

TD – EXERCICES

TD 4

Géométrie dans l'espace – Partie 1

Version corrigée – Version imprimable

Sommaire du TD

I	Positions relatives dans l'espace	2
II	Parallélisme	5
III	Vecteurs de l'espace	8
IV	Caractérisations vectorielles	11
V	Bases et repères de l'espace	14
VI	Représentations paramétriques de droites	17
VII	Intersections analytiques	20
VIII	Bilan : en route vers le bac	24
IX	Synthèse du chapitre	37
X	Approfondissement – Hors programme	46

Objectifs

- Reprendre les positions relatives dans l'espace et les sections de solides.
- Utiliser le parallélisme, le théorème du toit et les caractérisations vectorielles.
- Travailler le calcul vectoriel, les bases et les repères de l'espace.
- Déterminer et exploiter des représentations paramétriques de droites, puis étudier des intersections de droites et droite-plan.

Thème I

Positions relatives dans l'espace



Vocabulaire – position relative.

Déterminer la position relative de deux objets de l'espace signifie préciser exactement leur configuration géométrique :

- pour deux droites : elles sont **confondues**, **strictement parallèles**, **sécantes** ou **non coplanaires** ;
- pour une droite et un plan : la droite est **contenue dans le plan**, **strictement parallèle au plan** ou **sécante au plan** ;
- pour deux plans : ils sont **confondus**, **strictement parallèles** ou **sécants** suivant une droite.

Dans tous les cas, la réponse doit être **justifiée**.

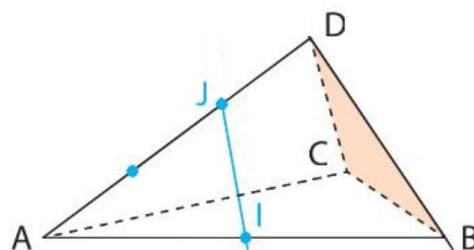
Exercice 1 Intersection d'une droite et d'un plan

ABCD est un tétraèdre.

Le point I est le milieu du segment [AB] et J est le point de l'arête [AD] tel que

$$AJ = \frac{2}{3} AD.$$

Déterminer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD).



Corrigé

- Dans le plan (ABD), les droites (IJ) et (BD) sont coplanaires.
- Elles ne sont pas parallèles, car I est le milieu de [AB] tandis que J n'est pas le milieu de [AD].
- Elles sont donc sécantes en un point que l'on note M.
- Le point M appartient à (BD), donc au plan (BCD), et il appartient aussi à la droite (IJ).
- La droite (IJ) n'est pas incluse dans le plan (BCD), donc son intersection avec ce plan est réduite au point M.

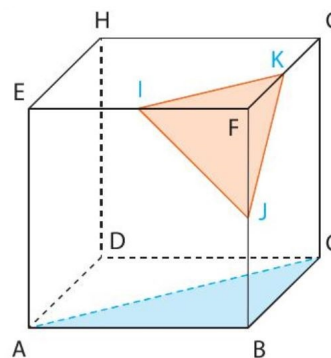
$$(IJ) \cap (BCD) = \{M\} \quad \text{où } M = (IJ) \cap (BD).$$

Exercice 2 Intersection de deux plans

ABCDEFGH est un cube.

Les points I, J, K sont les milieux des arêtes [EF], [FB] et [FG].

Déterminer l'intersection des plans (IJK) et (ABC).



**Corrigé**

- Dans le plan (ABF) , les droites (IJ) et (AB) sont coplanaires et non parallèles. Elles sont donc sécantes en un point M .
- Le point M appartient au plan (IJK) , car $M \in (IJ)$, et au plan (ABC) , car $M \in (AB)$.
- Dans le plan (BCF) , les droites (JK) et (BC) sont coplanaires et non parallèles. Elles sont donc sécantes en un point N .
- Le point N appartient aussi aux deux plans (IJK) et (ABC) .
- Deux plans sécants se coupent suivant une droite. Cette droite contient M et N .

$$(IJK) \cap (ABC) = (MN).$$

Exercice 3 Intersection et section d'un pavé droit

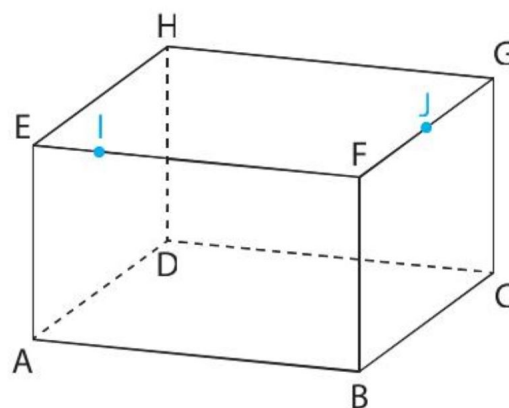
ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

I est le point de $[EF]$ tel que $EI = \frac{1}{5}EF$, et J est le milieu de $[FG]$.

1. Déterminer et tracer l'intersection des plans (AIJ) et (ABC) .

2. Déterminer et tracer la section du parallélépipède rectangle par le plan (AIJ) .

Quelle est la nature du polygone obtenu ?

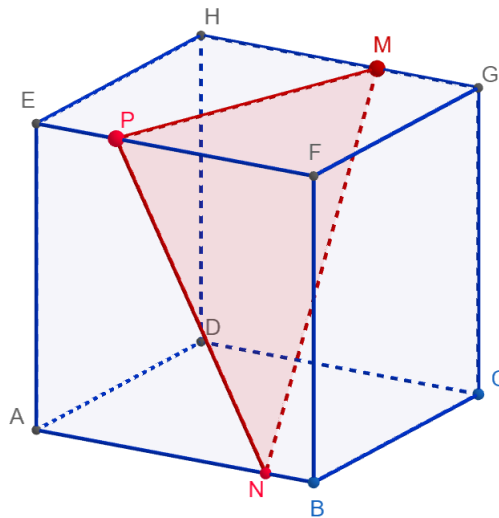
**Corrigé**

1. Les points I et J appartiennent au plan (EFG) , donc l'intersection des plans (AIJ) et (EFG) est la droite (IJ) . Les plans (EFG) et (ABC) sont parallèles. Le plan (AIJ) coupe donc ces deux plans suivant deux droites parallèles. Ainsi, l'intersection de (AIJ) et (ABC) est la droite (Δ) passant par A et parallèle à (IJ) .
2. La droite (Δ) coupe l'arête $[BC]$ en un point K . La section est alors le quadrilatère $AIJK$. Comme $(AK) \parallel (IJ)$, ce quadrilatère est un trapèze.

La section est le trapèze $AIJK$.

Exercice 4 Construire une section de cube

Construire l'intersection du plan (MNP) avec le cube ABCDEFGH.



Preuve

- Le corrigé en vidéo : <https://youtu.be/7qtNSRzLf6Y>.
- Une animation de la section sur Geogebra-3D : animation



Corrigé

Une construction de section de cube repose sur deux principes :

- dans chaque face, l'intersection du plan avec la face est une droite ou un segment ;
- deux faces parallèles coupées par un même plan donnent des segments parallèles.

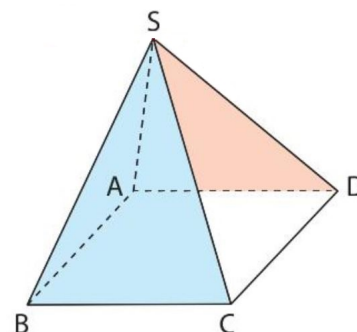
On trace donc successivement les intersections du plan (MNP) avec les faces du cube, en prolongeant si nécessaire les droites déjà obtenues dans les faces voisines.

Thème II

Parallélisme

Exercice 5 Avec le théorème du toit

SABCD est une pyramide de base le carré ABCD.
Déterminer l'intersection des plans (SBC) et (SAD).



Corrigé

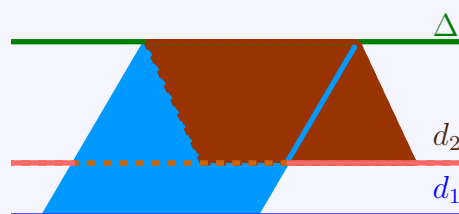
- Les deux plans (SBC) et (SAD) ont le point S en commun. Ils sont donc soit sécants, soit confondus.
- Le point B appartient à (SBC), mais pas au plan (SAD), donc les deux plans ne sont pas confondus.
- Ils sont donc sécants suivant une droite (Δ) passant par S.
- Dans le carré ABCD, on a $(BC) \parallel (AD)$.
- La droite (BC) est contenue dans le plan (SBC), et la droite (AD) est contenue dans le plan (SAD).
- Par le théorème du toit, la droite d'intersection (Δ) est parallèle à (BC) et à (AD).

$$(SBC) \cap (SAD) = (\Delta), \quad \Delta \text{ est la droite passant par S et parallèle à } (BC).$$

Exercice 6 Démonstration du théorème du toit

Théorème 1 (Théorème du toit (1))

Soit (d_1) et (d_2) deux droites parallèles. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant respectivement (d_1) et (d_2) se coupent en (Δ) qui est parallèle aux droites (d_1) et (d_2) .



On considère donc (d_1) et (d_2) deux droites parallèles. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant respectivement (d_1) et (d_2) se coupent en une droite (Δ) .

On cherche à montrer que la droite (Δ) est parallèle aux droites (d_1) et (d_2) .

1. Soit $\vec{u}$, un vecteur directeur (non nul) de la droite (d_1) .

Montrer que $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (d_2) et un vecteur des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

2. Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur (non nul) de la droite (Δ) .

En raisonnant par l'absurde, montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

3. Conclure.

**Corrigé**

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur commun aux droites parallèles (d_1) et (d_2) , et soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de (Δ) .
La droite (Δ) est incluse dans $\mathcal{P}_1$ et dans $\mathcal{P}_2$.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'étaient pas colinéaires, alors ils dirigeraient le plan $\mathcal{P}_1$ et aussi le plan $\mathcal{P}_2$. Les deux plans seraient donc parallèles ou confondus, ce qui contredit le fait qu'ils sont sécants suivant une droite.

Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$$(\Delta) // (d_1) // (d_2).$$

Exercice 7 Plans parallèles coupés par un troisième plan

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles. Un troisième plan $\mathcal{Q}$ coupe $\mathcal{P}$ suivant une droite (d) et coupe $\mathcal{P}'$ suivant une droite (d') .

1. Faire une figure schématique.
2. Démontrer que les droites (d) et (d') sont parallèles.
3. Dans un cube ABCDEFGH, citer deux plans parallèles et un plan qui les coupe. Identifier les deux droites d'intersection obtenues.

**Corrigé**

1. La figure doit faire apparaître deux plans parallèles et un troisième plan qui les coupe.

**Corrigé**

2. Si (d) et (d') n'étaient pas parallèles, comme elles appartiennent toutes les deux au plan $\mathcal{Q}$, elles seraient sécantes en un point M. Ce point M appartiendrait alors aux deux plans parallèles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, ce qui est impossible si ces plans sont strictement parallèles. Donc $(d) // (d')$.

**Corrigé**

3. Dans le cube, les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles. Le plan (ABF) les coupe suivant les droites (AB) et (EF) , qui sont parallèles.

Exercice 8 Critères de parallélisme dans un cube

On considère un cube ABCDEFGH.

1. Justifier que la droite (AB) est parallèle au plan (EFG) .

**Corrigé**

Dans un cube, les arêtes opposées (AB) et (EF) sont parallèles :

$$(AB) \parallel (EF).$$

De plus, la droite (EF) est contenue dans le plan (EFG) . Ainsi, la droite (AB) est parallèle à une droite du plan (EFG) . Enfin, le point A n'appartient pas au plan (EFG) , donc la droite (AB) n'est pas contenue dans ce plan. Par conséquent,

$$(AB) \parallel (EFG).$$

2. Montrer que les plans (ABF) et (DCG) sont parallèles.

**Corrigé**

Dans le plan (ABF) , les droites (AB) et (BF) sont sécantes en B . Dans le plan (DCG) , les droites (DC) et (CG) sont sécantes en C .

Or, dans un cube,

$$(AB) \parallel (DC) \quad \text{et} \quad (BF) \parallel (CG).$$

Ainsi, deux droites sécantes du plan (ABF) sont respectivement parallèles à deux droites sécantes du plan (DCG) .

On en déduit que

$$(ABF) \parallel (DCG).$$

Thème III

Vecteurs de l'espace

Exercice 9 Vecteurs colinéaires et points alignés

Dans l'espace muni d'un repère, on considère les points

$$A(1 ; -2 ; 3), \quad B(4 ; 0 ; -1), \quad C(10 ; 4 ; -9).$$

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.
3. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.



Corrigé

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 0 - (-2) \\ -1 - 3 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 10 - 1 \\ 4 - (-2) \\ -9 - 3 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}.$$



Corrigé

2. On remarque que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les points A, B et C sont alignés.



Corrigé

3. Le réel cherché est $k = 3$.

Exercice 10 Vecteurs coplanaires

On considère quatre vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ tels que

$$\vec{t} = 2\vec{u} - 3\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \vec{u} + \vec{v}.$$

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires.
2. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires.
3. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ peuvent-ils former une base de l'espace? Justifier.



Corrigé

1. Le vecteur $\vec{t}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires.



Corrigé

2. Comme $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, on a $\vec{v} = \vec{w} - \vec{u}$. Donc

$$\vec{t} = 2\vec{u} - 3(\vec{w} - \vec{u}) = 5\vec{u} - 3\vec{w}.$$

Ainsi $\vec{t}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{w}$, donc $\vec{u}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$ sont coplanaires.



Corrigé

3. Non. Comme $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$, les trois vecteurs sont coplanaires. Ils ne peuvent donc pas former une base de l'espace.

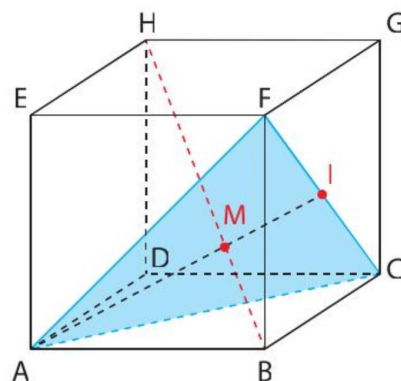
Exercice 11 Problème d'alignement dans un cube

ABCDEFGH est un cube et I est le milieu du segment [FC].
Le point M est défini par

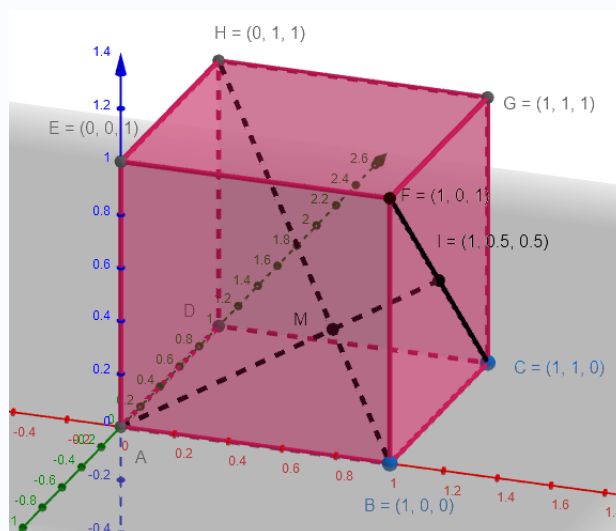
$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

Montrer que les points M, B et H sont alignés.

- En se plaçant dans un repère bien choisi.
- Avec une démonstration vectorielle.



Corrigé



1. Dans le repère $(A ; B ; D ; E)$, on a

$$A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), F(1 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1).$$

Comme I est le milieu de [FC],

$$I \left(1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} \right).$$

Puisque $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, on obtient

$$M \left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3} \right).$$

Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

et le vecteur $\overrightarrow{BH}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$, donc les points B, M et H sont alignés.

2. Vectoriellement, comme I est le milieu de [FC],

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AC}).$$

Dans le cube,

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}, \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Donc

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

Alors

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}.$$

Or

$$\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM}.$$

Donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$, d'où $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$. Les points B, M et H sont alignés.

Thème IV

Caractérisations vectorielles

Exercice 12 Caractérisation vectorielle d'une droite

On considère deux points distincts A et B de l'espace.

1. Rappeler une caractérisation vectorielle de la droite (AB).

2. On considère un point M tel que

$$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}.$$

Que peut-on conclure sur le point M ?

3. On considère un point N tel que

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$

où C est un point n'appartenant pas à la droite (AB). Le point N appartient-il nécessairement à la droite (AB) ?



Corrigé

1. Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}.$$



Corrigé

2. Si $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$, alors M appartient à la droite (AB).



Corrigé

3. Le point N n'appartient pas à la droite (AB). En effet, supposons par l'absurde que $N \in (AB)$. Alors $\overrightarrow{AN}$ serait colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. Or

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}.$$

La différence de deux vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ serait encore colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. On aurait donc $\overrightarrow{AC}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, ce qui impliquerait $C \in (AB)$, en contradiction avec l'énoncé. Ainsi,

$$N \notin (AB).$$

Exercice 13 Caractérisation vectorielle d'un plan

Soient A, B et C trois points non alignés de l'espace.

1. Rappeler une caractérisation vectorielle du plan (ABC).

2. Soit M un point tel que

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

Démontrer que M appartient au plan (ABC).

3. Soit N un point tel que

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \vec{u},$$

où $\vec{u}$ n'est pas coplanaire avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Le point N appartient-il au plan (ABC) ?

**Corrigé**

1. Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement s'il existe deux réels s et t tels que

$$\overrightarrow{AM} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}.$$

**Corrigé**

2. Ici $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, donc M appartient au plan (ABC).

**Corrigé**

3. Si $\vec{u}$ n'est pas coplanaire avec $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{AN}$ n'est pas combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ seulement. Le point N n'appartient donc pas au plan (ABC).

Exercice 14 Coplanarité de quatre points

Dans un repère de l'espace, on considère les points

$$A(0 ; 1 ; -1), \quad B(2 ; 0 ; 1), \quad C(1 ; 3 ; 0), \quad D(5 ; 1 ; 4).$$

- Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
- Chercher s'il existe deux réels α et β tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

- Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?

**Corrigé**

1. Les vecteurs ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Corrigé**

2. On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}.$$

Cela donne

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 5 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 5 \end{cases}$$

Les première et troisième équations sont identiques. De $-\alpha + 2\beta = 0$, on obtient $\alpha = 2\beta$. Puis $4\beta + \beta = 5$, donc $\beta = 1$ et $\alpha = 2$.

**Corrigé**

3. Ainsi $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Donc D appartient au plan (ABC) et les points A, B, C et D sont coplanaires.

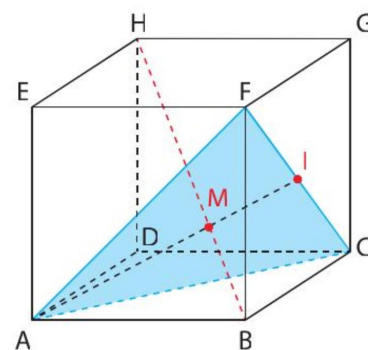
Thème V

Bases et repères de l'espace

Exercice 15 Coordonnées dans un cube

ABCDEFGH est un cube. On se place dans le repère $(A ; B ; D ; E)$.

1. Donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.
2. I est le milieu de [FC]. Donner les coordonnées de I.
3. M est défini par $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Donner les coordonnées de M.
4. Vérifier que les points B, M et H sont alignés.



Corrigé

1. Les coordonnées sont :

$$A(0 ; 0 ; 0), B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), \\ C(1 ; 1 ; 0), F(1 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1), G(1 ; 1 ; 1).$$



Corrigé

2. Comme $F(1 ; 0 ; 1)$ et $C(1 ; 1 ; 0)$, le milieu I de [FC] a pour coordonnées

$$I\left(1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right).$$



Corrigé

3. Comme $A(0 ; 0 ; 0)$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$,

$$M\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right).$$



Corrigé

4. On a

$$\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$ et les points B, M et H sont alignés.

Exercice 16 Décomposer un vecteur dans une base

Dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les vecteurs

$$\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{w} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 7\vec{k}.$$

1. Donner les coordonnées de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans cette base.
2. Calculer les coordonnées de $2\vec{u} - \vec{v}$.
3. Déterminer si $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

**Corrigé**

1. On a

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

**Corrigé**

- 2.

$$2\vec{u} - \vec{v} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**Corrigé**

3. On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Cela donne

$$\begin{cases} 2a - b = 5 \\ -a + 4b = 2 \\ 3a + b = 7 \end{cases}$$

Des équations $2a - b = 5$ et $3a + b = 7$, on obtient $5a = 12$, donc $a = \frac{12}{5}$, puis $b = 2a - 5 = -\frac{1}{5}$.

Mais alors

$$-a + 4b = -\frac{12}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{16}{5} \neq 2.$$

Donc $\vec{w}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice 17 Coordonnées d'un point défini vectoriellement

Dans un repère de l'espace, on donne

$$A(2 ; -1 ; 3), \quad B(-1 ; 5 ; 0), \quad C(4 ; 1 ; -2).$$

Le point M est défini par

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}.$$

Déterminer les coordonnées de M.

**Corrigé**

Les vecteurs ont pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 9 \\ -\frac{33}{2} \end{pmatrix}.$$

Comme $A(2 ; -1 ; 3)$, on obtient

$$M \left(2 + \frac{9}{2} ; -1 + 9 ; 3 - \frac{33}{2} \right),$$

donc

$$\boxed{M \left(\frac{13}{2} ; 8 ; -\frac{27}{2} \right)}.$$

Thème VI

Représentations paramétriques de droites

Exercice 18 Déterminer une représentation paramétrique

Dans un repère de l'espace, on donne les points $A(-2 ; 3 ; 1)$ et $B(5 ; 2 ; -2)$.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) .
- Les points $M(-9 ; 4 ; 4)$ et $N(12 ; 1 ; 1)$ appartiennent-ils à cette droite ?

**Corrigé**

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - (-2) \\ 2 - 3 \\ -2 - 1 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Une représentation paramétrique de (AB) est donc

$$\begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 3 - t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Corrigé**

- Pour M :

$$\begin{cases} -9 = -2 + 7t \\ 4 = 3 - t \\ 4 = 1 - 3t \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

Donc $M \in (AB)$.

Pour N :

$$\begin{cases} 12 = -2 + 7t \\ 1 = 3 - t \\ 1 = 1 - 3t \end{cases} \iff \begin{cases} t = 2 \\ t = 2 \\ t = 0 \end{cases}$$

Il n'existe pas de réel t convenant aux trois équations, donc $N \notin (AB)$.

Exercice 19 Positions relatives de droites paramétrées

Dans chaque cas, déterminer la position relative des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, c'est-à-dire préciser si elles sont confondues, strictement parallèles, sécantes ou non coplanaires, en justifiant la réponse.

1.

$$1. \text{ a. } \mathcal{D} : \begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$1. \text{ b. } \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 9 + 15s \\ y = -5 - 3s \\ z = -8 - 12s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

2.

$$2. \text{ a. } \mathcal{D} : \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4t \\ z = 1 + 12t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$2. \text{ b. } \mathcal{D}' : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 5 + 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

3.

$$3. \text{ a. } \mathcal{D} : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$3. \text{ b. } \mathcal{D}' : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2 - 2s \\ z = 5 + 3s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

4.

$$4. \text{ a. } \mathcal{D} : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

$$4. \text{ b. } \mathcal{D}' : \begin{cases} x = s \\ y = 1 + s \\ z = -1 - 4s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$



Corrigé

1. Les vecteurs directeurs sont $\vec{u}(5; -1; -4)$ et $\vec{u}'(15; -3; -12) = 3\vec{u}$. Les droites sont parallèles. Le point $A(-1; -3; 0)$ de $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{D}'$ pour $s = -\frac{2}{3}$. Les droites sont donc confondues.



Corrigé

2. Les vecteurs directeurs sont $\vec{u}(4; 4; 12)$ et $\vec{u}'(1; 1; 3)$. On a $\vec{u} = 4\vec{u}'$, donc les droites sont parallèles. Le point $(-3; 0; 1)$ de $\mathcal{D}$ n'appartient pas à $\mathcal{D}'$. Les droites sont strictement parallèles.



Corrigé

3. Les vecteurs directeurs $\vec{u}(1; 1; 3)$ et $\vec{u}'(1; -2; 3)$ ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles. Cherchons si elles sont sécantes :

$$\begin{cases} -3 + t = -1 + s \\ t = 2 - 2s \\ 1 + 3t = 5 + 3s \end{cases} \iff \begin{cases} t - s = 2 \\ t + 2s = 2 \\ 3t - 3s = 4 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $s = 0$ et $t = 2$, mais alors $3t - 3s = 6 \neq 4$. Elles ne sont donc pas sécantes. Les droites sont non coplanaires.



Corrigé

4. On résout le système d'intersection :

$$\begin{cases} -3 + t = s \\ 2 - t = 1 + s \\ 1 + t = -1 - 4s \end{cases} \iff \begin{cases} t - s = 3 \\ t + s = 1 \\ t + 4s = -2 \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $t = 2$ et $s = -1$, ce qui vérifie la troisième. Les droites sont donc sécantes au point

$$A(-1; 0; 3).$$

Exercice 20 Trouver une droite parallèle à une droite donnée

On considère la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + t \\ z = 4 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

- Donner un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(0; 2; -1)$ et parallèle à $\mathcal{D}$.
- Le point $B(4; 4; -11)$ appartient-il à $\mathcal{D}'$?

**Corrigé**

1. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

**Corrigé**

2. Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(0 ; 2 ; -1)$ et dirigée par $\vec{u}$ est

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Corrigé**

3. Pour $B(4 ; 4 ; -11)$, les deux premières équations donnent $t = 2$, et la troisième donne bien $-1 - 5 \times 2 = -11$.
Donc $B \in \mathcal{D}'$.

Thème VII

Intersections analytiques

Exercice 21 Intersection de deux droites

Dans un repère de l'espace, on considère les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ définies par

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 6 - s \\ y = -1 + 2s \\ z = 4 - 3s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

1. Donner un vecteur directeur de chacune des droites et montrer qu'elles ne sont pas parallèles.



Corrigé

Pour tout réel t , la droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

et, pour tout réel s , la droite $\mathcal{D}'$ a pour vecteur directeur

$$\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Pour que les droites soient parallèles, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ devraient être colinéaires. Si $\vec{v} = k\vec{u}$, alors la première coordonnée impose

$$-1 = 2k \implies k = -\frac{1}{2}.$$

Mais la deuxième coordonnée imposerait alors

$$2 = k = -\frac{1}{2},$$

ce qui est impossible.

Ainsi, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent,

$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

2. On cherche un éventuel point commun aux deux droites. Écrire le système vérifié par les paramètres t et s , puis résoudre les deux premières équations.



Corrigé

Un point appartient simultanément à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$ s'il existe deux réels t et s tels que ses trois coordonnées données par les deux représentations paramétriques soient égales. On doit donc avoir

$$\begin{cases} 1 + 2t = 6 - s \\ -1 + t = -1 + 2s \\ 3 - t = 4 - 3s \end{cases}$$

Commençons par résoudre les deux premières équations :

$$\begin{cases} 1 + 2t = 6 - s \\ -1 + t = -1 + 2s \end{cases} \iff \begin{cases} 2t + s = 5 \\ t - 2s = 0 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $t = 2s$. En remplaçant dans la première :

$$2(2s) + s = 5$$

$$4s + s = 5$$

$$5s = 5$$

$$\boxed{s = 1}$$

Puis :

$$t = 2s$$

$$= 2 \times 1$$

$$\boxed{t = 2}$$

Ainsi, les deux premières équations imposent

$$\boxed{t = 2 \quad \text{et} \quad s = 1.}$$

3. Vérifier la troisième équation. En déduire la position relative des deux droites (ici : sécantes ou non coplanaires puisqu'elles ne sont pas parallèles) et, le cas échéant, les coordonnées de leur point d'intersection.



Corrigé

Il reste indispensable de vérifier la troisième équation avec $t = 2$ et $s = 1$:

$$3 - t = 3 - 2$$

$$\boxed{3 - t = 1}$$

et

$$4 - 3s = 4 - 3 \times 1$$

$$\boxed{4 - 3s = 1}$$

La troisième équation est donc bien vérifiée.

Les trois équations du système sont satisfaites pour $t = 2$ et $s = 1$. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont donc sécantes.

Pour obtenir le point d'intersection I , on remplace par exemple t par 2 dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$:

$$x_I = 1 + 2 \times 2$$

$$= 1 + 4$$

$$\boxed{x_I = 5}$$

$$y_I = -1 + 2$$

$$\boxed{y_I = 1}$$

$$z_I = 3 - 2$$

$$\boxed{z_I = 1}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{I\} \quad \text{avec} \quad I(5 ; 1 ; 1).}$$

Exercice 22 Intersection d'une droite et d'un plan

Dans un repère de l'espace, on considère les points

$$A(1 ; 0 ; 0), \quad B(2 ; 1 ; 0), \quad C(0 ; 1 ; 1),$$

et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés. On pourra calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.



Corrigé

Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 1 - 0 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

et

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires : la troisième coordonnée de $\overrightarrow{AB}$ est nulle alors que celle de $\overrightarrow{AC}$ ne l'est pas.

Donc les points A , B et C ne sont pas alignés et définissent bien un plan, noté (ABC) .

2. Soit M un point de la droite $\mathcal{D}$ associé au paramètre t . Donner les coordonnées de M , puis celles du vecteur $\overrightarrow{AM}$.



Corrigé

Pour tout réel t , un point M de $\mathcal{D}$ a pour coordonnées

$$M(2t ; -1 + t ; 1 - t).$$

Comme $A(1 ; 0 ; 0)$, on obtient :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2t - 1 \\ (-1 + t) - 0 \\ (1 - t) - 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2t - 1 \\ t - 1 \\ 1 - t \end{pmatrix}}$$

3. Traduire la condition $M \in (ABC)$ à l'aide de la caractérisation vectorielle d'un plan, puis déterminer la valeur de t pour laquelle M appartient au plan (ABC) .

**Corrigé**

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. D'après la caractérisation vectorielle d'un plan,

$$M \in (ABC) \iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}.$$

Or

$$\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ \lambda + \mu \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Ainsi, M appartient au plan (ABC) si et seulement s'il existe deux réels λ et μ tels que

$$\begin{cases} \lambda - \mu = 2t - 1 \\ \lambda + \mu = t - 1 \\ \mu = 1 - t \end{cases}$$

La troisième équation donne

$$\mu = 1 - t.$$

En remplaçant dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned} \lambda + (1 - t) &= t - 1 \\ \lambda &= t - 1 - 1 + t \\ \lambda &= 2t - 2 \end{aligned}$$

On remplace alors $\lambda = 2t - 2$ et $\mu = 1 - t$ dans la première équation :

$$\begin{aligned} (2t - 2) - (1 - t) &= 2t - 1 \\ 2t - 2 - 1 + t &= 2t - 1 \\ 3t - 3 &= 2t - 1 \\ t &= 2 \\ t &= 2 \end{aligned}$$

Pour $t = 2$, on obtient

$$\lambda = 2 \times 2 - 2 = 2 \quad \text{et} \quad \mu = 1 - 2 = -1,$$

donc le système est bien compatible.

Il existe donc un unique point de la droite $\mathcal{D}$ appartenant au plan (ABC) , obtenu pour $t = 2$.

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection P de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABC) , puis conclure en écrivant l'intersection sous forme ensembliste.

**Corrigé**

Le point d'intersection correspond au paramètre $t = 2$. On remplace donc t par 2 dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} x_P &= 2 \times 2 = 4, \\ y_P &= -1 + 2 = 1, \\ z_P &= 1 - 2 = -1, \end{aligned}$$

$$P = (4 ; 1 ; -1)$$

Ainsi,

$$\mathcal{D} \cap (ABC) = \{P\}.$$

Thème VIII

Bilan : en route vers le bac

Exercice 23 Bac 2026 – Droite sécante à un plan et intersection de plans

Source bac : Bac 2026 Asie Sujet 1, exercice 3 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2026.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points suivants :

$$A(0; 0; 1), \quad B(1; 2; 3), \quad C(3; 3; 1), \quad E(2; -2; 2), \quad F(3; 0; 4) \quad \text{et} \quad G(5; 1; 2).$$

1. Montrer que les points B , C et E ne sont pas alignés.
2.
 2. a. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.
 2. b. En déduire que la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.
3. Pour la suite de l'exercice, on appellera P le point d'intersection de la droite (AG) et du plan (BCE) .
 3. a. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (AG) est :

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. b. En déduire les coordonnées du point P .
3. c. Montrer que le point P est le milieu du segment $[EC]$.
4. Déterminer l'intersection des plans (BCE) et (ACG) .



Corrigé

1. Non-alignement des points B , C et E .

Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont pour coordonnées :

$$\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ -2 - 2 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 3 - 2 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car on n'a pas le même coefficient de proportionnalité entre les coordonnées :

$$\frac{2}{1} = 2 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$

Les points B , C et E ne sont donc pas alignés.



Corrigé

2. a. Coplanarité des vecteurs.

On calcule d'abord les coordonnées de $\overrightarrow{AG}$:

$$\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 5 - 0 \\ 1 - 0 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires, les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ seraient coplanaires si et seulement s'il existait deux réels λ et μ tels que :

$$\overrightarrow{AG} = \lambda \overrightarrow{BE} + \mu \overrightarrow{BC}.$$

En passant aux coordonnées, on obtient le système :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 5 \\ -4\lambda + \mu = 1 \\ -\lambda - 2\mu = 1 \end{cases}$$

La première équation donne $\lambda + 2\mu = 5$, alors que la troisième donne $\lambda + 2\mu = -1$. C'est impossible. Donc il n'existe pas de tels réels λ et μ .

Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AG}$ ne sont pas coplanaires.

2. b. Position relative de la droite (AG) et du plan (BCE).

Le plan (BCE) est dirigé par les deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Si la droite (AG) était parallèle au plan (BCE), alors son vecteur directeur $\overrightarrow{AG}$ serait coplanaire avec les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Or ce n'est pas le cas d'après la question précédente. La droite (AG) n'est donc pas parallèle au plan (BCE).

Le vecteur directeur $\overrightarrow{AG}$ n'est donc pas un vecteur directeur du plan (BCE). La droite (AG) n'est ni parallèle au plan (BCE), ni contenue dans ce plan. Elle est donc sécante au plan (BCE) :

la droite (AG) et le plan (BCE) sont sécants.



Corrigé

3. a. Représentation paramétrique de (AG).

La droite (AG) passe par $A(0; 0; 1)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AG}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc une représentation paramétrique de (AG) est :

$$\begin{cases} x = 0 + 5t \\ y = 0 + t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = 5t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$



Corrigé

3. b. Coordonnées du point P.

Comme P appartient à la droite (AG), il existe un réel t tel que :

$$P(5t ; t ; 1 + t).$$

De plus, P appartient au plan (BCE). D'après la caractérisation vectorielle d'un plan, il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BE} + \mu \overrightarrow{BC}.$$

Or :

$$\overrightarrow{BP} \begin{pmatrix} 5t - 1 \\ t - 2 \\ t - 2 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu = 5t - 1 \\ -4\lambda + \mu = t - 2 \\ -\lambda - 2\mu = t - 2 \end{cases}$$

La première et la troisième équations donnent :

$$5t - 1 = 2 - t \iff 6t = 3 \iff t = \frac{1}{2}.$$

Pour $t = \frac{1}{2}$, le système est compatible : par exemple $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{1}{2}$ conviennent.

On obtient alors :

$$P \left(5 \times \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1 + \frac{1}{2} \right)$$

donc :

$$\boxed{P \left(\frac{5}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2} \right)}.$$



Corrigé

3. c. Milieu du segment $[EC]$.

Le milieu du segment $[EC]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_E + x_C}{2} ; \frac{y_E + y_C}{2} ; \frac{z_E + z_C}{2} \right) = \left(\frac{2+3}{2} ; \frac{-2+3}{2} ; \frac{2+1}{2} \right).$$

Ainsi :

$$\left(\frac{x_E + x_C}{2} ; \frac{y_E + y_C}{2} ; \frac{z_E + z_C}{2} \right) = \left(\frac{5}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{3}{2} \right).$$

On retrouve les coordonnées du point P . Donc :

$$\boxed{P \text{ est le milieu du segment } [EC].}$$



Corrigé

4. Intersection des plans (BCE) et (ACG) .

Le point C appartient aux deux plans (BCE) et (ACG) .

De plus, le point P appartient au plan (BCE) par définition et il appartient aussi au plan (ACG) car P appartient à la droite (AG) , contenue dans le plan (ACG) .

Les deux plans ont donc deux points distincts communs : C et P .

Par conséquent, leur intersection est la droite (CP) :

$$\boxed{(BCE) \cap (ACG) = (CP).}$$

Si l'on souhaite une représentation paramétrique de cette droite, on peut utiliser le point $C(3;3;1)$ et le vecteur

$\overrightarrow{CP}$ de coordonnées :

$$\overrightarrow{CP} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 3 \\ \frac{1}{2} - 3 \\ \frac{3}{2} - 1 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{CP} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On peut donc prendre comme vecteur directeur $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne par exemple :

$$\begin{cases} x = 3 - s \\ y = 3 - 5s \\ z = 1 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

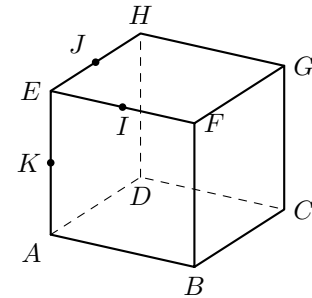
Exercice 24 Bac 2026 – Cube, coordonnées et droites coplanaires

Source bac : Bac 2026 Centres étrangers Sujet 1, exercice 3 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2026.

ABCDEFGH est un cube d'arête de longueur 1.

Les points I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[EF]$, $[EH]$ et $[AE]$.

On munit l'espace du repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donner les coordonnées des points I, J et K.

2. Soit M un point de la droite (FG) .

On admet que les coordonnées de M sont $(1 ; m ; 1)$ avec m appartenant à $\mathbb{R}$.

2. a. Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IM) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

2. b. Peut-on affirmer que les droites (IM) et (KC) sont coplanaires quelle que soit la valeur de m ?



Corrigé

1. Coordonnées de I, J et K.

Dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on a :

$$A(0;0;0), \quad B(1;0;0), \quad D(0;1;0), \quad E(0;0;1),$$

$$F(1;0;1), \quad H(0;1;1), \quad C(1;1;0), \quad G(1;1;1).$$

Comme I est le milieu de $[EF]$, on obtient :

$$I\left(\frac{0+1}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{1+1}{2}\right) \text{ donc } \boxed{I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)}.$$

Comme J est le milieu de $[EH]$, on obtient :

$$J\left(\frac{0+0}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{1+1}{2}\right) \quad \text{donc} \quad \boxed{J\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)}.$$

Comme K est le milieu de $[AE]$, on obtient :

$$K\left(\frac{0+0}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{0+1}{2}\right) \quad \text{donc} \quad \boxed{K\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)}.$$



Corrigé

2. a. Représentation paramétrique de (IM) .

On sait que :

$$I\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right) \quad \text{et} \quad M(1; m; 1).$$

Le vecteur $\overrightarrow{IM}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ m - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{IM}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ m \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La droite (IM) passe par I et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{IM}$.

Une représentation paramétrique de (IM) est donc :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \\ y = 0 + ms \\ z = 1 + 0s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\begin{cases} x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ y = ms \\ z = 1 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$



Corrigé

2. b. Coplanarité des droites (IM) et (KC) .

Deux droites de l'espace sont coplanaires lorsqu'elles sont parallèles ou sécantes.

Le vecteur $\overrightarrow{KC}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{KC}\begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 1 - 0 \\ 0 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{KC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Un vecteur directeur de (IM) a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ m \\ 0 \end{pmatrix}$, et un vecteur directeur de (KC) a pour coordonnées

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne peuvent pas être colinéaires car la troisième coordonnée du premier est nulle alors que celle du second ne l'est pas.

Les droites (IM) et (KC) ne sont donc jamais parallèles.

Cherchons alors pour quelles valeurs de m elles sont sécantes.

Une représentation paramétrique de (KC) est :

$$(KC) : \begin{cases} x = r \\ y = r \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r \end{cases} \quad r \in \mathbb{R}.$$

On résout le système d'intersection entre (IM) et (KC) :

$$\begin{cases} r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \\ r = ms \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r = 1 \end{cases}$$

La troisième équation donne :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}r = 1 \iff -\frac{1}{2}r = \frac{1}{2} \iff r = -1.$$

La première équation donne alors :

$$-1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}s \iff -2 = 1 + s \iff s = -3.$$

La deuxième équation donne enfin :

$$-1 = m(-3) \iff m = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, les droites (IM) et (KC) sont sécantes uniquement pour $m = \frac{1}{3}$.

Donc on ne peut pas affirmer qu'elles sont coplanaires quelle que soit la valeur de m .

Non, elles sont coplanaires uniquement pour $m = \frac{1}{3}$.

Exercice 25 Bac 2025 – Vrai/Faux sur les représentations paramétriques

Source bac : Bac 2025 Métropole Sujet 1, exercice 3 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2025.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère les points $A(-1 ; 0 ; 5)$ et $B(3 ; 2 ; -1)$.

Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 15 + k \\ y = 8 - k \\ z = -6 + 2k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R};$$

- la droite d' de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 4s \\ y = 2 + 4s \\ z = 1 - 6s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.



Corrigé

1. Affirmation 1.

On calcule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 - (-1) \\ 2 - 0 \\ -1 - 5 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

La représentation proposée passe par le point $B(3 ; 2 ; -1)$, obtenu pour $t = 0$.

Elle admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Or :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{u}$ est donc colinéaire au vecteur $\overrightarrow{AB}$. La représentation proposée est bien une représentation paramétrique de la droite (AB) .

L'affirmation 1 est vraie.



Corrigé

2. Affirmation 3.

La droite d admet pour vecteur directeur un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La droite d' admet pour vecteur directeur un vecteur $\vec{v}$ de coordonnées :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car :

$$\frac{4}{1} = 4 \quad \text{mais} \quad \frac{4}{-1} = -4.$$

Les droites ne sont donc pas parallèles.

Cherchons si elles sont sécantes. On résout :

$$\begin{cases} 15 + k = 1 + 4s \\ 8 - k = 2 + 4s \\ -6 + 2k = 1 - 6s \end{cases}$$

En additionnant les deux premières équations, on obtient :

$$23 = 3 + 8s \iff 8s = 20 \iff s = \frac{5}{2}.$$

La première équation donne alors :

$$15 + k = 1 + 4 \times \frac{5}{2} \iff 15 + k = 11 \iff k = -4.$$

On vérifie la troisième équation :

$$-6 + 2(-4) = -14 \quad \text{et} \quad 1 - 6 \times \frac{5}{2} = 1 - 15 = -14.$$

Il existe donc un couple $(k; s) = \left(-4; \frac{5}{2}\right)$ donnant un point commun. Les droites d et d' sont sécantes au point :

$$(15 - 4 ; 8 - (-4) ; -6 + 2(-4)) = (11 ; 12 ; -14).$$

Deux droites sécantes sont coplanaires. L'affirmation qui dit qu'elles ne sont pas coplanaires est donc fausse.

L'affirmation 3 est fausse.

Exercice 26 Bac 2026 – Deux droites sont-elles sécantes ?

Source bac : Bac 2026 Métropole Sujet 1, exercice 2 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2026.

Pour l'affirmation suivante, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

- la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1,5 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R};$$

- les points $A(3 ; 0 ; 2)$ et $B(2 ; 1 ; -3)$.

Affirmation : Les droites (d) et (AB) sont sécantes.



Corrigé

- Vecteur directeur de (AB) .

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 - 3 \\ 1 - 0 \\ -3 - 2 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est donc :

$$\begin{cases} x = 3 - u \\ y = u \\ z = 2 - 5u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

• **Recherche d'un point commun.**

Un point commun aux deux droites doit vérifier :

$$\begin{cases} t = 3 - u \\ -1,5 - t = u \\ 2 - 2t = 2 - 5u \end{cases}$$

La troisième équation donne :

$$2 - 2t = 2 - 5u \iff -2t = -5u \iff 2t = 5u.$$

Avec la première équation, $t = 3 - u$. Donc :

$$2(3 - u) = 5u \iff 6 - 2u = 5u \iff 7u = 6 \iff u = \frac{6}{7}.$$

Alors :

$$t = 3 - \frac{6}{7} = \frac{15}{7}.$$

On vérifie la deuxième équation :

$$-1,5 - \frac{15}{7} = -\frac{3}{2} - \frac{15}{7} = -\frac{21}{14} - \frac{30}{14} = -\frac{51}{14} \neq \frac{6}{7}.$$

Le système n'a donc pas de solution.

• **Conclusion.**

Les droites (d) et (AB) ne sont pas sécantes.

L'affirmation est fausse.

Exercice 27 Bac 2025 – Droites sécantes et points non coplanaires

Source bac : Bac 2025 Métropole Sujet 2, exercice 2 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2025.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère :

- les points $A(-1 ; 2 ; 1)$, $B(1 ; -1 ; 2)$ et $C(1 ; 1 ; 1)$;
- la droite d dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d : \begin{cases} x = \frac{3}{2} + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R};$$

- la droite d' dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$d' : \begin{cases} x = s \\ y = \frac{3}{2} + s \\ z = 3 - 2s \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

- Montrer que les droites d et d' sont sécantes au point $S\left(-\frac{1}{2} ; 1 ; 4\right)$.

2. Démontrer que les points A , B , C et S ne sont pas coplanaires.



Corrigé

1. Intersection des droites d et d' .

Un point de d a pour coordonnées :

$$\left(\frac{3}{2} + 2t ; 2 + t ; 3 - t \right).$$

Un point de d' a pour coordonnées :

$$\left(s ; \frac{3}{2} + s ; 3 - 2s \right).$$

Cherchons s'il existe deux réels t et s tels que ces coordonnées soient égales :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + 2t = s \\ 2 + t = \frac{3}{2} + s \\ 3 - t = 3 - 2s \end{cases}$$

La troisième équation donne :

$$3 - t = 3 - 2s \iff t = 2s.$$

En remplaçant dans la première équation :

$$\frac{3}{2} + 2(2s) = s \iff \frac{3}{2} + 4s = s \iff 3s = -\frac{3}{2} \iff s = -\frac{1}{2}.$$

Donc :

$$t = 2s = -1.$$

On vérifie la deuxième équation :

$$2 + t = 2 - 1 = 1 \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} + s = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

Les trois équations sont vérifiées. Le point commun est obtenu, par exemple sur d' avec $s = -\frac{1}{2}$:

$$S \left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} - \frac{1}{2} ; 3 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \right) = S \left(-\frac{1}{2} ; 1 ; 4 \right).$$

Ainsi, les droites d et d' sont sécantes au point $S \left(-\frac{1}{2} ; 1 ; 4 \right)$.



Corrigé

2. Coplanarité des points A , B , C et S .

On calcule :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AS} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Les points A , B , C et S sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont coplanaires, c'est-à-dire s'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\overrightarrow{AS} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}.$$

Cela donne le système :

$$\begin{cases} 2\lambda + 2\mu = \frac{1}{2} \\ -3\lambda - \mu = -1 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

La troisième équation impose $\lambda = 3$. La première devient :

$$6 + 2\mu = \frac{1}{2} \iff 2\mu = -\frac{11}{2} \iff \mu = -\frac{11}{4}.$$

Mais alors :

$$-3\lambda - \mu = -9 + \frac{11}{4} = -\frac{25}{4} \neq -1.$$

Le système est impossible. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AS}$ ne sont pas coplanaires.

Les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

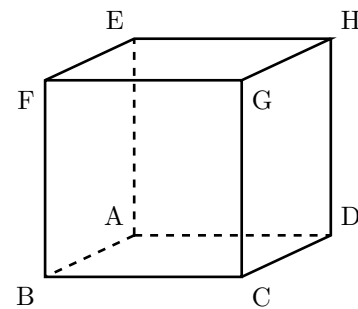
Exercice 28 Bac 2025 – Deux droites dans un cube

Source bac : Bac 2025 Asie Septembre, exercice 2 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2025.

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté une unité.

L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On note I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[BG]$.



1. Donner sans justification les coordonnées des points A, B, G, I et J .
2.
 - a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AJ) .
 - b. Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IG) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

2. c. Démontrer que les droites (AJ) et (IG) sont sécantes en un point S de coordonnées $S\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.



Corrigé

1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, on lit directement :

$$A(0; 0; 0), \quad B(1; 0; 0), \quad G(1; 1; 1).$$

Comme I est le milieu de $[AB]$, on obtient :

$$I\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right).$$

Comme J est le milieu de $[BG]$, on obtient :

$$J\left(\frac{1+1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{0+1}{2}\right) \quad \text{soit} \quad J\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$



Corrigé

2. a. Le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{AJ} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (AJ) est donc :

$$\begin{cases} x = u \\ y = \frac{1}{2}u \\ z = \frac{1}{2}u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}.$$

2. b. Le vecteur $\overrightarrow{IG}$ a pour coordonnées :

$$\overrightarrow{IG} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{IG} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La droite (IG) passe par $I \left(\frac{1}{2} ; 0 ; 0 \right)$ et admet $\overrightarrow{IG}$ pour vecteur directeur. Ainsi :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

est bien une représentation paramétrique de la droite (IG) .

2. c. Cherchons l'intersection des deux droites. On résout :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}u = t \\ \frac{1}{2}u = t \end{cases}$$

Les deux dernières équations donnent $u = 2t$. En remplaçant dans la première :

$$2t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \iff \frac{3}{2}t = \frac{1}{2} \iff t = \frac{1}{3}.$$

Donc :

$$u = 2t = \frac{2}{3}.$$

Les coordonnées du point d'intersection sont alors, avec la droite (AJ) :

$$S \left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} ; \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \right)$$

soit :

$$\boxed{S \left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3} \right)}.$$

Les droites (AJ) et (IG) sont donc sécantes en S .

Exercice 29 Bac 2025 – Coplanarité de quatre points

Source bac : Bac 2025 Amérique du Sud Jour 2, exercice 1 - (extrait partiel). Voir la page Math93 Bac 2025.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.
L'espace est rapporté à un repère orthonormé. On considère les points :

$$A(3 ; 2 ; 1), \quad B(7 ; 3 ; 1), \quad C(-1 ; 4 ; 5), \quad D(-3 ; 3 ; 5).$$

1. **Affirmation 1 :** Les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires.
2. **Affirmation 2 :** Les points A , B et C sont alignés.
3. **Affirmation 3 :** Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.



Corrigé

On calcule les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. Les points A , B , C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
Autrement dit, il faudrait qu'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}.$$

Cela donne :

$$\begin{cases} 4\lambda - 4\mu = -6 \\ \lambda + 2\mu = 1 \\ 4\mu = 4 \end{cases}$$

La troisième équation impose $\mu = 1$. La première devient :

$$4\lambda - 4 = -6 \iff 4\lambda = -2 \iff \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Mais alors :

$$\lambda + 2\mu = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \neq 1.$$

Le système est impossible. Donc les quatre points ne sont pas coplanaires.

L'affirmation 1 est vraie.

2. Les points A , B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Or :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Comme la troisième coordonnée de $\overrightarrow{AB}$ vaut 0 alors que celle de $\overrightarrow{AC}$ vaut 4, ces deux vecteurs ne peuvent pas être colinéaires.

L'affirmation 2 est fausse.

3. On calcule :

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -3 - (-1) \\ 3 - 4 \\ 5 - 5 \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car :

$$\frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{mais} \quad \frac{-1}{1} = -1.$$

L'affirmation 3 est fausse.

Thème IX

Synthèse du chapitre

Exercice 30 **[!]** Bilan Droites, plan, positions relatives et intersections

Dans un repère de l'espace, on considère les points

$$A(0 ; 0 ; 0), \quad B(1 ; 0 ; 1), \quad C(0 ; 1 ; 1),$$

le point $D(2 ; -1 ; 0)$ et le vecteur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{P} = (ABC)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par D et dirigée par $\vec{u}$. On considère également la droite $\mathcal{D}'$ définie par

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} x = -1 + 2s \\ y = -1 + s \\ z = 3 - s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés et justifier qu'ils définissent bien le plan $\mathcal{P}$.

**Corrigé**

Calculons les coordonnées de deux vecteurs issus de A :

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

et

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 1 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires : leurs premières coordonnées valent respectivement 1 et 0, alors que $\vec{AC}$ n'est pas le vecteur nul.

Ainsi, les points A , B et C ne sont pas alignés. Ils définissent donc bien un plan :

$$\boxed{\mathcal{P} = (ABC)}.$$

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.

**Corrigé**

La droite $\mathcal{D}$ passe par $D(2 ; -1 ; 0)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u}(-1 ; 1 ; 2)$.

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient donc à $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe un réel t tel que

$$\overrightarrow{DM} = t\vec{u}.$$

On obtient :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Déterminer la position relative des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si elles sont sécantes, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

Rappel : déterminer la position relative signifie conclure précisément : droites confondues, strictement parallèles, sécantes ou non coplanaires.

**Corrigé**

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

et un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ est

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

Cherchons si elles possèdent un point commun. Il faut qu'il existe $t, s \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} 2 - t = -1 + 2s \\ -1 + t = -1 + s \\ 2t = 3 - s \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} t + 2s = 3 \\ t - s = 0 \\ 2t + s = 3. \end{cases}$$

La deuxième équation donne $t = s$. En remplaçant dans la première :

$$t + 2t = 3$$

$$3t = 3$$

$$\boxed{t = 1}$$

Donc

$$s = t$$

$$\boxed{s = 1}$$

Il faut encore vérifier la troisième équation :

$$2t + s = 2 \times 1 + 1$$

$$\boxed{2t + s = 3}$$

Elle est vérifiée. Les droites sont donc sécantes.

Avec $t = 1$ dans $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}x_I &= 2 - 1 = 1, \\y_I &= -1 + 1 = 0, \\z_I &= 2 \times 1 = 2,\end{aligned}$$

$$\boxed{I = (1 ; 0 ; 2)}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{I\} \text{ avec } I(1 ; 0 ; 2).}$$

4. Déterminer la position relative de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$, puis déterminer leur éventuel point d'intersection, **sans utiliser d'équation cartésienne de plan**.



Corrigé

Pour tout réel t , un point M de $\mathcal{D}$ a pour coordonnées

$$M(2 - t ; -1 + t ; 2t).$$

Comme $A(0 ; 0 ; 0)$, on a

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2 - t \\ -1 + t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

D'après la caractérisation vectorielle du plan (ABC) ,

$$M \in \mathcal{P} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}.$$

Or

$$\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda + \mu \end{pmatrix}}$$

Ainsi, il faut résoudre

$$\begin{cases} \lambda = 2 - t \\ \mu = -1 + t \\ \lambda + \mu = 2t. \end{cases}$$

En utilisant les deux premières équations dans la troisième :

$$\begin{aligned}(2 - t) + (-1 + t) &= 2t \\ 1 &= 2t\end{aligned}$$

$$\boxed{t = \frac{1}{2}}$$

Pour $t = \frac{1}{2}$, on obtient $\lambda = \frac{3}{2}$ et $\mu = -\frac{1}{2}$: le système est donc compatible.

Il existe un unique point commun ; la droite $\mathcal{D}$ est donc **sécante** au plan $\mathcal{P}$.

Ses coordonnées sont :

$$x_J = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$y_J = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$z_J = 2 \times \frac{1}{2} = 1,$$

$$J = \left(\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2} ; 1 \right)$$

Ainsi,

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{J\}.$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 31, page 40.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 32, page 43.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 31 **[+]** Consolidation Même bilan, avec d'autres valeurs

Dans un repère de l'espace, on considère les points

$$A(1 ; 0 ; 0), \quad B(2 ; 0 ; 1), \quad C(1 ; 1 ; 1),$$

le point $D(3 ; -1 ; 0)$ et le vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{P} = (ABC)$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par D et dirigée par $\vec{u}$. On considère également la droite $\mathcal{D}'$ définie par

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} x = -1 + 3s \\ y = -2 + 2s \\ z = 4 - 2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés et justifier qu'ils définissent bien le plan $\mathcal{P}$.



Corrigé

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 0 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi A , B et C ne sont pas alignés et définissent bien le plan $\mathcal{P} = (ABC)$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.



Corrigé

La droite $\mathcal{D}$ passe par $D(3; -1; 0)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{u}(-1; 1; 2)$. Ainsi :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Déterminer la position relative des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si elles sont sécantes, déterminer leur point d'intersection.



Corrigé

Les vecteurs directeurs

$$\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ne sont pas colinéaires ; les droites ne sont donc pas parallèles.

Pour chercher un point commun, on résout

$$\begin{cases} 3 - t = -1 + 3s \\ -1 + t = -2 + 2s \\ 2t = 4 - 2s \end{cases} \iff \begin{cases} t + 3s = 4 \\ t - 2s = -1 \\ t + s = 2. \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent

$$\begin{aligned} t &= 2s - 1, \\ (2s - 1) + 3s &= 4, \\ 5s &= 5, \\ s &= 1 \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} t &= 2 \times 1 - 1 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

La troisième équation est vérifiée car $1 + 1 = 2$.

Les droites sont donc sécantes. Avec $t = 1$:

$$\begin{aligned}x_I &= 3 - 1 = 2, \\y_I &= -1 + 1 = 0, \\z_I &= 2,\end{aligned}$$

$$\boxed{I = (2 ; 0 ; 2)}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{I\}}.$$

4. Déterminer la position relative de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$, puis leur éventuel point d'intersection, sans utiliser d'équation cartésienne de plan.



Corrigé

Pour tout réel t , un point M de $\mathcal{D}$ a pour coordonnées

$$M(3 - t ; -1 + t ; 2t).$$

Donc, puisque $A(1 ; 0 ; 0)$,

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} (3 - t) - 1 \\ -1 + t \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2 - t \\ -1 + t \\ 2t \end{pmatrix}}$$

Comme

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$M \in \mathcal{P} \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \lambda = 2 - t \\ \mu = -1 + t \\ \lambda + \mu = 2t. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}(2 - t) + (-1 + t) &= 2t \\ 1 &= 2t\end{aligned}$$

$$\boxed{t = \frac{1}{2}}$$

Le système est compatible pour $\lambda = \frac{3}{2}$ et $\mu = -\frac{1}{2}$. Il existe donc un unique point commun : $\mathcal{D}$ est sécante à $\mathcal{P}$.

Avec $t = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}x_J &= 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \\y_J &= -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \\z_J &= 1,\end{aligned}$$

$$\boxed{J = \left(\frac{5}{2} ; -\frac{1}{2} ; 1\right)}$$

Ainsi,

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{J\}.$$

Exercice 32 [*] Approfondissement Synthèse moins guidée

Dans un repère de l'espace, on considère le plan $\mathcal{P} = (ABC)$ avec

$$A(1; -1; 0), \quad B(3; 0; 1), \quad C(0; 2; 2),$$

et les droites

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = -5 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}' : \begin{cases} x = 2s \\ y = s \\ z = 0 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la position relative des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. La réponse doit être entièrement justifiée.



Corrigé

Les vecteurs directeurs sont

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ils ne sont pas colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

Cherchons si elles sont sécantes :

$$\begin{cases} 2 + t = 2s \\ -1 - t = s \\ -5 + 2t = 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent $s = -1 - t$, puis

$$2 + t = 2(-1 - t)$$

$$2 + t = -2 - 2t$$

$$3t = -4$$

$$t = -\frac{4}{3}$$

et

$$s = -1 - \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$s = \frac{1}{3}$$

Vérifions la troisième équation :

$$\begin{aligned} -5 + 2t &= -5 + 2\left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= -5 - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$-5 + 2t = -\frac{23}{3} \neq 0$$

Le système n'a donc pas de solution : les droites ne sont pas sécantes.

Elles ne sont ni parallèles ni sécantes. Dans l'espace, on conclut donc :

$$\mathcal{D} \text{ et } \mathcal{D}' \text{ sont non coplanaires.}$$

2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan $\mathcal{P}$, sans utiliser d'équation cartésienne de plan.

**Corrigé**

Calculons d'abord deux vecteurs directeurs du plan :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 0 - (-1) \\ 1 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 2 - (-1) \\ 2 - 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Pour tout réel t , un point M de $\mathcal{D}$ a pour coordonnées

$$M(2 + t ; -1 - t ; -5 + 2t).$$

Donc

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 + t \\ -t \\ -5 + 2t \end{pmatrix}.$$

On cherche t, λ, μ tels que

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}.$$

Cela donne

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu = 1 + t \\ \lambda + 3\mu = -t \\ \lambda + 2\mu = -5 + 2t. \end{cases}$$

On vérifie que $t = 2$, $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ satisfont les trois équations :

$$\begin{cases} 2 \times 1 - (-1) = 3 = 1 + 2 \\ 1 + 3(-1) = -2 \\ 1 + 2(-1) = -1 = -5 + 2 \times 2. \end{cases}$$

Le système possède donc une solution donnant un point commun. Pour $t = 2$:

$$x_I = 2 + 2 = 4,$$

$$y_I = -1 - 2 = -3,$$

$$z_I = -5 + 2 \times 2 = -1,$$

$$I = (4 ; -3 ; -1)$$

Ainsi,

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{I\}.$$

3. Déterminer l'intersection éventuelle de $\mathcal{D}'$ avec le plan $\mathcal{P}$.

**Corrigé**

Pour tout réel s , un point N de $\mathcal{D}'$ a pour coordonnées

$$N(2s ; s ; 0).$$

Donc

$$\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 2s - 1 \\ s + 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On cherche s, λ, μ tels que

$$\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}.$$

On obtient

$$\begin{cases} 2\lambda - \mu = 2s - 1 \\ \lambda + 3\mu = s + 1 \\ \lambda + 2\mu = 0. \end{cases}$$

La troisième équation donne $\lambda = -2\mu$. En remplaçant dans la deuxième :

$$-2\mu + 3\mu = s + 1$$

$$\boxed{\mu = s + 1}$$

puis

$$\lambda = -2(s + 1)$$

$$\boxed{\lambda = -2s - 2}$$

On remplace dans la première équation :

$$2(-2s - 2) - (s + 1) = 2s - 1$$

$$-4s - 4 - s - 1 = 2s - 1$$

$$-5s - 5 = 2s - 1$$

$$-7s = 4$$

$$\boxed{s = -\frac{4}{7}}$$

Il existe donc un unique point commun. Ses coordonnées sont

$$x_J = 2 \left(-\frac{4}{7} \right) = -\frac{8}{7},$$

$$y_J = -\frac{4}{7},$$

$$z_J = 0,$$

$$\boxed{J = \left(-\frac{8}{7} ; -\frac{4}{7} ; 0 \right)}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{D}' \cap \mathcal{P} = \{J\}.$$

Thème X

Approfondissement – Hors programme

Les deux exercices suivants prolongent la caractérisation vectorielle d'un plan. La représentation paramétrique d'un plan n'est pas une capacité exigible au programme de Terminale spécialité.

Exercice 33 [*] Approfondissement Construire une représentation paramétrique d'un plan

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère le point

$$A(1 ; 2 ; -1)$$

et les deux vecteurs

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{P}$ le plan passant par le point A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Justifier que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.



Corrigé

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étaient colinéaires, il existerait un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. La première coordonnée donnerait alors

$$2 = k \times 0 = 0,$$

ce qui est impossible.

Ainsi,

$$\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas colinéaires.}}$$

2. Donner une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$.



Corrigé

Un point $M(x ; y ; z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si et seulement s'il existe deux réels t et s tels que

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}.$$

Or

$$t\vec{u} + s\vec{v} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ -t + 4s \\ 3t - 2s \end{pmatrix}.$$

Comme $A(1 ; 2 ; -1)$, on obtient donc

$$\boxed{\mathcal{P} : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t + 4s \\ z = -1 + 3t - 2s \end{cases} \quad (t ; s) \in \mathbb{R}^2.}$$

3. Le point $B(3 ; 5 ; 0)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

**Corrigé**

Le point $B(3 ; 5 ; 0)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ s'il existe deux réels t et s tels que

$$\begin{cases} 3 = 1 + 2t \\ 5 = 2 - t + 4s \\ 0 = -1 + 3t - 2s \end{cases}$$

La première équation donne

$$3 = 1 + 2t$$

$$2t = 2$$

$$\boxed{t = 1}$$

Puis la deuxième donne

$$5 = 2 - 1 + 4s$$

$$5 = 1 + 4s$$

$$4s = 4$$

$$\boxed{s = 1}$$

Enfin,

$$-1 + 3 \times 1 - 2 \times 1 = 0.$$

Les trois équations sont donc vérifiées pour $t = 1$ et $s = 1$. Ainsi,

$$\boxed{B \in \mathcal{P}.}$$

4. Le point $C(5 ; 0 ; 2)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$?

**Corrigé**

Le point $C(5 ; 0 ; 2)$ appartiendrait au plan $\mathcal{P}$ s'il existait deux réels t et s tels que

$$\begin{cases} 5 = 1 + 2t \\ 0 = 2 - t + 4s \\ 2 = -1 + 3t - 2s \end{cases}$$

La première équation donne

$$5 = 1 + 2t$$

$$2t = 4$$

$$\boxed{t = 2}$$

La deuxième donne alors

$$0 = 2 - 2 + 4s$$

$$0 = 4s$$

$$\boxed{s = 0}$$

Mais, avec $t = 2$ et $s = 0$,

$$-1 + 3 \times 2 - 2 \times 0 = 5 \neq 2.$$

La troisième équation n'est donc pas vérifiée. Par conséquent,

$$\boxed{C \notin \mathcal{P}.}$$

Exercice 34 [*] **Approfondissement Plan défini par trois points**

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points

$$A(0 ; 1 ; 2), \quad B(2 ; 0 ; 3), \quad C(1 ; 3 ; -1).$$

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

**Corrigé**

Calculons les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - 0 \\ 0 - 1 \\ 3 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 3 - 1 \\ -1 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Si ces vecteurs étaient colinéaires, la première coordonnée donnerait un coefficient 2, tandis que la deuxième donnerait un coefficient $-\frac{1}{2}$. Ils ne sont donc pas colinéaires.

Ainsi,

A , B et C ne sont pas alignés.

2. En déduire une représentation paramétrique du plan (ABC) .

**Corrigé**

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et dirigent le plan (ABC) . Un point M appartient donc à (ABC) si et seulement s'il existe deux réels t et s tels que

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}.$$

On obtient alors

$$(ABC) : \begin{cases} x = 2t + s \\ y = 1 - t + 2s \\ z = 2 + t - 3s \end{cases} \quad (t ; s) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Le point $D(5 ; 1 ; 1)$ appartient-il au plan (ABC) ?

**Corrigé**

On cherche deux réels t et s tels que

$$\begin{cases} 5 = 2t + s \\ 1 = 1 - t + 2s \\ 1 = 2 + t - 3s \end{cases}$$

Prenons $t = 2$ et $s = 1$. Alors

$$2 \times 2 + 1 = 5, \quad 1 - 2 + 2 \times 1 = 1, \quad 2 + 2 - 3 \times 1 = 1.$$

Les trois équations sont vérifiées. Par conséquent,

$$\boxed{D \in (ABC)}.$$

4. Le point $E(1 ; 5 ; 6)$ appartient-il au plan (ABC) ?

**Corrigé**

On cherche deux réels t et s tels que

$$\begin{cases} 1 = 2t + s \\ 5 = 1 - t + 2s \\ 6 = 2 + t - 3s \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent

$$\begin{cases} 2t + s = 1 \\ -t + 2s = 4 \end{cases}$$

La première équation donne $s = 1 - 2t$. En remplaçant dans la deuxième :

$$-t + 2(1 - 2t) = 4$$

$$-t + 2 - 4t = 4$$

$$-5t = 2$$

$$\boxed{t = -\frac{2}{5}}$$

Puis

$$\begin{aligned} s &= 1 - 2\left(-\frac{2}{5}\right) \\ &= 1 + \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{s = \frac{9}{5}}$$

Avec ces valeurs, le membre de droite de la troisième équation vaut

$$\begin{aligned} 2 + t - 3s &= 2 - \frac{2}{5} - 3 \times \frac{9}{5} \\ &= \frac{10}{5} - \frac{2}{5} - \frac{27}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{2 + t - 3s = -\frac{19}{5}}$$

Or $-\frac{19}{5} \neq 6$. La troisième équation n'est donc pas vérifiée.

Ainsi,

$$\boxed{E \notin (ABC)}.$$

↩ **Fin du TD** ↪