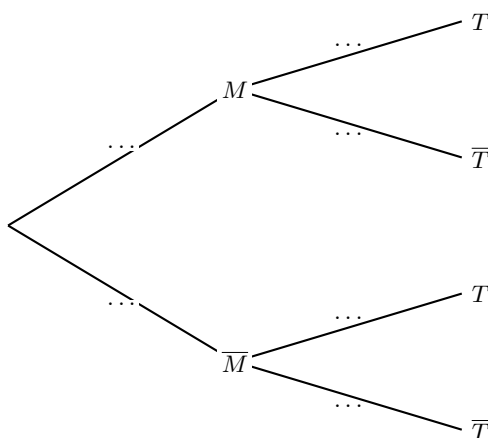


Corrigé

$$P(M) = \frac{270\,000}{750\,000}$$

$$P(M) = 0,36$$

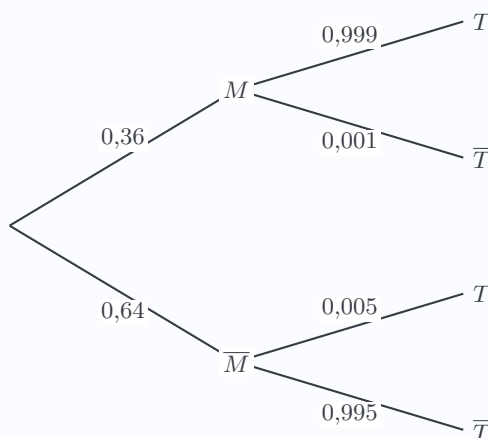
3. Compléter l'arbre pondéré représentant la situation.



**Corrigé**

On a $P(M) = 0,36$ et $P(\overline{M}) = 0,64$. De plus :

$$P_M(T) = 0,999, \quad P_M(\overline{T}) = 0,001, \quad P_{\overline{M}}(T) = 0,005, \quad P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,995.$$



4. Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par le virus et ait un test positif.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} P(M \cap T) &= P(M)P_M(T) \\ &= 0,36 \times 0,999 \\ &= 0,35964 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(M \cap T) \approx 0,360}$$

5. Calculer la probabilité qu'un individu ait un test positif.

**Corrigé**

Les événements M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M)P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T) \\ &= 0,36 \times 0,999 + 0,64 \times 0,005 \\ &= 0,36284 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(T) \approx 0,363}$$

6. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit atteint par le virus.

**Corrigé**

On cherche $P_T(M)$:

$$\begin{aligned} P_T(M) &= \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,35964}{0,36284} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_T(M) \approx 0,991}$$

7. Peut-on estimer que ce test est fiable ? Argumenter.



Corrigé

On a :

$$P_T(M) \approx 0,991 > 0,95.$$

Ainsi :

le test peut être considéré comme fiable dans cette population cible.

Partie B

Pendant l'épidémie, on admet que la probabilité d'être atteint du chikungunya sur l'île de La Réunion vaut 0,36.

On considère un échantillon de n individus choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X le nombre d'individus infectés dans l'échantillon. On admet que

$$X \sim \mathcal{B}(n ; 0,36).$$

Déterminer à partir de combien d'individus n la probabilité de l'événement « au moins un des n individus est atteint par le virus » est supérieure à 0,99. Expliquer la démarche.



Corrigé

On cherche le plus petit entier n tel que

$$P(X \geq 1) > 0,99.$$

L'événement contraire de $X \geq 1$ est $X = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) > 0,99 &\iff 1 - P(X = 0) > 0,99 \\ &\iff 1 - (1 - 0,36)^n > 0,99 \\ &\iff 0,64^n < 0,01. \end{aligned}$$

On teste deux entiers consécutifs :

$$0,64^{10} \approx 0,0115 > 0,01$$

et

$$0,64^{11} \approx 0,0074 < 0,01.$$

Ainsi, le premier entier qui convient est :

$$n = 11.$$

Il faut donc choisir au moins 11 individus.

Thème VI

Now We Can Talk – Pour aller plus loin

Exercice 21 ★★ La planche de Galton et le triangle de Pascal

Une bille tombe dans une planche de Galton comportant huit rangées de clous. À chaque clou, elle part vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$ et vers la gauche avec la probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment des choix précédents.

On note X le nombre de déplacements vers la droite au cours des huit rangées.

1. Justifier que $X \sim \mathcal{B}\left(8; \frac{1}{2}\right)$.

**Corrigé**

On a une répétition de $n = 8$ épreuves de Bernoulli, identiques (le succès « la bille part vers la droite » a toujours pour probabilité $p = \frac{1}{2}$) et indépendantes (l'énoncé précise que les choix successifs sont indépendants).

Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = \frac{1}{2}$.

$$X \sim \mathcal{B}\left(8; \frac{1}{2}\right).$$

2. Montrer que la probabilité d'arriver dans la case centrale, correspondant à quatre déplacements vers la droite, vaut

$$\frac{70}{256}.$$

**Corrigé**

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \binom{8}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= 70 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \end{aligned}$$

$$P(X = 4) = \frac{70}{256}$$

3. Calculer la probabilité d'arriver dans l'une des trois cases centrales, c'est-à-dire lorsque $3 \leq X \leq 5$.

**Corrigé**

Comme $p = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 5) &= \frac{\binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5}}{2^8} \\ &= \frac{56 + 70 + 56}{256} \\ &= \frac{182}{256} \end{aligned}$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = \frac{91}{128} \approx 0,711$$

4. Expliquer le lien entre les nombres de billes attendues dans les différentes cases et la ligne $n = 8$ du triangle de Pascal.

**Corrigé**

Pour une case correspondant à k déplacements vers la droite, il existe exactement

$$\binom{8}{k}$$

chemins possibles. Comme tous les chemins ont la même probabilité 2^{-8} , les probabilités des neuf cases sont proportionnelles aux coefficients

$$1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1,$$

qui constituent précisément la ligne $n = 8$ du triangle de Pascal.