

TD – EXERCICES

TD 4

Géométrie dans l'espace – Partie 1

Version sujet – Version imprimable

Sommaire du TD

I	Positions relatives dans l'espace	2
II	Parallélisme	4
III	Vecteurs de l'espace	5
IV	Caractérisations vectorielles	6
V	Bases et repères de l'espace	7
VI	Représentations paramétriques de droites	8
VII	Intersections analytiques	9
VIII	Bilan : en route vers le bac	10
IX	Synthèse du chapitre	13
X	Approfondissement – Hors programme	15

Objectifs

- Reprendre les positions relatives dans l'espace et les sections de solides.
- Utiliser le parallélisme, le théorème du toit et les caractérisations vectorielles.
- Travailler le calcul vectoriel, les bases et les repères de l'espace.
- Déterminer et exploiter des représentations paramétriques de droites, puis étudier des intersections de droites et droite-plan.

Thème I

Positions relatives dans l'espace



Vocabulaire – position relative.

Déterminer la position relative de deux objets de l'espace signifie préciser exactement leur configuration géométrique :

- pour deux droites : elles sont **confondues**, **strictement parallèles**, **sécantes** ou **non coplanaires** ;
- pour une droite et un plan : la droite est **contenue dans le plan**, **strictement parallèle au plan** ou **sécante au plan** ;
- pour deux plans : ils sont **confondus**, **strictement parallèles** ou **sécants** suivant une droite.

Dans tous les cas, la réponse doit être **justifiée**.

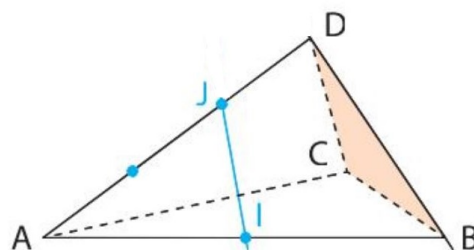
Exercice 1 Intersection d'une droite et d'un plan

ABCD est un tétraèdre.

Le point I est le milieu du segment [AB] et J est le point de l'arête [AD] tel que

$$AJ = \frac{2}{3} AD.$$

Déterminer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).

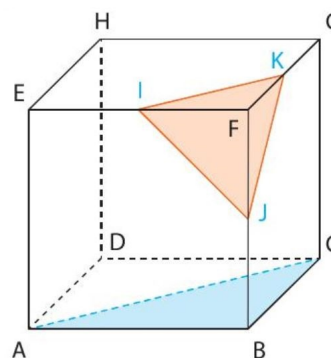


Exercice 2 Intersection de deux plans

ABCDEFGH est un cube.

Les points I, J, K sont les milieux des arêtes [EF], [FB] et [FG].

Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC).



Exercice 3 Intersection et section d'un pavé droit

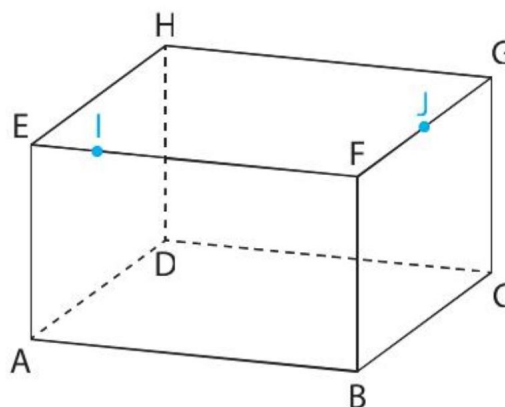
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

I est le point de [EF] tel que $EI = \frac{1}{5}EF$, et J est le milieu de [FG].

1. Déterminer et tracer l'intersection des plans (AIJ) et (ABC).

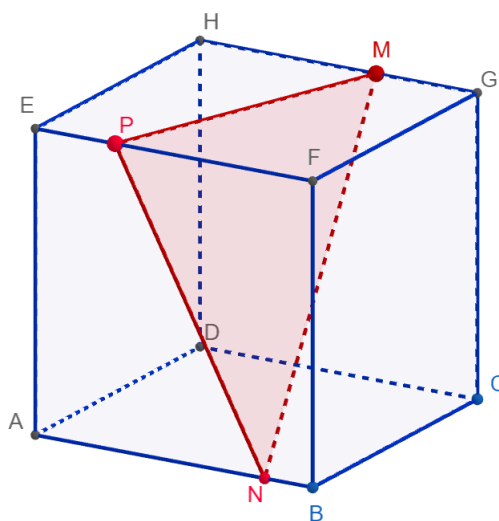
2. Déterminer et tracer la section du parallélépipède rectangle par le plan (AIJ).

Quelle est la nature du polygone obtenu ?



Exercice 4 Construire une section de cube

Construire l'intersection du plan (MNP) avec le cube ABCDEFGH.

**Preuve**

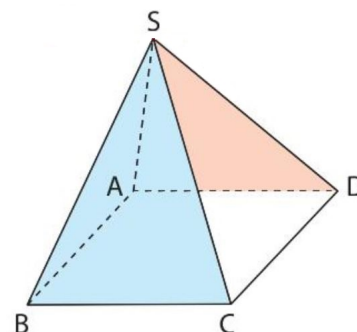
- Le corrigé en vidéo : <https://youtu.be/7qtNSRzLf6Y>.
- Une animation de la section sur Geogebra-3D : animation

Thème II

Parallélisme

Exercice 5 Avec le théorème du toit

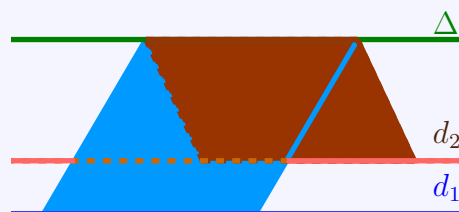
SABCD est une pyramide de base le carré ABCD.
Déterminer l'intersection des plans (SBC) et (SAD).



Exercice 6 Démonstration du théorème du toit

Théorème 1 (Théorème du toit (1))

Soit (d_1) et (d_2) deux droites parallèles. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant respectivement (d_1) et (d_2) se coupent en (Δ) qui est parallèle aux droites (d_1) et (d_2) .



On considère donc (d_1) et (d_2) deux droites parallèles. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant respectivement (d_1) et (d_2) se coupent en une droite (Δ) .

On cherche à montrer que la droite (Δ) est parallèle aux droites (d_1) et (d_2) .

1. Soit $\vec{u}$, un vecteur directeur (non nul) de la droite (d_1) .

Montrer que $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (d_2) et un vecteur des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

2. Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur (non nul) de la droite (Δ) .

En raisonnant par l'absurde, montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3. Conclure.

Exercice 7 Plans parallèles coupés par un troisième plan

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles. Un troisième plan $\mathcal{Q}$ coupe $\mathcal{P}$ suivant une droite (d) et coupe $\mathcal{P}'$ suivant une droite (d') .

1. Faire une figure schématisant.
2. Démontrer que les droites (d) et (d') sont parallèles.
3. Dans un cube ABCDEFGH, citer deux plans parallèles et un plan qui les coupe. Identifier les deux droites d'intersection obtenues.

Exercice 8 Critères de parallélisme dans un cube

On considère un cube ABCDEFGH.

1. Justifier que la droite (AB) est parallèle au plan (EFG) .
2. Montrer que les plans (ABF) et (DCG) sont parallèles.

Thème III

Vecteurs de l'espace

Exercice 9 Vecteurs colinéaires et points alignés

Dans l'espace muni d'un repère, on considère les points

$$A(1 ; -2 ; 3), \quad B(4 ; 0 ; -1), \quad C(10 ; 4 ; -9).$$

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.
3. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Exercice 10 Vecteurs coplanaires

On considère quatre vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ tels que

$$\vec{t} = 2\vec{u} - 3\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires.
3. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ peuvent-ils former une base de l'espace ? Justifier.

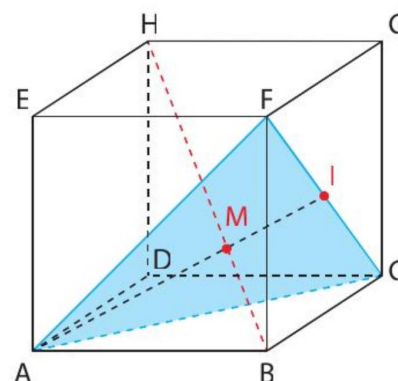
Exercice 11 Problème d'alignement dans un cube

ABCDEFGH est un cube et I est le milieu du segment [FC].
Le point M est défini par

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

Montrer que les points M, B et H sont alignés.

1. En se plaçant dans un repère bien choisi.
2. Avec une démonstration vectorielle.



Thème IV

Caractérisations vectorielles

Exercice 12 Caractérisation vectorielle d'une droite

On considère deux points distincts A et B de l'espace.

1. Rappeler une caractérisation vectorielle de la droite (AB).

2. On considère un point M tel que

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}.$$

Que peut-on conclure sur le point M ?

3. On considère un point N tel que

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$

où C est un point n'appartenant pas à la droite (AB). Le point N appartient-il nécessairement à la droite (AB) ?

Exercice 13 Caractérisation vectorielle d'un plan

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.

1. Rappeler une caractérisation vectorielle du plan (ABC).

2. Soit M un point tel que

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

Démontrer que M appartient au plan (ABC).

3. Soit N un point tel que

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \vec{u},$$

où $\vec{u}$ n'est pas coplanaire avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Le point N appartient-il au plan (ABC) ?

Exercice 14 Coplanarité de quatre points

Dans un repère de l'espace, on considère les points

$$A(0 ; 1 ; -1), \quad B(2 ; 0 ; 1), \quad C(1 ; 3 ; 0), \quad D(5 ; 1 ; 4).$$

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

2. Chercher s'il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

3. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

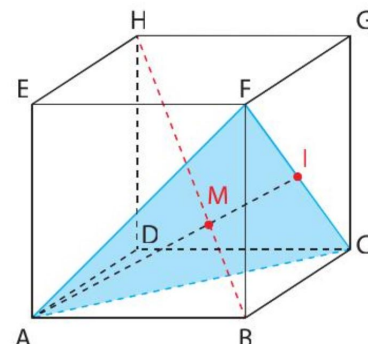
Thème V

Bases et repères de l'espace

Exercice 15 Coordonnées dans un cube

ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère $(A ; B ; D ; E)$.

1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.
2. I est le milieu de $[FC]$. Donner les coordonnées de I.
3. M est défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Donner les coordonnées de M.
4. Vérifier que les points B, M et H sont alignés.



Exercice 16 Décomposer un vecteur dans une base

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les vecteurs

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{w} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}.$$

1. Donner les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cette base.
2. Calculer les coordonnées de $2\vec{u} - \vec{v}$.
3. Déterminer si $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 17 Coordonnées d'un point défini vectoriellement

Dans un repère de l'espace, on donne

$$A(2 ; -1 ; 3), \quad B(-1 ; 5 ; 0), \quad C(4 ; 1 ; -2).$$

Le point M est défini par

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}.$$

Déterminer les coordonnées de M.

Thème VI

Représentations paramétriques de droites

Exercice 18 Déterminer une représentation paramétrique

Dans un repère de l'espace, on donne les points $A(-2 ; 3 ; 1)$ et $B(5 ; 2 ; -2)$.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- Les points $M(-9 ; 4 ; 4)$ et $N(12 ; 1 ; 1)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 19 Positions relatives de droites paramétrées

Dans chaque cas, déterminer la position relative des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire préciser si elles sont confondues, strictement parallèles, sécantes ou non coplanaires, en justifiant la réponse.

- | | |
|--|---|
| <p>1.</p> <p>1. a. $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$</p> <p>1. b. $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 9 + 15s \\ y = -5 - 3s \\ z = -8 - 12s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$</p> <p>2.</p> <p>2. a. $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4t \\ z = 1 + 12t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$</p> <p>2. b. $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 5 + 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$</p> | <p>3.</p> <p>3. a. $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$</p> <p>3. b. $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2 - 2s \\ z = 5 + 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$</p> <p>4.</p> <p>4. a. $\mathcal{D} : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$</p> <p>4. b. $\mathcal{D}' : \begin{cases} x = s \\ y = 1 + s \\ z = -1 - 4s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$</p> |
|--|---|

Exercice 20 Trouver une droite parallèle à une droite donnée

On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(0 ; 2 ; -1)$ et parallèle à $\mathcal{D}$.
- Le point $B(4 ; 4 ; -11)$ appartient-il à $\mathcal{D}'$?

Thème VII

Intersections analytiques

Exercice 21 Intersection de deux droites

Dans un repère de l'espace, on considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ définies par

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 6 - s \\ y = -1 + 2s \\ z = 4 - 3s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

1. Donner un vecteur directeur de chacune des droites et montrer qu'elles ne sont pas parallèles.
2. On cherche un éventuel point commun aux deux droites. Écrire le système vérifié par les paramètres t et s , puis résoudre les deux premières équations.
3. Vérifier la troisième équation. En déduire la position relative des deux droites (ici : sécantes ou non coplanaires puisqu'elles ne sont pas parallèles) et, le cas échéant, les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercice 22 Intersection d'une droite et d'un plan

Dans un repère de l'espace, on considère les points

$$A(1 ; 0 ; 0), \quad B(2 ; 1 ; 0), \quad C(0 ; 1 ; 1),$$

et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés. On pourra calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Soit M un point de la droite $\mathcal{D}$ associé au paramètre t . Donner les coordonnées de M , puis celles du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
3. Traduire la condition $M \in (ABC)$ à l'aide de la caractérisation vectorielle d'un plan, puis déterminer la valeur de t pour laquelle M appartient au plan (ABC) .
4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection P de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC) , puis conclure en écrivant l'intersection sous forme ensembliste.

Thème VIII

Bilan : en route vers le bac

Exercice 23 Bac 2026 – Droite sécante à un plan et intersection de plans

Source bac : Bac 2026 Asie Sujet 1, exercice 3 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2026.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points suivants :

$$A(0; 0; 1), \quad B(1; 2; 3), \quad C(3; 3; 1), \quad E(2; -2; 2), \quad F(3; 0; 4) \quad \text{et} \quad G(5; 1; 2).$$

- Montrer que les points B , C et E ne sont pas alignés.
- Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.
 - En déduire que la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.
- Pour la suite de l'exercice, on appellera P le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BCE) .
 - Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (AG) est :

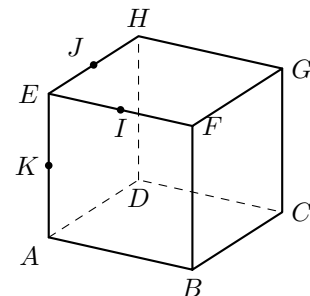
$$\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- En déduire les coordonnées du point P .
 - Montrer que le point P est le milieu du segment $[EC]$.
- Déterminer l'intersection des plans (BCE) et (ACG) .

Exercice 24 Bac 2026 – Cube, coordonnées et droites coplanaires

Source bac : Bac 2026 Centres étrangers Sujet 1, exercice 3 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2026.

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.
 Les points I , J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[EF]$, $[EH]$ et $[AE]$.
 On munit l'espace du repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



- Donner les coordonnées des points I , J et K .
- Soit M un point de la droite (FG) .
 On admet que les coordonnées de M sont $(1; m; 1)$ avec m appartenant à $\mathbb{R}$.
 - Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IM) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

- Peut-on affirmer que les droites (IM) et (KC) sont coplanaires quelle que soit la valeur de m ?

Exercice 25 Bac 2025 – Vrai/Faux sur les représentations paramétriques

Source bac : Bac 2025 Métropole Sujet 1, exercice 3 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2025.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1 ; 0 ; 5)$ et $B(3 ; 2 ; -1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R};$$

- la droite d' de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

Exercice 26 Bac 2026 – Deux droites sont-elles sécantes ?

Source bac : Bac 2026 Métropole Sujet 1, exercice 2 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2026.

Pour l'affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1,5 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R};$$

- les points $A(3 ; 0 ; 2)$ et $B(2 ; 1 ; -3)$.

Affirmation : Les droites (d) et (AB) sont sécantes.

Exercice 27 Bac 2025 – Droites sécantes et points non coplanaires

Source bac : Bac 2025 Métropole Sujet 2, exercice 2 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2025.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- les points $A(-1 ; 2 ; 1)$, $B(1 ; -1 ; 2)$ et $C(1 ; 1 ; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d' : \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - 2s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

- Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S\left(-\frac{1}{2} ; 1 ; 4\right)$.
- Démontrer que les points A , B , C et S ne sont pas coplanaires.

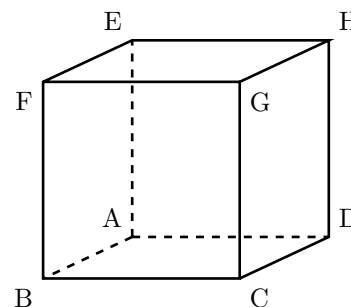
Exercice 28 Bac 2025 – Deux droites dans un cube

Source bac : Bac 2025 Asie Septembre, exercice 2 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2025.

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté une unité.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On note I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[BG]$.



1. Donner sans justification les coordonnées des points A , B , G , I et J .
2.
 2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AJ) .
 2. b. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IG) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. c. Démontrer que les droites (AJ) et (IG) sont sécantes en un point S de coordonnées $S\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.

Exercice 29 Bac 2025 – Coplanarité de quatre points

Source bac : Bac 2025 Amérique du Sud Jour 2, exercice 1 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2025.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. L'espace est rapporté à un repère orthonormé. On considère les points :

$$A(3 ; 2 ; 1), \quad B(7 ; 3 ; 1), \quad C(-1 ; 4 ; 5), \quad D(-3 ; 3 ; 5).$$

1. **Affirmation 1 :** Les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
2. **Affirmation 2 :** Les points A , B et C sont alignés.
3. **Affirmation 3 :** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Thème IX

Synthèse du chapitre

Exercice 30 **[!] Bilan Droites, plan, positions relatives et intersections**

Dans un repère de l'espace, on considère les points

$$A(0 ; 0 ; 0), \quad B(1 ; 0 ; 1), \quad C(0 ; 1 ; 1),$$

le point $D(2 ; -1 ; 0)$ et le vecteur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{P} = (ABC)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par D et dirigée par $\vec{u}$. On considère également la droite $\mathcal{D}'$ définie par

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = -1 + s \\ z = 3 - s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés et justifier qu'ils définissent bien le plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
3. Déterminer la position relative des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si elles sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
Rappel : déterminer la position relative signifie conclure précisément : droites confondues, strictement parallèles, sécantes ou non coplanaires.
4. Déterminer la position relative de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$, puis déterminer leur éventuel point d'intersection, **sans utiliser d'équation cartésienne de plan**.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 31, page 13.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 32, page 14.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 31 **[+] Consolidation Même bilan, avec d'autres valeurs**

Dans un repère de l'espace, on considère les points

$$A(1 ; 0 ; 0), \quad B(2 ; 0 ; 1), \quad C(1 ; 1 ; 1),$$

le point $D(3 ; -1 ; 0)$ et le vecteur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{P} = (ABC)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par D et dirigée par $\vec{u}$. On considère également la droite $\mathcal{D}'$ définie par

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} x = -1 + 3s \\ y = -2 + 2s \\ z = 4 - 2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés et justifier qu'ils définissent bien le plan $\mathcal{P}$.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
3. Déterminer la position relative des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si elles sont sécantes, déterminer leur point d'intersection.
4. Déterminer la position relative de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$, puis leur éventuel point d'intersection, sans utiliser d'équation cartésienne de plan.

Exercice 32 **[*]** **Approfondissement Synthèse moins guidée**

Dans un repère de l'espace, on considère le plan $\mathcal{P} = (ABC)$ avec

$$A(1 ; -1 ; 0), \quad B(3 ; 0 ; 1), \quad C(0 ; 2 ; 2),$$

et les droites

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = -5 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 2s \\ y = s \\ z = 0 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la position relative des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. La réponse doit être entièrement justifiée.
2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan $\mathcal{P}$, sans utiliser d'équation cartésienne de plan.
3. Déterminer l'intersection éventuelle de $\mathcal{D}'$ avec le plan $\mathcal{P}$.

Thème X

Approfondissement – Hors programme

Les deux exercices suivants prolongent la caractérisation vectorielle d'un plan. La représentation paramétrique d'un plan n'est pas une capacité exigible au programme de Terminale spécialité.

Exercice 33 **[*] Approfondissement Construire une représentation paramétrique d'un plan**

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le point

$$A(1 ; 2 ; -1)$$

et les deux vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
2. Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.
3. Le point $B(3 ; 5 ; 0)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?
4. Le point $C(5 ; 0 ; 2)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

Exercice 34 **[*] Approfondissement Plan défini par trois points**

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points

$$A(0 ; 1 ; 2), \quad B(2 ; 0 ; 3), \quad C(1 ; 3 ; -1).$$

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
2. En déduire une représentation paramétrique du plan (ABC) .
3. Le point $D(5 ; 1 ; 1)$ appartient-il au plan (ABC) ?
4. Le point $E(1 ; 5 ; 6)$ appartient-il au plan (ABC) ?

↵ **Fin du TD** ⇨