MATH93

Terminale Spécialité Mathématiques

Recueil d'exercices – Entraînement – Méthodes

TD – EXERCICES

Chapitre 3

Suites numériques et limites

Version sujet – Version imprimable

Sommaire du TD

I Rappels : Généralités 2

II Rappels : suites arithmétiques et géométriques 3

III Suites convergentes 5

IV À partir de la définition de la limite 6

V Suites divergentes 7

VI Opérations sur les limites 7

VII Théorèmes de comparaison 8

VIII Limite d'une suite géométrique 8

IX Limites des suites monotones 9

X Complément : algorithmes de seuil 9

XI Bilan : en route vers le bac 11

XII [HP] Hors programme : Now We Can Talk – en route vers le supérieur 17

Objectifs du TD

Ce TD a pour objectif de consolider les méthodes du chapitre sur les suites numériques et leurs limites.

- **Calculer :** déterminer les premiers termes d'une suite, étudier un sens de variation, manipuler les suites arithmétiques ou géométriques, calculer des sommes et des limites.
- **Raisonner :** utiliser une définition de limite, démontrer une propriété par récurrence, exploiter les théorèmes de comparaison, le théorème des gendarmes et le théorème de convergence monotone.
- **Communiquer :** rédiger une preuve structurée, justifier un passage à la limite, interpréter un résultat dans un contexte de modélisation ou d'algorithmique.

Thème I Rappels : Généralités

Exercice 1 Sens de variation, majoration et minoration

1. Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. a. $u_n = 10^n$, $n \geqslant 0$; **1. b.** $v_n = 3^n - n$, $n \geqslant 0$; **1. c.** $w_n = \dfrac{3^n}{n}$, $n \geqslant 1$.

2. Pour chacune des suites, proposer un minorant, puis dire si la suite semble majorée.

3. On considère la suite (a_n) définie par $a_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. a. Montrer que (a_n) est décroissante.

3. b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 < a_n \leqslant 3$.

Exercice 2 Suites imbriquées

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant v_n$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

4. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.

Thème II Rappels : suites arithmétiques et géométriques

Exercice 3 Suite arithmético-géométrique : deux méthodes

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Méthode 1 : conjecturer puis démontrer le terme général.

2. a. À partir des premiers termes, conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

2. b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n.$$

3. Méthode 2 : retrouver la suite auxiliaire. On cherche un réel α tel que la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$w_n = u_n - \alpha$$

soit géométrique de raison 0,8.

3. a. Montrer que cela revient à choisir α tel que

$$0{,}8\alpha + 18 = \alpha.$$

3. b. Déterminer α, puis retrouver l'expression explicite de u_n.

4. Déterminer les variations de (u_n).

5. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 4 Suite auxiliaire arithmétique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

2. b. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

3. En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 Conjecturer une formule explicite puis la démontrer

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 6 Sommes de termes géométriques

1. Calculer les sommes suivantes :

1. a. $S_1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$;

1. b. $S_2 = 3 + 3 \times 0{,}8 + 3 \times 0{,}8^2 + \cdots + 3 \times 0{,}8^{12}$;

1. c. $S_3 = 5 \sum_{k=0}^{n} 0{,}6^k$;

1. d. $S_4 = \sum_{k=4}^{n} 2 \times 3^k$ pour $n \geqslant 4$.

2. Une suite géométrique (q_n) vérifie $q_2 = 18$ et sa raison est $\dfrac{2}{3}$.

2. a. Exprimer q_n en fonction de n.

2. b. Calculer $q_2 + q_3 + \cdots + q_{12}$.

Thème III Suites convergentes

Exercice 7 Travailler la définition d'une limite finie

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_9, puis conjecturer la limite de (u_n).

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$|u_n - 1| < \varepsilon.$$

3. En déduire que (u_n) converge vers 1.

4. Résoudre l'inéquation $|u_n - 1| < 10^{-4}$.

Exercice 8 Suite convergente et suite bornée

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

1. Montrer que (u_n) converge vers 3.

2. Montrer que (u_n) est bornée.

3. La suite (u_n) est-elle monotone ? Justifier.

Thème IV À partir de la définition de la limite

Exercice 9 Dépasser un seuil sans utiliser la monotonie

On admet que la suite (u_n) converge vers $\mathrm{e}^{\,2}$.
On ne suppose pas que la suite (u_n) est monotone.
Justifier, uniquement à partir de la définition de la limite, qu'il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on ait :

$$u_n > \mathrm{e}^{\,2} - 0{,}01.$$

Exercice 10 Entrer définitivement dans un intervalle

On admet que la suite (v_n) converge vers $\mathrm{e}^{\,-1}$.
Justifier, uniquement à partir de la définition de la limite, qu'il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on ait :

$$\mathrm{e}^{\,-1} - 0{,}01 < v_n < \mathrm{e}^{\,-1} + 0{,}01.$$

Exercice 11 Comparer deux suites à partir de leurs limites

On admet que la suite (u_n) converge vers 5.
On admet que la suite (v_n) converge vers 6.
Montrer qu'il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on ait :

$$u_n < v_n.$$

Thème V Suites divergentes

Exercice 12 Limite infinie et seuil

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = n^3 - n^2 + 3n + 1.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_5 et conjecturer la limite de (u_n).

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant n$.

3. En déduire rigoureusement la limite de (u_n).

4. Déterminer un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $u_n \geqslant 1000$.

Exercice 13 Une suite bornée divergente : la suite alternée

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

1. Déterminer les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3.

2. Montrer que (u_{2n}) est constante et que (u_{2n+1}) est constante.

3. En déduire que (u_n) ne converge pas.

4. La suite (u_n) est-elle bornée ?

Thème VI Opérations sur les limites

Exercice 14 Calculer des limites sans forme indéterminée

Calculer les limites des suites suivantes.

1. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(3 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$, $n \geqslant 1$;

2. $v_n = \left(\dfrac{1}{n} - 2\right)(3 + \sqrt{n})$, $n \geqslant 1$;

3. $w_n = \dfrac{5 - \sqrt{26}}{2n^2 + 1}$;

4. $x_n = \dfrac{n^2 + 1}{2 - \sqrt{2}}$;

5. $y_n = n - 3n^2$;

6. $z_n = \dfrac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{n} + n^2}$, $n \geqslant 1$.

Exercice 15 Lever une forme indéterminée

Calculer les limites suivantes.

1. $a_n = \dfrac{2n^2 + 3n}{n^2 + n + 1}$;

2. $b_n = \dfrac{2n^2 + 3n}{n + 1}$;

3. $c_n = \dfrac{2n + 3}{n^2 + 1}$;

4. $d_n = \sqrt{n^2 + n} - n$;

5. $e_n = \dfrac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n} + 1}$;

6. $f_n = \dfrac{n^2 - 4n + 1}{3n^2 + n - 5}$.

Thème VII Théorèmes de comparaison

Exercice 16 Comparaison pour les limites infinies

1. On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$u_n \geqslant \sqrt{n}.$$

Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

2. On considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = n + (-1)^n \sqrt{n}.$$

Montrer que (v_n) diverge vers $+\infty$.

3. On considère la suite (w_n) définie par

$$w_n = -n^2 + 5\sin n.$$

Montrer que (w_n) diverge vers $-\infty$.

Exercice 17 Théorème des gendarmes

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$ converge vers 0.

2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 2$ $(n \geqslant 1)$ converge vers 2.

3. Montrer que la suite (s_n) définie par

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k}$$

converge vers 0.

Thème VIII Limite d'une suite géométrique

Exercice 18 [FLASH] Automatismes : puissances, exponentielle et sommes

Source bac : Exercice de synthèse type baccalauréat, inspiré des questions classiques des sujets 2023–2026 sur les limites de suites et les sommes géométriques.

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite proposée.

1. $u_n = \dfrac{1+2^n}{3+5^n}$.

2. $v_n = \dfrac{\mathrm{e}^{\,n} + 3^n}{2\,\mathrm{e}^{\,n} + 5^n}$.

3. $S_n = 1 + \mathrm{e}^{\,-1} + \mathrm{e}^{\,-2} + \cdots + \mathrm{e}^{\,-n}$. Exprimer S_n en fonction de n, puis déterminer sa limite.

Exercice 19 Utiliser la limite de q^n

Calculer les limites suivantes.

1. $u_n = 4 \times 0{,}7^n + 3$;

2. $v_n = 2 - 5 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$;

3. $w_n = (-0{,}8)^n$;

4. $x_n = 3^n - 2n$;

5. $a_n = \dfrac{2^n+1}{3^n}$;

6. $b_n = 5\sum_{k=0}^{n} 0{,}8^k$.

Thème IX Limites des suites monotones

Exercice 20 Récurrence et convergence monotone

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 6$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. En déduire que (u_n) converge.

4. Déterminer sa limite.

5. On pose $v_n = 6 - u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique puis retrouver l'expression de u_n.

Exercice 21 Méthode de Héron : un exercice guidé

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - \sqrt{2} = \frac{(x-\sqrt{2})^2}{2x}.$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

4. En déduire que (u_n) est décroissante puis convergente.

5. Déterminer sa limite.

Thème X Complément : algorithmes de seuil

Exercice 22 Python et suites définies par récurrence

On considère la suite (r_n) définie par

$$r_0 = 50000 \qquad \text{et} \qquad r_{n+1} = 0{,}96r_n.$$

1. Compléter mentalement les premières valeurs r_1, r_2.

2. La fonction suivante renvoie le terme de rang n.

```
def terme_r(n):
    r = 50000
    for k in range(n):
        r = 0.96 * r
    return r
```

3. Expliquer pourquoi la boucle est répétée n fois.

4. Écrire une fonction Python qui renvoie la liste $[r_0, r_1, \ldots, r_N]$.

5. Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $r_n < 30000$.

Exercice 23 [BAC] D'après Bac 2026 : programmer une somme cumulée

Source bac : Exercice inspiré des sujets 2026 : suite récurrente, somme de termes et programmation Python.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2.$$

1. Calculer u_1, puis S_0 et S_1.

2. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la liste

$$[S_0, S_1, \ldots, S_p].$$

```
from math import sqrt

def sommes_cumulees(p):
    u = 1
    S = ..........
    L = [S]
    for k in range(p):
        u = ..............................
        S = ..............................
        L.append(S)
    return L
```

3. Expliquer pourquoi la variable `u` doit être mise à jour avant la variable `S` dans la boucle.

4. On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$. Montrer que $S_n \geqslant n+1$, puis déterminer la limite de (S_n).

Thème XI

Bilan : en route vers le bac

Exercice 24 [BAC] D'après Bac 2025 : définition de la convergence et seuil

Source bac : Bac 2025 Métropole Sujet 1, exercice 4 - partie A.

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.
La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares, et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

$$u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au 1er juillet 2025.

2. On considère la fonction h définie sur $[0\ ;\ 20]$ par $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$. On admet que h est croissante sur cet intervalle.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

2. b. En déduire que la suite (u_n) converge.

2. c. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à 15.

3. Les biologistes souhaitent savoir quand la posidonie dépassera 14 hectares.

3. a. Sans calcul, justifier que cela se produira.

3. b. Compléter l'algorithme Python ci-dessous pour déterminer ce rang.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while ..........:
        n = n + 1
        u = -0.02*u**2 + 1.3*u
    return n
```

Exercice 25 [BAC] D'après Bac 2025 : médicament, moyenne et définition de la limite

Source bac : Bac 2025 Asie Sujet 1, exercice 3.

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 mL d'un médicament. On note u_n la quantité de médicament, en mL, présente dans l'organisme immédiatement après n prises. On a $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_{n+1} = 2 + 0{,}8u_n.$$

Partie A

1. Calculer la valeur u_2.

2. Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}.$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et donner une interprétation.

4. Soit N un entier naturel strictement positif. L'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ? Interpréter.

5. À l'aide de la calculatrice ou d'un court programme Python, déterminer à partir de combien de prises la quantité présente dans l'organisme est strictement supérieure à 9 mL.

Partie B

On définit $S_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ pour tout entier naturel n strictement positif. On admet que (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n.$$

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

4. On donne la fonction `mystere` suivante. Dans le contexte de l'exercice, que représente `mystere(9)` ?

```
1 def mystere(k):
2     n = 1
3     s = 2
4     while s < k:
5         n = n + 1
6         s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
7     return n
```

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

Exercice 26 [!] Bilan – [BAC] D'après Bac 2026 : passer à la limite dans une relation de récurrence

Source bac : Baccalauréat spécialité mathématiques, Métropole, jour 1, 16 juin 2026, exercice 3, partie B.

Lors d'une phase de refroidissement, on modélise la température d'une pièce par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{\,-0{,}1n}.$$

1. Montrer que $u_1 = 19{,}72$.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 10$.

3. On admet que la suite (u_n) est décroissante. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

4. a. Justifier que cette limite est solution de l'équation $x = 0{,}965x + 0{,}35$.

4. b. Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 27, page 13.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 28, page 14.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 27 [+] Consolidation : suite auxiliaire et minoration

Source bac : Exercice de synthèse type baccalauréat.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 1$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

2. a. Justifier que la suite (a_n) est bien définie.

2. b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n \geqslant n + 2$.

4. En déduire la limite de la suite (a_n), puis celle de la suite (u_n).

Exercice 28 [*] Approfondissement : deux méthodes pour une même limite

Source bac : Exercice de synthèse type baccalauréat.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{6u_n^2}{3+u_n^2}}.$$

1. Montrer par récurrence que $1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

3. En déduire que la suite (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

4. a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.

4. b. En déduire une expression de v_n, puis retrouver la limite de (u_n).

Exercice 29 [BAC] D'après Bac 2025 : deux suites vers une même limite

Source bac : Baccalauréat spécialité mathématiques, Métropole, jour 1, 9 septembre 2025, exercice 3.

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x-2}$.

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
Variations de f	2 ↗	$+\infty$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

2. b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On appelle ℓ la limite de (u_n). On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer ℓ.

4. On considère la fonction `rang` ci-dessous.

```
1  from math import sqrt
2  def rang(a):
3      n = 0
4      u = 6
5      while u > a:
6          u = sqrt(3*u - 2)
7          n = n + 1
8      return n
```

4. a. Pourquoi peut-on affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur ?

4. b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang(a)` renvoie-t-elle un résultat ?

Partie B

On admet que $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{v_n}$.

1. Calculer v_1.

2. Pour tout n, on pose $w_n = \dfrac{v_n - 1}{v_n - 2}$.

2. a. Démontrer que (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser w_0.

2. b. En déduire que $v_n = 2 + \dfrac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$.

2. c. Calculer la limite de (v_n).

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2{,}01$.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, les termes u_n et v_n appartiennent à l'intervalle $]1{,}99\ ;\ 2{,}01[$.

Exercice 30 [BAC] D'après Bac 2026 : probabilités, suites et Python

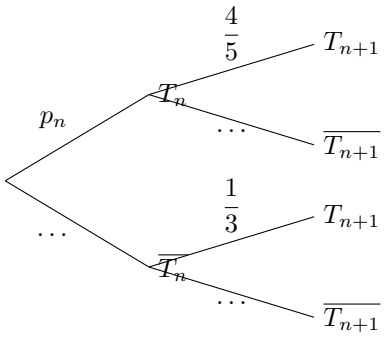
Source bac : Baccalauréat spécialité mathématiques, Asie-Pacifique, jour 1, 9 juin 2026, exercice 1.

Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre. On note T_n l'événement : « Le tireur atteint le centre au n-ième tir » et $p_n = P(T_n)$.

- $p_1 = \dfrac{1}{2}$;
- s'il a atteint le centre au tir précédent, la probabilité d'atteindre à nouveau le centre est $\dfrac{4}{5}$;
- s'il n'a pas atteint le centre au tir précédent, la probabilité d'atteindre le centre est $\dfrac{1}{3}$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = \dfrac{17}{30}$.

2. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant.



3. Montrer que $p_{n+1} = \dfrac{7}{15}p_n + \dfrac{1}{3}$.

4. On pose $u_n = p_n - \dfrac{5}{8}$.

4. a. Montrer que (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{7}{15}$.

4. b. Déterminer une expression de u_n.

4. c. En déduire une expression de p_n.

5. Déterminer la limite de (p_n) et l'interpréter.

6. Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0{,}6$.

```
def seuil():
    n = 1
    p = 0.5
    while ..........:
        n = ..........
        p = ..........
    return ..........
```

7. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $p_n \geqslant 0{,}6$.

Thème XII [HP] Hors programme : Now We Can Talk – en route vers le supérieur

Exercice 31 Suites extraites et valeurs d'adhérence

Cet exercice n'est pas exigible au baccalauréat. Il sert à comprendre plus finement pourquoi certaines suites bornées ne convergent pas.

1. On considère $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$.

1. a. Calculer u_{2n} et u_{2n+1}.

1. b. Déterminer les limites des deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

1. c. En déduire que (u_n) ne converge pas.

2. On considère une suite (a_n) et une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

2. a. Expliquer pourquoi $(a_{\varphi(n)})$ est appelée une suite extraite de (a_n).

2. b. Montrer que si (a_n) converge vers ℓ, alors toute suite extraite $(a_{\varphi(n)})$ converge aussi vers ℓ.

Exercice 32 Suites adjacentes

Cet exercice n'est pas exigible au baccalauréat. On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

- (u_n) est croissante ;
- (v_n) est décroissante ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$;
- $v_n - u_n \longrightarrow 0$.

1. Montrer que (u_n) est majorée et que (v_n) est minorée.

2. En déduire que les deux suites convergent.

3. Montrer que leurs limites sont égales.

4. Application : on pose, pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.