MATH93

Terminale Spécialité Mathématiques

Recueil d'exercices – Entraînement – Méthodes

TD – EXERCICES

Chapitre 3

Suites numériques et limites

Version corrigée – Version imprimable

Sommaire du TD

I Rappels : Généralités 2

II Rappels : suites arithmétiques et géométriques 5

III Suites convergentes 12

IV À partir de la définition de la limite 15

V Suites divergentes 17

VI Opérations sur les limites 19

VII Théorèmes de comparaison 23

VIII Limite d'une suite géométrique 25

IX Limites des suites monotones 29

X Complément : algorithmes de seuil 33

XI Bilan : en route vers le bac 37

XII [HP] Hors programme : Now We Can Talk – en route vers le supérieur 62

Objectifs du TD

Ce TD a pour objectif de consolider les méthodes du chapitre sur les suites numériques et leurs limites.

- **Calculer :** déterminer les premiers termes d'une suite, étudier un sens de variation, manipuler les suites arithmétiques ou géométriques, calculer des sommes et des limites.
- **Raisonner :** utiliser une définition de limite, démontrer une propriété par récurrence, exploiter les théorèmes de comparaison, le théorème des gendarmes et le théorème de convergence monotone.
- **Communiquer :** rédiger une preuve structurée, justifier un passage à la limite, interpréter un résultat dans un contexte de modélisation ou d'algorithmique.

Thème I Rappels : Généralités

Exercice 1 Sens de variation, majoration et minoration

1. Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. a. $u_n = 10^n$, $n \geqslant 0$; **1. b.** $v_n = 3^n - n$, $n \geqslant 0$; **1. c.** $w_n = \dfrac{3^n}{n}$, $n \geqslant 1$.

Corrigé

Étude des variations.

1. a. Pour $u_n = 10^n$, on compare deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 10^{n+1} - 10^n \\ &= 10^n(10-1) \\ &= 9 \times 10^n. \end{aligned}$$

Or $10^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Ainsi, la suite (u_n) est **strictement croissante**.

1. b. Pour $v_n = 3^n - n$, on calcule :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \big(3^{n+1} - (n+1)\big) - (3^n - n) \\ &= 3^{n+1} - 3^n - 1 \\ &= 2 \times 3^n - 1. \end{aligned}$$

Comme $3^n \geqslant 1$, on a $2 \times 3^n - 1 \geqslant 1 > 0$. Donc (v_n) est **strictement croissante**.

1. c. Pour $w_n = \dfrac{3^n}{n}$, avec $n \geqslant 1$, les termes sont strictement positifs. On peut donc comparer le quotient :

$$\begin{aligned} \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{3^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{3^n} \\ &= \frac{3n}{n+1}. \end{aligned}$$

Or, pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} - 1 = \frac{3n}{n+1} - 1 = \frac{2n-1}{n+1}.$$

Comme $n \geqslant 1$, on a $2n - 1 > 0$ et $n + 1 > 0$. Ainsi

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} - 1 > 0.$$

Donc $\dfrac{w_{n+1}}{w_n} > 1$, puis $w_{n+1} > w_n$ puisque $w_n > 0$. La suite (w_n) est donc **strictement croissante**.

2. Pour chacune des suites, proposer un minorant, puis dire si la suite semble majorée.

Corrigé

Minorants et majorants. Les trois suites ont des termes positifs, donc 0 est un minorant de chacune d'elles. De plus, les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont croissantes et leurs termes deviennent arbitrairement grands ; elles ne semblent donc pas majorées.

3. On considère la suite (a_n) définie par $a_n = 2 + \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. a. Montrer que (a_n) est décroissante.

3. b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 < a_n \leqslant 3$.

Corrigé

Étude de la suite (a_n).

3. a. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(2 + \frac{1}{n+2}\right) - \left(2 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+1-(n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, (a_n) est **strictement décroissante**.

3. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n+1 \geqslant 1$, donc

$$0 < \frac{1}{n+1} \leqslant 1.$$

En ajoutant 2 dans les trois membres, on obtient :

$$2 < 2 + \frac{1}{n+1} \leqslant 3.$$

Donc, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{2 < a_n \leqslant 3}.$$

Exercice 2 Suites imbriquées

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant v_n$.

Corrigé

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} > 0.$$

Donc

$$\boxed{u_n \leqslant v_n}.$$

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Corrigé

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

La suite (u_n) est donc **strictement croissante**.

3. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

Corrigé

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right) \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n-(n+1)}{n(n+1)^2} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc **strictement décroissante**.

4. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.

Corrigé

Comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geqslant u_1$ pour tout $n \geqslant 1$. De plus, d'après la question 1,

$$u_n \leqslant v_n.$$

Comme (v_n) est décroissante, on a $v_n \leqslant v_1$ pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi,

$$u_1 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_1.$$

Donc (u_n) et (v_n) sont toutes les deux bornées.

Thème II Rappels : suites arithmétiques et géométriques

Exercice 3 Suite arithmético-géométrique : deux méthodes

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0{,}8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

Corrigé

On calcule successivement :

$$u_1 = 0{,}8 \times 65 + 18 = 70 \qquad \text{et} \qquad u_2 = 0{,}8 \times 70 + 18 = 74.$$

2. Méthode 1 : conjecturer puis démontrer le terme général.

2. a. À partir des premiers termes, conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

2. b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n.$$

Corrigé

Méthode 1 : conjecture puis récurrence.

2. a. Les premiers termes 65, 70, 74 augmentent et se rapprochent de 90. La forme attendue est celle d'une suite arithmético-géométrique :

$$\boxed{u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n}.$$

2. b. Démontrons cette formule par récurrence.

Pour tout entier naturel n, on note

$$P(n) : \quad u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n.$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$,
  $$90 - 25 \times 0{,}8^0 = 90 - 25 = 65 = u_0.$$
  Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité**
  Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que
  $$u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n.$$
  On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que
  $$u_{n+1} = 90 - 25 \times 0{,}8^{n+1}.$$

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
$u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n$	$\boxed{u_{n+1} = 90 - 25 \times 0{,}8^{n+1}}$

On suppose donc

$$u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n.$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0{,}8u_n + 18 \\ &= 0{,}8\left(90 - 25 \times 0{,}8^n\right) + 18 \\ &= 72 - 25 \times 0{,}8^{n+1} + 18 \\ &= 90 - 25 \times 0{,}8^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :

$$\boxed{u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n}.$$

3. Méthode 2 : retrouver la suite auxiliaire. On cherche un réel α tel que la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$w_n = u_n - \alpha$$

soit géométrique de raison 0,8.

3. a. Montrer que cela revient à choisir α tel que

$$0{,}8\alpha + 18 = \alpha.$$

3. b. Déterminer α, puis retrouver l'expression explicite de u_n.

Corrigé

Méthode 2 : suite auxiliaire.

3. a. On pose $w_n = u_n - \alpha$. On veut que (w_n) soit géométrique de raison 0,8, c'est-à-dire :

$$w_{n+1} = 0{,}8w_n.$$

Or

$$w_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 0{,}8u_n + 18 - \alpha,$$

et

$$0{,}8w_n = 0{,}8(u_n - \alpha) = 0{,}8u_n - 0{,}8\alpha.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} w_{n+1} = 0{,}8w_n &\iff 0{,}8u_n + 18 - \alpha = 0{,}8u_n - 0{,}8\alpha \\ &\iff 18 - \alpha = -0{,}8\alpha \\ &\iff 18 = 0{,}2\alpha \\ &\iff \alpha = 90. \end{aligned}$$

3. b. Avec $\alpha = 90$, on a $w_n = u_n - 90$. Alors

$$w_{n+1} = 0{,}8w_n.$$

Donc (w_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme

$$w_0 = u_0 - 90 = 65 - 90 = -25.$$

Ainsi,

$$w_n = -25 \times 0{,}8^n.$$

Comme $w_n = u_n - 90$, on retrouve :

$$\boxed{u_n = 90 - 25 \times 0{,}8^n}.$$

4. Déterminer les variations de (u_n).

Corrigé

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(90 - 25 \times 0{,}8^{n+1}\right) - \left(90 - 25 \times 0{,}8^n\right) \\ &= 25 \times 0{,}8^n (1 - 0{,}8) \\ &= 5 \times 0{,}8^n > 0. \end{aligned}$$

Donc (u_n) est **strictement croissante**.

5. Déterminer la limite de (u_n).

Corrigé

Comme $-1 < 0{,}8 < 1$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} 0{,}8^n = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 90}.$$

Exercice 4 Suite auxiliaire arithmétique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

Corrigé

On calcule :

$$u_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}, \qquad u_2 = \frac{\frac{1}{4}}{1 + 2 \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}.$$

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

2. b. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.

Corrigé

2. a. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$. Pour tout entier naturel n, on note

$$P(n) : \quad u_n > 0.$$

- **Initialisation**
  $u_0 = \dfrac{1}{2} > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité**
  Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $u_n > 0$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} > 0$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
$u_n > 0$	$\boxed{u_{n+1} > 0}$

Supposons donc que $u_n > 0$. Alors $1 + 2u_n > 0$, donc

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n} > 0.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :

$$\boxed{u_n > 0}.$$

2. b. Comme $u_n > 0$, la suite (v_n) est bien définie. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} \\ &= \frac{1 + 2u_n}{u_n} \\ &= \frac{1}{u_n} + 2 \\ &= v_n + 2. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite **arithmétique** de raison 2. Son premier terme est

$$v_0 = \frac{1}{u_0} = 2.$$

3. En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.

Corrigé

Pour tout entier naturel n,

$$v_n = v_0 + nr = 2 + 2n.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \boxed{\frac{1}{2n+2}}.$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Corrigé

Comme $2n + 2 \to +\infty$, on a

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}.$$

Exercice 5 Conjecturer une formule explicite puis la démontrer

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Corrigé

On calcule :

$$u_1 = 3 \times 2 - 2 = 4, \qquad u_2 = 3 \times 4 - 2 = 10, \qquad u_3 = 3 \times 10 - 2 = 28.$$

On remarque que

$$2 = 3^0 + 1, \qquad 4 = 3^1 + 1, \qquad 10 = 3^2 + 1, \qquad 28 = 3^3 + 1.$$

2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n.

Corrigé

On conjecture donc que, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{u_n = 3^n + 1}.$$

3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Corrigé

Démontrons cette conjecture par récurrence.
Pour tout entier naturel n, on note

$$P(n) : \quad u_n = 3^n + 1.$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, on a
  $$3^0 + 1 = 2 = u_0.$$
  Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité**
  Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $u_n = 3^n + 1$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 3^{n+1} + 1$.

  Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
$u_n = 3^n + 1$	$\boxed{u_{n+1} = 3^{n+1} + 1}$

  On suppose donc $u_n = 3^n + 1$. Alors :

  $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - 2 \\ &= 3(3^n + 1) - 2 \\ &= 3^{n+1} + 3 - 2 \\ &= 3^{n+1} + 1. \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.
- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :
  $$\boxed{u_n = 3^n + 1}.$$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Corrigé

Comme $3 > 1$, on a $3^n \to +\infty$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}.$$

Exercice 6 Sommes de termes géométriques

1. Calculer les sommes suivantes :

1. a. $S_1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$;

1. b. $S_2 = 3 + 3 \times 0{,}8 + 3 \times 0{,}8^2 + \cdots + 3 \times 0{,}8^{12}$;

1. c. $S_3 = 5\sum_{k=0}^{n} 0{,}6^k$;

1. d. $S_4 = \sum_{k=4}^{n} 2 \times 3^k$ pour $n \geqslant 4$.

Corrigé

On utilise la formule de somme géométrique : si $q \neq 1$, alors

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

1. a.

$$S_1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10} = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \boxed{2^{11} - 1}.$$

1. b. Il s'agit d'une somme géométrique de premier terme 3, de raison 0,8 et comportant 13 termes :

$$S_2 = 3\frac{1 - 0{,}8^{13}}{1 - 0{,}8} = \boxed{15\left(1 - 0{,}8^{13}\right)}.$$

1. c.

$$S_3 = 5\sum_{k=0}^{n} 0{,}6^k = 5\frac{1 - 0{,}6^{n+1}}{1 - 0{,}6} = \boxed{12{,}5\left(1 - 0{,}6^{n+1}\right)}.$$

1. d. Pour $n \geqslant 4$,

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=4}^{n} 2 \times 3^k \\ &= 2\left(3^4 + 3^5 + \cdots + 3^n\right) \\ &= 2 \times 3^4 \frac{1 - 3^{n-3}}{1 - 3} \\ &= \boxed{81\left(3^{n-3} - 1\right)}. \end{aligned}$$

2. Une suite géométrique (q_n) vérifie $q_2 = 18$ et sa raison est $\dfrac{2}{3}$.

2. a. Exprimer q_n en fonction de n.

2. b. Calculer $q_2 + q_3 + \cdots + q_{12}$.

Corrigé

2. a. La suite (q_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et $q_2 = 18$. Donc, pour tout entier n,

$$\boxed{q_n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}.$$

2. b. La somme $q_2 + q_3 + \cdots + q_{12}$ contient 11 termes, de premier terme 18 et de raison $\dfrac{2}{3}$. Ainsi,

$$q_2 + q_3 + \cdots + q_{12} = 18\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}{1-\frac{2}{3}} = \boxed{54\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right)}.$$

Thème III Suites convergentes

Exercice 7 Travailler la définition d'une limite finie

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Corrigé

Définition d'une limite finie

Dire que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ signifie que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$,

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Dans une preuve, le rang N peut dépendre de ε.

1. Calculer u_0, u_1, u_2 et u_9, puis conjecturer la limite de (u_n).

Corrigé

On calcule :

$$u_0 = 2, \qquad u_1 = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5, \qquad u_2 = 1 + \frac{1}{3}, \qquad u_9 = 1 + \frac{1}{10} = 1{,}1.$$

Les termes semblent se rapprocher de 1. On conjecture donc que (u_n) converge vers 1.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$|u_n - 1| < \varepsilon.$$

Corrigé

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier naturel n,

$$|u_n - 1| = \left|1 + \frac{1}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}.$$

On veut obtenir

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Cette inégalité est vérifiée dès que

$$n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Il suffit donc de choisir un entier N tel que

$$N + 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Alors, pour tout $n \geqslant N$, on a $n + 1 \geqslant N + 1 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, donc

$$|u_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

3. En déduire que (u_n) converge vers 1.

Corrigé

D'après la définition de la convergence d'une suite vers un réel, on vient de montrer que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}.$$

4. Résoudre l'inéquation $|u_n - 1| < 10^{-4}$.

Corrigé

On résout :

$$\begin{aligned} |u_n - 1| < 10^{-4} &\iff \frac{1}{n+1} < 10^{-4} \\ &\iff n+1 > 10^4 \\ &\iff n > 9999. \end{aligned}$$

Comme n est un entier naturel, cela équivaut à

$$\boxed{n \geqslant 10000}.$$

Exercice 8 Suite convergente et suite bornée

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Corrigé

Théorème des gendarmes pour les suites

Si, à partir d'un certain rang,

$$a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$$

et si

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell,$$

alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

1. Montrer que (u_n) converge vers 3.

Corrigé

Pour tout entier naturel n,

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1.$$

Comme $n+1 > 0$, on obtient

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{(-1)^n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n+1}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 3}.$$

2. Montrer que (u_n) est bornée.

Corrigé

L'encadrement précédent donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2 \leqslant 3 - \frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3 + \frac{1}{n+1} \leqslant 4.$$

Ainsi, (u_n) est bornée, par exemple :

$$\boxed{2 \leqslant u_n \leqslant 4}.$$

3. La suite (u_n) est-elle monotone ? Justifier.

Corrigé

La suite n'est pas monotone. En effet,

$$u_0 = 4, \qquad u_1 = 3 - \frac{1}{2} = 2{,}5, \qquad u_2 = 3 + \frac{1}{3}.$$

On a donc $u_1 < u_0$ mais $u_2 > u_1$. La suite n'est ni croissante ni décroissante.

Thème IV À partir de la définition de la limite

Exercice 9 Dépasser un seuil sans utiliser la monotonie

On admet que la suite (u_n) converge vers $\mathrm{e}^{\,2}$.
On ne suppose pas que la suite (u_n) est monotone.
Justifier, uniquement à partir de la définition de la limite, qu'il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on ait :

$$u_n > \mathrm{e}^{\,2} - 0{,}01.$$

Corrigé

Méthode

Pour prouver qu'une suite est finalement au-dessus d'un seuil proche de sa limite, on choisit un intervalle ouvert centré en la limite et on utilise uniquement la définition de la convergence. La monotonie n'est pas nécessaire.

On utilise uniquement la définition de la convergence vers un réel.
Comme (u_n) converge vers $\mathrm{e}^{\,2}$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$,

$$|u_n - \mathrm{e}^{\,2}| < \varepsilon.$$

On choisit ici

$$\varepsilon = 0{,}01.$$

Il existe donc un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$|u_n - \mathrm{e}^{\,2}| < 0{,}01.$$

Or

$$\begin{aligned} |u_n - \mathrm{e}^{\,2}| < 0{,}01 &\iff -0{,}01 < u_n - \mathrm{e}^{\,2} < 0{,}01 \\ &\iff \mathrm{e}^{\,2} - 0{,}01 < u_n < \mathrm{e}^{\,2} + 0{,}01. \end{aligned}$$

On obtient en particulier :

$$\boxed{\forall n \geqslant N, \quad u_n > \mathrm{e}^{\,2} - 0{,}01}.$$

La monotonie de la suite n'intervient pas : la définition de la limite suffit.

Exercice 10 Entrer définitivement dans un intervalle

On admet que la suite (v_n) converge vers $\mathrm{e}^{\,-1}$.
Justifier, uniquement à partir de la définition de la limite, qu'il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on ait :

$$\mathrm{e}^{\,-1} - 0{,}01 < v_n < \mathrm{e}^{\,-1} + 0{,}01.$$

Corrigé

Comme (v_n) converge vers $\mathrm{e}^{\,-1}$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$,

$$|v_n - \mathrm{e}^{\,-1}| < \varepsilon.$$

On prend $\varepsilon = 0{,}01$. Il existe donc un rang N tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$|v_n - \mathrm{e}^{\,-1}| < 0{,}01.$$

Puis :

$$\begin{aligned} |v_n - \mathrm{e}^{-1}| < 0{,}01 &\iff -0{,}01 < v_n - \mathrm{e}^{-1} < 0{,}01 \\ &\iff \mathrm{e}^{-1} - 0{,}01 < v_n < \mathrm{e}^{-1} + 0{,}01. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad \mathrm{e}^{-1} - 0{,}01 < v_n < \mathrm{e}^{-1} + 0{,}01}.$$

Exercice 11 Comparer deux suites à partir de leurs limites

On admet que la suite (u_n) converge vers 5.
On admet que la suite (v_n) converge vers 6.
Montrer qu'il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, on ait :

$$u_n < v_n.$$

Corrigé

Idée de preuve

Lorsque deux suites convergent vers deux limites distinctes $\ell_1 < \ell_2$, on peut choisir deux intervalles ouverts disjoints autour de ces deux limites. À partir d'un certain rang, les deux suites restent dans ces intervalles, ce qui permet de les comparer.

Les deux limites sont distinctes : la première vaut 5 et la seconde vaut 6. On choisit donc deux intervalles disjoints autour de ces limites.
Comme (u_n) converge vers 5, il existe un rang N_1 tel que, pour tout $n \geqslant N_1$,

$$|u_n - 5| < 0{,}1.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant N_1$,

$$4{,}9 < u_n < 5{,}1.$$

Comme (v_n) converge vers 6, il existe un rang N_2 tel que, pour tout $n \geqslant N_2$,

$$|v_n - 6| < 0{,}1.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant N_2$,

$$5{,}9 < v_n < 6{,}1.$$

On pose

$$N = \max(N_1, N_2).$$

Alors, pour tout $n \geqslant N$,

$$u_n < 5{,}1 < 5{,}9 < v_n.$$

Donc

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N, \quad u_n < v_n}.$$

Thème V Suites divergentes

Exercice 12 Limite infinie et seuil

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = n^3 - n^2 + 3n + 1.$$

Corrigé

Théorème de comparaison pour une limite infinie

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_5 et conjecturer la limite de (u_n).

Corrigé

On calcule :

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 1 - 1 + 3 + 1 = 4, \qquad u_2 = 8 - 4 + 6 + 1 = 11,$$

et

$$u_5 = 125 - 25 + 15 + 1 = 116.$$

Les valeurs augmentent rapidement ; on conjecture que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant n$.

Corrigé

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_n - n &= n^3 - n^2 + 3n + 1 - n \\ &= n^3 - n^2 + 2n + 1 \\ &= n^2(n-1) + 2n + 1. \end{aligned}$$

Comme $n \geqslant 1$, on a $n - 1 \geqslant 0$, donc $n^2(n-1) \geqslant 0$ et $2n + 1 > 0$. Ainsi

$$u_n - n \geqslant 0,$$

donc

$$\boxed{u_n \geqslant n}.$$

3. En déduire rigoureusement la limite de (u_n).

Corrigé

Comme $n \to +\infty$ et que $u_n \geqslant n$ à partir du rang 1, le théorème de comparaison pour les limites infinies donne :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}.$$

4. Déterminer un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, on ait $u_n \geqslant 1000$.

Corrigé

D'après la question 2, si $n \geqslant 1000$, alors

$$u_n \geqslant n \geqslant 1000.$$

On peut donc choisir

$$\boxed{N = 1000}.$$

Exercice 13 Une suite bornée divergente : la suite alternée

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

Corrigé

Suites extraites

Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ, alors toutes ses suites extraites convergent aussi vers ℓ. Pour montrer qu'une suite ne converge pas, il suffit donc de trouver deux suites extraites ayant deux limites différentes.

1. Déterminer les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3.

Corrigé

$$u_0 = (-1)^0 = 1, \qquad u_1 = (-1)^1 = -1, \qquad u_2 = (-1)^2 = 1, \qquad u_3 = (-1)^3 = -1.$$

2. Montrer que (u_{2n}) est constante et que (u_{2n+1}) est constante.

Corrigé

Pour tout entier naturel n,

$$u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$$

et

$$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1.$$

Ainsi, la suite extraite (u_{2n}) est constante égale à 1, et la suite extraite (u_{2n+1}) est constante égale à -1.

3. En déduire que (u_n) ne converge pas.

Corrigé

Si la suite (u_n) convergeait vers un réel ℓ, alors toutes ses suites extraites convergeraient vers la même limite ℓ. Or

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1.$$

Ces deux limites sont différentes. Donc (u_n) ne converge pas.

4. La suite (u_n) est-elle bornée ?

Corrigé

La suite est bornée car, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

Thème VI Opérations sur les limites

Exercice 14 Calculer des limites sans forme indéterminée

Calculer les limites des suites suivantes.

1. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\left(3 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)$, $n \geqslant 1$;

Corrigé

Opérations sur les limites

Pour conclure proprement, on résume les limites des différents facteurs, numérateurs ou dénominateurs, puis on cite l'opération utilisée : somme, produit ou quotient de limites. En cas de forme indéterminée, il faut d'abord transformer l'expression.

On étudie séparément les deux facteurs.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) = 3 \end{cases}$$

Donc, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 3}.$$

2. $v_n = \left(\dfrac{1}{n} - 2\right)(3 + \sqrt{n})$, $n \geqslant 1$;

Corrigé

On étudie séparément les deux facteurs.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{n} - 2\right) = -2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (3 + \sqrt{n}) = +\infty \end{cases}$$

Le premier facteur tend vers un réel strictement négatif et le second facteur tend vers $+\infty$. Donc, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty}.$$

3. $w_n = \dfrac{5 - \sqrt{26}}{2n^2 + 1}$;

Corrigé

On étudie séparément le numérateur et le dénominateur.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(5 - \sqrt{26}\right) = 5 - \sqrt{26} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (2n^2 + 1) = +\infty \end{cases}$$

Le numérateur tend vers un réel fini et le dénominateur tend vers $+\infty$. Donc, par quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = 0}.$$

4. $x_n = \dfrac{n^2 + 1}{2 - \sqrt{2}}$;

Corrigé

On étudie séparément le numérateur et le dénominateur.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} & (n^2+1) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(2-\sqrt{2}\right) = 2-\sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

Donc, par quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \quad x_n = +\infty}.$$

5. $y_n = n - 3n^2$;

Corrigé

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on factorise par le terme dominant n^2 :

$$y_n = n - 3n^2 = n^2\left(\frac{1}{n} - 3\right).$$

Or

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} & n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(\frac{1}{n} - 3\right) = -3 \end{cases}$$

Le premier facteur tend vers $+\infty$ et le second vers un réel strictement négatif. Donc, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \quad y_n = -\infty}.$$

6. $z_n = \dfrac{n-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+n^2}$, $n \geqslant 1$.

Corrigé

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on factorise par les termes dominants :

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{n-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+n^2} \\ &= \frac{n\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}+1\right)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{1}{n\sqrt{n}}}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} & \frac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = 1 \end{cases}$$

Donc, par quotient puis par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \quad z_n = 0}.$$

Exercice 15 Lever une forme indéterminée

Calculer les limites suivantes.

Corrigé

Méthode pour lever une forme indéterminée

Pour les quotients de polynômes en n, on factorise par la plus grande puissance de n. Pour les expressions avec racines, on peut utiliser la quantité conjuguée. On conclut ensuite par opérations sur les limites.

1. $a_n = \dfrac{2n^2+3n}{n^2+n+1}$;

Corrigé

Pour $n \neq 0$, on factorise par n^2 au numérateur et au dénominateur :

$$a_n = \frac{n^2\left(2+\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Donc

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(2+\frac{3}{n}\right) = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 1 \end{cases}$$

Et par quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \quad a_n = 2}.$$

2. $b_n = \dfrac{2n^2+3n}{n+1}$;

Corrigé

Pour $n \neq 0$, on factorise par n^2 au numérateur et par n au dénominateur :

$$b_n = \frac{n^2\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = n \times \frac{2+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n}}.$$

Or

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} & n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(2+\dfrac{3}{n}\right) = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1 \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n}} = 2.$$

Ainsi, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty}.$$

3. $c_n = \dfrac{2n+3}{n^2+1}$;

Corrigé

Pour $n \neq 0$, on factorise par n au numérateur et par n^2 au dénominateur :

$$c_n = \frac{n\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{2+\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}}.$$

Or

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} & \dfrac{1}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(2+\dfrac{3}{n}\right) = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right) = 1 \end{cases}$$

Donc, par quotient puis par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n = 0}.$$

4. $d_n = \sqrt{n^2+n} - n$;

Corrigé

On lève l'indétermination en utilisant la quantité conjuguée. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} d_n &= \sqrt{n^2+n} - n \\ &= \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \frac{n}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}. \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Remarque

On admet provisoirement la propriété suivante, qui sera étudiée dans le chapitre sur la continuité :
si une suite (x_n) converge vers un réel ℓ et si une fonction f est continue en ℓ, alors la suite $\big(f(x_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\ell).$$

La fonction racine carrée étant continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer cette propriété à une suite de nombres positifs.

On peut donc écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \sqrt{1} = 1,$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = 2.$$

Donc, par quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} d_n = \frac{1}{2}}.$$

5. $e_n = \dfrac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}+1}$;

Corrigé

Pour $n \geqslant 1$, on factorise par $\sqrt{n}$ au numérateur et au dénominateur :

$$e_n = \frac{\sqrt{n}\left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1 - \dfrac{2}{\sqrt{n}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Or

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \end{cases}$$

Donc, par quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} e_n = 1}.$$

6. $f_n = \dfrac{n^2 - 4n + 1}{3n^2 + n - 5}$.

Corrigé

Pour $n \neq 0$, on factorise par n^2 au numérateur et au dénominateur :

$$f_n = \frac{n^2 \times \left(1 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2 \times \left(3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{5}{n^2}\right)} = \frac{1 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{5}{n^2}}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Donc

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{4}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{5}{n^2}\right) = 3 \end{cases}$$

Et par quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n = \frac{1}{3}}.$$

Thème VII Théorèmes de comparaison

Exercice 16 Comparaison pour les limites infinies

Corrigé

Théorèmes de comparaison

- Si $u_n \geqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$.
- Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.

1. On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$u_n \geqslant \sqrt{n}.$$

Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Corrigé

On sait que, pour tout entier $n \geqslant 4$,

$$u_n \geqslant \sqrt{n}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Donc, d'après le théorème de comparaison pour les limites infinies,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}.$$

2. On considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = n + (-1)^n\sqrt{n}.$$

Montrer que (v_n) diverge vers $+\infty$.

Corrigé

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $(-1)^n \geqslant -1$, donc

$$(-1)^n\sqrt{n} \geqslant -\sqrt{n}.$$

Ainsi,

$$v_n = n + (-1)^n\sqrt{n} \geqslant n - \sqrt{n}.$$

On factorise l'expression minorante :

$$n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1).$$

Or

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\sqrt{n} - 1) = +\infty \end{cases}$$

Donc, par produit de limites,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) = +\infty.$$

Comme $v_n \geqslant n - \sqrt{n}$ à partir du rang 1, le théorème de comparaison donne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty}.$$

3. On considère la suite (w_n) définie par

$$w_n = -n^2 + 5\sin n.$$

Montrer que (w_n) diverge vers $-\infty$.

Corrigé

Pour tout entier naturel n,

$$-1 \leqslant \sin n \leqslant 1.$$

Donc

$$5\sin n \leqslant 5.$$

Ainsi,

$$w_n = -n^2 + 5\sin n \leqslant -n^2 + 5.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} (-n^2 + 5) = -\infty.$$

Comme $w_n \leqslant -n^2 + 5$, le théorème de comparaison pour les limites vers $-\infty$ donne

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty}.$$

Exercice 17 Théorème des gendarmes

Corrigé

Théorème des gendarmes

Si, à partir d'un certain rang, $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$ et si a_n et b_n convergent vers la même limite ℓ, alors u_n converge vers ℓ.

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\sin n}{n+1}$ converge vers 0.

Corrigé

Pour tout entier naturel n,

$$-1 \leqslant \sin n \leqslant 1.$$

Comme $n + 1 > 0$, on peut diviser l'encadrement par $n + 1$:

$$-\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{\sin n}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Or

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{n+1}\right) = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \end{cases}$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}.$$

2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 2$ $(n \geqslant 1)$ converge vers 2.

Corrigé

Pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1.$$

Comme $\sqrt{n} > 0$, on obtient

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

En ajoutant 2 dans les trois membres :

$$2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2 \end{cases}$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = 2}.$$

3. Montrer que la suite (s_n) définie par

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$$

converge vers 0.

Corrigé

Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$n^2 + k \geqslant n^2.$$

Donc

$$0 < \frac{1}{n^2 + k} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n, on obtient

$$0 \leqslant s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = 0}.$$

Thème VIII Limite d'une suite géométrique

Exercice 18 [FLASH] Automatismes : puissances, exponentielle et sommes

Source bac : Exercice de synthèse type baccalauréat, inspiré des questions classiques des sujets 2023–2026 sur les limites de suites et les sommes géométriques.

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite proposée.

Corrigé

Rappel : puissances et suites géométriques

Si $-1 < q < 1$, alors $q^n \to 0$. Si $q > 1$, alors $q^n \to +\infty$. Pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

1. $u_n = \dfrac{1 + 2^n}{3 + 5^n}$.

Corrigé

On factorise par 5^n, terme dominant du dénominateur :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1 + 2^n}{3 + 5^n} \\ &= \frac{\frac{1}{5^n} + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5^n} + 1}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{5^n} \to 0, \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0, \qquad \frac{3}{5^n} \to 0.$$

Donc, par quotient,

$$\boxed{u_n \to 0}.$$

2. $v_n = \dfrac{\mathrm{e}^n + 3^n}{2\,\mathrm{e}^n + 5^n}$.

Corrigé

Le terme dominant au numérateur est 3^n et celui du dénominateur est 5^n. On factorise par 5^n :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{\mathrm{e}^n + 3^n}{2\,\mathrm{e}^n + 5^n} \\ &= \frac{\left(\frac{\mathrm{e}}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n}{2\left(\frac{\mathrm{e}}{5}\right)^n + 1}. \end{aligned}$$

Comme $0 < \dfrac{3}{5} < 1$ et $0 < \dfrac{\mathrm{e}}{5} < 1$, on a

$$\left(\frac{3}{5}\right)^n \to 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{e}}{5}\right)^n \to 0.$$

Donc

$$\boxed{v_n \to 0}.$$

3. $S_n = 1 + \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-2} + \cdots + \mathrm{e}^{-n}$. Exprimer S_n en fonction de n, puis déterminer sa limite.

Corrigé

S_n est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison e^{-1} :

$$S_n = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n+1}}{1-\mathrm{e}^{-1}}.$$

Comme $0 < \mathrm{e}^{-1} < 1$,

$$\left(\mathrm{e}^{-1}\right)^{n+1} \to 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}}.$$

Exercice 19 Utiliser la limite de q^n

Calculer les limites suivantes.

Corrigé

Limite de q^n

- Si $-1 < q < 1$, alors $q^n \to 0$.
- Si $q > 1$, alors $q^n \to +\infty$.
- Pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

1. $u_n = 4 \times 0{,}7^n + 3$;

Corrigé

Comme $-1 < 0{,}7 < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} 0{,}7^n = 0.$$

Donc, par produit puis somme de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (4 \times 0{,}7^n + 3) = 3}.$$

2. $v_n = 2 - 5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$;

Corrigé

Comme $\frac{4}{3} > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty.$$

Ainsi,

$$-5\left(\frac{4}{3}\right)^n \longrightarrow -\infty,$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty}.$$

3. $w_n = (-0{,}8)^n$;

Corrigé

Comme $-1 < -0{,}8 < 1$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} (-0{,}8)^n = 0}.$$

4. $x_n = 3^n - 2n$;

Corrigé

On a $3^n \to +\infty$. De plus, l'exponentielle géométrique 3^n domine le terme linéaire $2n$. Pour le justifier, on écrit

$$x_n = 3^n - 2n = 3^n\left(1 - \frac{2n}{3^n}\right).$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{3^n} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{2n}{3^n}\right) = 1.$$

Ainsi, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}.$$

5. $a_n = \dfrac{2^n+1}{3^n}$;

Corrigé

Pour tout entier naturel n,

$$a_n = \frac{2^n+1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3^n}.$$

Or

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0 \end{cases}$$

Donc, par somme de limites,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}.$$

6. $b_n = 5\sum_{k=0}^{n} 0{,}8^k$.

Corrigé

On utilise la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $0{,}8 \neq 1$:

$$b_n = 5\sum_{k=0}^{n} 0{,}8^k = 5\frac{1-0{,}8^{n+1}}{1-0{,}8} = 25\left(1-0{,}8^{n+1}\right).$$

Comme $-1 < 0{,}8 < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} 0{,}8^{n+1} = 0.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 25}.$$

Thème IX Limites des suites monotones

Exercice 20 Récurrence et convergence monotone

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

Corrigé

Théorème de convergence monotone

Toute suite croissante et majorée converge. Plus précisément, si (u_n) est croissante et majorée par M, alors elle converge vers un réel ℓ tel que $\ell \leqslant M$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 6$.

Corrigé

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 6$.
On note

$$P(n) : \quad u_n \leqslant 6.$$

- **Initialisation**
  $u_0 = 1 \leqslant 6$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité**
  Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $u_n \leqslant 6$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \leqslant 6$.

  Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
$u_n \leqslant 6$	$\boxed{u_{n+1} \leqslant 6}$

  On suppose donc $u_n \leqslant 6$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$ est croissante, on obtient

  $$\frac{1}{2}u_n + 3 \leqslant \frac{1}{2} \times 6 + 3 = 6.$$

  Or $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$, donc $u_{n+1} \leqslant 6$. Donc $P(n+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.
- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :

  $$\boxed{u_n \leqslant 6}.$$

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Corrigé

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{2}u_n + 3\right) - u_n \\ &= 3 - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{1}{2}(6 - u_n). \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $u_n \leqslant 6$, donc $6 - u_n \geqslant 0$. Ainsi

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$

La suite (u_n) est donc **croissante**.

3. En déduire que (u_n) converge.

Corrigé

La suite (u_n) est croissante et majorée par 6. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ tel que

$$\ell \leqslant 6.$$

4. Déterminer sa limite.

Corrigé

Comme (u_n) converge vers ℓ, la suite décalée (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ. Par opération sur les limites, on a alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} & u_{n+1} = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(\frac{1}{2}u_n + 3\right) = \frac{1}{2}\ell + 3 \end{cases}$$

Donc, par unicité de la limite, ℓ vérifie l'équation :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 3.$$

Donc

$$\ell = 6.$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 6}.$$

5. On pose $v_n = 6 - u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique puis retrouver l'expression de u_n.

Corrigé

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 6 - u_{n+1} \\ &= 6 - \left(\frac{1}{2}u_n + 3\right) \\ &= 3 - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{1}{2}(6 - u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. De plus

$$v_0 = 6 - u_0 = 5.$$

Ainsi

$$v_n = 5\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $v_n = 6 - u_n$, on obtient

$$\boxed{u_n = 6 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Exercice 21 Méthode de Héron : un exercice guidé

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

Corrigé

Méthode

Pour établir la convergence d'une suite définie par récurrence, on montre souvent qu'elle est monotone et bornée. Une fois la convergence obtenue, on peut exploiter la relation de récurrence en utilisant les opérations sur les limites déjà connues. Si une fonction plus générale intervient, il faut justifier séparément le passage à la limite.

1. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - \sqrt{2} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}.$$

Corrigé

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - \sqrt{2} &= \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \sqrt{2} \\ &= \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x}{2x} \\ &= \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)-\sqrt{2}=\frac{(x-\sqrt{2})^2}{2x}}.$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.

Corrigé

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{2}$. Pour tout entier naturel n, on note

$$P(n) : \quad u_n \geqslant \sqrt{2}.$$

- **Initialisation**
  $u_0 = 2 \geqslant \sqrt{2}$. Donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité**
  Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $u_n \geqslant \sqrt{2}$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$.

  Remarque

  Ce que je sais : $u_n \geqslant \sqrt{2}$

  Ce que je veux démontrer : $\boxed{u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}}$

  Supposons donc que $u_n \geqslant \sqrt{2}$. En particulier $u_n > 0$. En appliquant l'identité précédente à $x = u_n$, on obtient

  $$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geqslant 0.$$

  Donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$. Donc $P(n+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.
- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :

  $$\boxed{u_n \geqslant \sqrt{2}}.$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2-u_n^2}{2u_n}.$$

Corrigé

Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n \\ &= \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - u_n \\ &= \frac{1}{u_n} - \frac{u_n}{2} \\ &= \frac{2-u_n^2}{2u_n}. \end{aligned}$$

4. En déduire que (u_n) est décroissante puis convergente.

Corrigé

D'après la question 2, $u_n \geqslant \sqrt{2}$, donc $u_n^2 \geqslant 2$. Ainsi $2 - u_n^2 \leqslant 0$. Comme $u_n > 0$, on obtient

$$\frac{2-u_n^2}{2u_n} \leqslant 0,$$

c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.
Elle est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ tel que $\ell \geqslant \sqrt{2}$.

5. Déterminer sa limite.

Corrigé

Comme (u_n) converge vers ℓ, la suite décalée (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ. De plus, $\ell \geqslant \sqrt{2} > 0$, donc, par quotient de limites,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{u_n} = \frac{2}{\ell}.$$

Par opération sur les limites, on a alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} & u_{n+1} = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{2}{\ell}\right) \end{cases}$$

Donc, par unicité de la limite, ℓ vérifie l'équation :

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right).$$

Comme $2\ell > 0$, on peut multiplier cette égalité par 2ℓ. Il vient

$$2\ell^2 = \ell^2 + 2,$$

donc $\ell^2 = 2$. Comme $\ell > 0$,

$$\boxed{\ell = \sqrt{2}}.$$

Thème X Complément : algorithmes de seuil

Exercice 22 Python et suites définies par récurrence

On considère la suite (r_n) définie par

$$r_0 = 50000 \qquad \text{et} \qquad r_{n+1} = 0{,}96 r_n.$$

Corrigé

Lecture d'un algorithme de suite

Une boucle qui remplace une variable par l'expression donnant le terme suivant de la suite applique la relation de récurrence une fois à chaque passage dans la boucle. Le nombre de passages permet donc de déterminer le rang atteint.

1. Compléter mentalement les premières valeurs r_1, r_2.

Corrigé

On utilise la relation de récurrence :

$$r_1 = 0{,}96 \times 50000 = 48000, \qquad r_2 = 0{,}96 \times 48000 = 46080.$$

2. La fonction suivante renvoie le terme de rang n.

Corrigé

La fonction commence par initialiser r à 50000, c'est-à-dire à r_0. À chaque passage dans la boucle, l'instruction

```
r = 0.96 * r
```

remplace la valeur de r_k par celle de r_{k+1}. Après n passages dans la boucle, la variable r contient donc la valeur de r_n.

```
def terme_r(n):
    r = 50000
    for k in range(n):
        r = 0.96 * r
    return r
```

3. Expliquer pourquoi la boucle est répétée n fois.

Corrigé

En Python, `range(n)` produit n valeurs : $0, 1, \ldots, n-1$. La boucle est donc répétée exactement n fois. Cela correspond aux n passages successifs

$$r_0 \to r_1 \to \cdots \to r_n.$$

4. Écrire une fonction Python qui renvoie la liste $[r_0, r_1, \ldots, r_N]$.

Corrigé

Une fonction possible est :

```
def liste_r(N):
    r = 50000
    L = [r]
    for k in range(N):
        r = 0.96 * r
        L.append(r)
    return L
```

On initialise la liste avec r_0, puis on ajoute successivement $r_1, r_2, \ldots, r_N$.

5. Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $r_n < 30000$.

Corrigé

Une fonction de seuil possible est :

```
def seuil_r():
    r = 50000
    n = 0
    while r >= 30000:
        r = 0.96 * r
        n = n + 1
    return n
```

La boucle continue tant que le seuil n'est pas franchi. Elle s'arrête donc au premier rang n tel que $r_n < 30000$.

Exercice 23 [BAC] D'après Bac 2026 : programmer une somme cumulée

Source bac : Exercice inspiré des sujets 2026 : suite récurrente, somme de termes et programmation Python.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2.$$

Corrigé

Somme cumulée dans une boucle

Pour construire successivement les sommes $S_0, S_1, \ldots, S_p$, on conserve simultanément le terme courant u_n et la somme courante S_n. À chaque passage dans la boucle, on calcule d'abord u_{n+1}, puis on ajoute u_{n+1}^2 à la somme.

1. Calculer u_1, puis S_0 et S_1.

Corrigé

On obtient

$$u_1 = \frac{2u_0}{\sqrt{1+u_0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},$$
$$S_0 = u_0^2 = 1,$$
$$S_1 = u_0^2 + u_1^2 = 1 + 2 = 3.$$

Ainsi,

$$\boxed{u_1 = \sqrt{2}, \qquad S_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad S_1 = 3.}$$

2. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la liste

$$[S_0, S_1, \ldots, S_p].$$

```
1  from math import sqrt
2
3  def sommes_cumulees(p):
4      u = 1
5      S = ..........
6      L = [S]
7      for k in range(p):
8          u = ..............................
9          S = ..............................
10         L.append(S)
11     return L
```

Corrigé

Une complétion correcte est :

```
from math import sqrt

def sommes_cumulees(p):
    u = 1
    S = u**2
    L = [S]
    for k in range(p):
        u = 2*u/sqrt(1+u**2)
        S = S + u**2
        L.append(S)
    return L
```

La liste contient d'abord S_0. Les p passages dans la boucle ajoutent ensuite successivement $S_1, S_2, \dots, S_p$.

3. Expliquer pourquoi la variable `u` doit être mise à jour avant la variable `S` dans la boucle.

Corrigé

Au début d'un passage dans la boucle, les variables contiennent u_k et S_k. Pour obtenir

$$S_{k+1} = S_k + u_{k+1}^2,$$

il faut d'abord calculer le nouveau terme u_{k+1}, puis ajouter son carré à la somme. Si l'on mettait `S` à jour en premier, on ajouterait une seconde fois u_k^2.

4. On admet que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$. Montrer que $S_n \geqslant n+1$, puis déterminer la limite de (S_n).

Corrigé

Pour tout entier k, $u_k \geqslant 1$, donc $u_k^2 \geqslant 1$. Par sommation,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= n+1. \end{aligned}$$

Or $n+1 \to +\infty$. D'après le théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.}$$

Thème XI

Bilan : en route vers le bac

Exercice 24 [BAC] D'après Bac 2025 : définition de la convergence et seuil

Source bac : Bac 2025 Métropole Sujet 1, exercice 4 - partie A.

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.
La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares, et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

$$u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n.$$

Corrigé

Stratégie de preuve

Dans une récurrence du type $u_{n+1} = h(u_n)$, si la fonction h est croissante sur l'intervalle où vivent les termes de la suite, on peut composer un encadrement par h pour obtenir l'encadrement au rang suivant.

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au 1er juillet 2025.

Corrigé

On a $u_0 = 1$, donc

$$u_1 = -0{,}02u_0^2 + 1{,}3u_0 = -0{,}02 \times 1^2 + 1{,}3 \times 1 = 1{,}28.$$

La posidonie devrait donc recouvrir

$$\boxed{1{,}28 \text{ ha}}$$

au 1er juillet 2025.

2. On considère la fonction h définie sur $[0\ ;\ 20]$ par $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$. On admet que h est croissante sur cet intervalle.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

2. b. En déduire que la suite (u_n) converge.

2. c. Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à 15.

Corrigé

2. a. On pose, pour tout entier naturel n,

$$P(n) : \quad 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20.$$

Montrons $P(n)$ par récurrence.

- **Initialisation**
  On a

  $$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_1 = 1{,}28.$$

  Donc

  $$1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 20.$$

La propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité**
Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 20$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
$1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$	$\boxed{1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 20}$

On suppose donc
$$1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20.$$
La fonction h est croissante sur $[0\ ;\ 20]$. On peut donc composer l'encadrement précédent par h :
$$h(1) \leqslant h(u_n) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(20).$$
Or
$$h(u_n) = u_{n+1}, \qquad h(u_{n+1}) = u_{n+2}, \qquad h(1) = 1{,}28, \qquad h(20) = 18.$$
Ainsi
$$1 \leqslant 1{,}28 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 18 \leqslant 20.$$
Donc
$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 20.$$
Donc $P(n+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :
$$\boxed{1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20}.$$

2. b. D'après l'encadrement précédent, la suite (u_n) est croissante et majorée par 20. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel L tel que
$$1 \leqslant L \leqslant 20.$$

2. c. Comme (u_n) converge vers L, la suite décalée (u_{n+1}) converge aussi vers L. Par produit de limites, u_n^2 converge vers L^2. Par produit par une constante puis par somme de limites,
$$-0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n \longrightarrow -0{,}02L^2 + 1{,}3L.$$
Par opération sur les limites, on a alors :
$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} & u_{n+1} = L \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(-0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n\right) = -0{,}02L^2 + 1{,}3L \end{cases}$$
Donc, par unicité de la limite, L vérifie l'équation :
$$L = -0{,}02L^2 + 1{,}3L.$$
On résout :
$$\begin{aligned} L = -0{,}02L^2 + 1{,}3L &\iff -0{,}02L^2 + 0{,}3L = 0 \\ &\iff L(-0{,}02L + 0{,}3) = 0 \\ &\iff L = 0 \quad \text{ou} \quad L = 15. \end{aligned}$$
Or $L \in [1\ ;\ 20]$, donc $L \neq 0$. Ainsi
$$\boxed{L = 15}.$$

3. Les biologistes souhaitent savoir quand la posidonie dépassera 14 hectares.

3. a. Sans calcul, justifier que cela se produira.

3. b. Compléter l'algorithme Python ci-dessous pour déterminer ce rang.

Corrigé

3. a. La suite (u_n) converge vers 15. D'après la définition de la convergence, tout intervalle ouvert contenant 15 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. En particulier, à partir d'un certain rang, on aura $u_n \in]14\ ;\ 16[$. Donc la posidonie dépassera bien 14 hectares.

3. b. Tant que la superficie ne dépasse pas 14, il faut continuer l'algorithme. La ligne 4 est donc :

```
while u <= 14:
```

```
1 def seuil():
2     n = 0
3     u = 1
4     while ..........:
5         n = n + 1
6         u = -0.02*u**2 + 1.3*u
7     return n
```

Exercice 25 [BAC] D'après Bac 2025 : médicament, moyenne et définition de la limite

Source bac : Bac 2025 Asie Sujet 1, exercice 3.

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 mL d'un médicament. On note u_n la quantité de médicament, en mL, présente dans l'organisme immédiatement après n prises. On a $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_{n+1} = 2 + 0{,}8u_n.$$

Partie A

Corrigé

Rappels utiles

- Pour une suite géométrique de raison q avec $-1 < q < 1$, on a $q^n \to 0$.
- Pour déterminer un rang de seuil dans une inégalité faisant intervenir q^n, on peut procéder par essais successifs, à la calculatrice ou avec une boucle Python.
- La moyenne $S_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$ se traite souvent en commençant par calculer la somme $u_1 + \cdots + u_n$.

Partie A

1. Calculer la valeur u_2.

Corrigé

On a $u_1 = 2$. Donc

$$u_2 = 2 + 0{,}8u_1 = 2 + 0{,}8 \times 2 = 3{,}6.$$

Ainsi

$$\boxed{u_2 = 3{,}6}.$$

2. Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}.$$

Corrigé

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}.$$

On note

$$P(n) : \quad u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}.$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$,
  $$10 - 8 \times 0{,}8^0 = 10 - 8 = 2 = u_1.$$
  Donc $P(1)$ est vraie.
- **Hérédité**
  Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 10 - 8 \times 0{,}8^n$.

Remarque

Ce que je sais : $u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$

Ce que je veux démontrer : $\boxed{u_{n+1} = 10 - 8 \times 0{,}8^{n}}$

On suppose donc

$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 + 0{,}8u_n \\ &= 2 + 0{,}8\left(10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}\right) \\ &= 2 + 8 - 8 \times 0{,}8^{n} \\ &= 10 - 8 \times 0{,}8^{n}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie au rang 1 et héréditaire à partir du rang 1 donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, soit :

$$\boxed{u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}}.$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et donner une interprétation.

Corrigé

Comme $-1 < 0{,}8 < 1$, on a $0{,}8^{n-1} \to 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 10}.$$

Dans le contexte, cela signifie que la quantité de médicament présente dans l'organisme se rapproche de 10 mL lorsque le nombre de prises devient très grand.

4. Soit N un entier naturel strictement positif. L'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ? Interpréter.

Corrigé

Pour tout entier $N \geqslant 1$,

$$u_N = 10 - 8 \times 0{,}8^{N-1}.$$

Or $0{,}8^{N-1} > 0$, donc $8 \times 0{,}8^{N-1} > 0$. Ainsi

$$u_N < 10.$$

L'inéquation $u_N \geqslant 10$ n'admet donc aucune solution. Dans le contexte, la quantité de médicament se rapproche de 10 mL mais ne l'atteint jamais avec ce modèle.

5. À l'aide de la calculatrice ou d'un court programme Python, déterminer à partir de combien de prises la quantité présente dans l'organisme est strictement supérieure à 9 mL.

Corrigé

Comme $0 < 0{,}8 < 1$, la suite $(0{,}8^{n-1})$ est décroissante ; la suite

$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1}$$

est donc croissante. Il suffit ainsi de repérer le premier franchissement du seuil 9.
À la calculatrice, on obtient :

$$u_{10} = 10 - 8 \times 0{,}8^9 \approx 8{,}926 < 9,$$
$$u_{11} = 10 - 8 \times 0{,}8^{10} \approx 9{,}141 > 9.$$

Le premier rang convenable est donc $n = 11$. La quantité de médicament devient strictement supérieure à 9 mL à partir de la

$$\boxed{11^{\text{e}} \text{ prise}}.$$

Partie B

On définit $S_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$ pour tout entier naturel n strictement positif. On admet que (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2.

Corrigé

$$S_2 = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2 + 3{,}6}{2} = 2{,}8.$$

Donc

$$\boxed{S_2 = 2{,}8}.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n.$$

Corrigé

Pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$u_k = 10 - 8 \times 0{,}8^{k-1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_1 + \cdots + u_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(10 - 8 \times 0{,}8^{k-1}\right) \\ &= 10n - 8 \sum_{k=1}^{n} 0{,}8^{k-1} \\ &= 10n - 8 \sum_{j=0}^{n-1} 0{,}8^{j} \\ &= 10n - 8 \frac{1 - 0{,}8^n}{1 - 0{,}8} \\ &= 10n - 40(1 - 0{,}8^n) \\ &= \boxed{10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n}. \end{aligned}$$

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Corrigé

On en déduit

$$S_n = \frac{10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n}{n} = 10 - \frac{40}{n} + \frac{40 \times 0{,}8^n}{n}.$$

Or

$$\frac{40}{n} \to 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{40 \times 0{,}8^n}{n} \to 0.$$

Donc

$$\boxed{S_n \to 10}.$$

4. On donne la fonction `mystere` suivante. Dans le contexte de l'exercice, que représente `mystere(9)` ?

Corrigé

La fonction `mystere(k)` renvoie le plus petit entier n tel que

$$S_n \geqslant k.$$

Ainsi, `mystere(9)` représente le premier nombre de prises à partir duquel la quantité moyenne de médicament dans l'organisme est au moins égale à 9 mL.

```
1 def mystere(k):
2     n = 1
3     s = 2
4     while s < k:
5         n = n + 1
6         s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
7     return n
```

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

Corrigé

On admet que (S_n) est croissante. Calculons S_{10} :

$$S_{10} = 10 - \frac{40}{10} + \frac{40 \times 0{,}8^{10}}{10} = 6 + 4 \times 0{,}8^{10} < 6 + 4 = 10.$$

Plus précisément, $S_{10} \approx 6{,}43 < 9$. Comme (S_n) est croissante, pour tout $n \leqslant 10$,

$$S_n \leqslant S_{10} < 9.$$

Le premier rang pour lequel $S_n \geqslant 9$ est donc strictement supérieur à 10.

Exercice 26 [!] Bilan – [BAC] D'après Bac 2026 : passer à la limite dans une relation de récurrence

Source bac : Baccalauréat spécialité mathématiques, Métropole, jour 1, 16 juin 2026, exercice 3, partie B.

Lors d'une phase de refroidissement, on modélise la température d'une pièce par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{\,-0{,}1n}.$$

Corrigé

Passage à la limite dans une relation de récurrence

Si (u_n) converge vers ℓ, alors la suite décalée (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ. Pour passer à la limite dans la relation de récurrence, on justifie séparément la limite de chacun des deux membres ; l'égalité des deux limites découle ensuite de l'unicité de la limite.

1. Montrer que $u_1 = 19{,}72$.

Corrigé

En utilisant la relation de récurrence avec $n = 0$:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0{,}965u_0 + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{\,-0{,}1\times 0} \\ &= 0{,}965 \times 20 + 0{,}35 + 0{,}07 \\ &= 19{,}3 + 0{,}42 \\ &= 19{,}72. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{u_1 = 19{,}72}.$$

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 10$.

Corrigé

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 10$. On note

$$P(n) : \quad u_n > 10.$$

- **Initialisation**
  $u_0 = 20 > 10$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité**
  Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $u_n > 10$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} > 10$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
$u_n > 10$	$\boxed{u_{n+1} > 10}$

On suppose donc $u_n > 10$. Comme $0{,}965 > 0$,

$$0{,}965u_n > 0{,}965 \times 10 = 9{,}65.$$

De plus $0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n} > 0$. Donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n} \\ &> 9{,}65 + 0{,}35 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :

$$\boxed{u_n > 10}.$$

3. On admet que la suite (u_n) est décroissante. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Corrigé

La suite (u_n) est admise décroissante et, d'après la question précédente, elle est minorée par 10. D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ tel que

$$\ell \geqslant 10.$$

4. On note ℓ la limite de la suite (u_n).

4. a. Justifier que cette limite est solution de l'équation $x = 0{,}965x + 0{,}35$.

4. b. Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigé

4. a. Comme (u_n) converge vers ℓ, la suite décalée (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ. De plus, comme $0 < \mathrm{e}^{-0{,}1} < 1$, on a

$$\mathrm{e}^{-0{,}1n} = \left(\mathrm{e}^{-0{,}1}\right)^n,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}1n} = 0.$$

Par opération sur les limites, on a alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} & u_{n+1} = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \left(0{,}965u_n + 0{,}35 + 0{,}07\,\mathrm{e}^{-0{,}1n}\right) = 0{,}965\ell + 0{,}35 \end{cases}$$

Donc, par unicité de la limite, ℓ vérifie l'équation :

$$\ell = 0{,}965\ell + 0{,}35.$$

Ainsi ℓ est bien solution de

$$\boxed{x = 0{,}965x + 0{,}35}.$$

4. b. On résout :

$$\begin{aligned} x = 0{,}965x + 0{,}35 &\iff 0{,}035x = 0{,}35 \\ &\iff x = 10. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\ell = 10}.$$

Dans le contexte, cela signifie que la température de la pièce tend vers 10°C au cours de la phase de refroidissement.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 27, page 46.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 28, page 49.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 27 [+] Consolidation : suite auxiliaire et minoration

Source bac : Exercice de synthèse type baccalauréat.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Corrigé

Changement de suite

Lorsqu'une relation de récurrence n'est pas directement exploitable, on introduit parfois une suite auxiliaire. Il faut alors vérifier que cette suite est bien définie, établir sa relation de récurrence, puis revenir à la suite initiale.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 1$.

Corrigé

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n > 1$. On note

$$P(n) : \quad u_n > 1.$$

- **Initialisation**
  $u_0 = 2 > 1$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité**
  Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $u_n > 1$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} > 1$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
$u_n > 1$	$\boxed{u_{n+1} > 1}$

On suppose donc $u_n > 1$. On va étudier le signe de $u_{n+1} - 1$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1 \\ &= \frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2} \\ &= \frac{u_n - 1}{u_n + 2}. \end{aligned}$$

Or puisque par hypothèse de récurrence, $u_n > 1$, on a aussi :

$$\begin{cases} u_n - 1 > 0 \\ u_n + 2 > 0 \end{cases} \implies \frac{u_n - 1}{u_n + 2} > 0$$

Donc $u_{n+1} > 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :

$$\boxed{u_n > 1}.$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$.

2. a. Justifier que la suite (a_n) est bien définie.

2. b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

Corrigé

2. a. Comme $u_n > 1$ pour tout n, on a $u_n - 1 > 0$. Le quotient

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

est donc bien défini pour tout entier naturel n.

2. b. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1} \\ &= \frac{\dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\dfrac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2}} \\ &= \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}. \end{aligned}$$

Or

$$3a_n - 1 = 3\frac{u_n}{u_n - 1} - 1 = \frac{3u_n - (u_n - 1)}{u_n - 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}.$$

Donc

$$\boxed{a_{n+1} = 3a_n - 1}.$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n \geqslant n + 2$.

Corrigé

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $a_n \geqslant n + 2$. On note

$$Q(n) : \quad a_n \geqslant n + 2.$$

- **Initialisation**

$$a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{1} = 2 = 0 + 2.$$

Donc $Q(0)$ est vraie.

- **Hérédité**
Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $Q(n)$ est vraie, et donc que $a_n \geqslant n + 2$. On cherche à démontrer que $Q(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire que $a_{n+1} \geqslant n + 3$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
$a_n \geqslant n+2$	$\boxed{a_{n+1} \geqslant n+3}$

On suppose donc $a_n \geqslant n+2$. Alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n - 1 \\ &\geqslant 3(n+2) - 1 \\ &= 3n + 5 \\ &= (n+3) + 2n + 2 \\ &\geqslant n+3. \end{aligned}$$

Donc $Q(n+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :

$$\boxed{a_n \geqslant n+2}.$$

4. En déduire la limite de la suite (a_n), puis celle de la suite (u_n).

Corrigé

Comme $a_n \geqslant n+2$ et $n+2 \to +\infty$, le théorème de comparaison donne

$$\boxed{a_n \to +\infty}.$$

Or

$$u_n - 1 > 0 \qquad \text{et} \qquad a_n - 1 \geqslant 1 > 0.$$

Les dénominateurs utilisés ci-dessous sont donc non nuls. On peut écrire

$$\begin{aligned} a_n = \frac{u_n}{u_n - 1} &\iff a_n(u_n - 1) = u_n \\ &\iff a_n u_n - a_n = u_n \\ &\iff u_n(a_n - 1) = a_n \\ &\iff u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}. \end{aligned}$$

Donc

$$u_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}.$$

Comme $a_n \to +\infty$, on a $\dfrac{1}{a_n} \to 0$, et ainsi

$$\boxed{u_n \to 1}.$$

Exercice 28 [*] Approfondissement : deux méthodes pour une même limite

Source bac : Exercice de synthèse type baccalauréat.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{6u_n^2}{3+u_n^2}}.$$

Corrigé

Deux approches complémentaires

Une première méthode consiste à prouver la convergence par monotonie et encadrement, puis à identifier la limite. Une seconde méthode consiste à introduire une suite auxiliaire explicite, souvent géométrique, afin de retrouver la limite par calcul direct.

1. Montrer par récurrence que $1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$.

Corrigé

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n < \sqrt{3}.$$

On note $P(n)$ cette propriété.

- **Initialisation**
  $u_0 = 1$, donc $1 \leqslant u_0 < \sqrt{3}$. Ainsi $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité**
  Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $1 \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
$1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$	$\boxed{1 \leqslant u_{n+1} < \sqrt{3}}$

Supposons donc que $1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$. Alors $1 \leqslant u_n^2 < 3$. Comme $u_{n+1} \geqslant 0$, on peut étudier son carré :

$$u_{n+1}^2 = \frac{6u_n^2}{3+u_n^2}.$$

D'une part,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - 1 &= \frac{6u_n^2}{3+u_n^2} - 1 \\ &= \frac{5u_n^2 - 3}{3+u_n^2}. \end{aligned}$$

Or $u_n^2 \geqslant 1$, donc $5u_n^2 - 3 \geqslant 2 > 0$, et $3 + u_n^2 > 0$. Ainsi $u_{n+1}^2 \geqslant 1$. Les nombres u_{n+1} et 1 sont positifs ou nuls ; comme la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit

$$u_{n+1} \geqslant 1.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 3 - u_{n+1}^2 &= 3 - \frac{6u_n^2}{3+u_n^2} \\ &= \frac{9 - 3u_n^2}{3+u_n^2} \\ &= \frac{3(3-u_n^2)}{3+u_n^2}. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $u_n^2 < 3$. Le numérateur et le dénominateur du dernier quotient sont donc strictement positifs. Ainsi

$$u_{n+1}^2 < 3 = (\sqrt{3})^2.$$

Les nombres u_{n+1} et $\sqrt{3}$ étant positifs ou nuls, la stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ donne

$$u_{n+1} < \sqrt{3}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :

$$\boxed{1 \leqslant u_n < \sqrt{3}}.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

Corrigé

D'après la question précédente, $1 \leqslant u_n < \sqrt{3}$, donc $u_n^2 < 3$. Étudions la différence des carrés :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - u_n^2 &= \frac{6u_n^2}{3+u_n^2} - u_n^2 \\ &= \frac{6u_n^2 - u_n^2(3+u_n^2)}{3+u_n^2} \\ &= \frac{u_n^2(3-u_n^2)}{3+u_n^2}. \end{aligned}$$

On a $u_n^2 > 0$, $3 - u_n^2 > 0$ et $3 + u_n^2 > 0$. Ainsi

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 > 0.$$

Les termes u_n et u_{n+1} étant positifs, et la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit

$$u_{n+1} > u_n.$$

En particulier,

$$\boxed{u_{n+1} \geqslant u_n}.$$

3. En déduire que la suite (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

Corrigé

La suite (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ tel que

$$1 \leqslant \ell \leqslant \sqrt{3}.$$

Comme (u_n) converge vers ℓ, la suite décalée (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ. Par produit de limites,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n^2 = \ell^2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^2 = \ell^2.$$

De plus, $3+u_n^2$ converge vers $3+\ell^2>0$. Par quotient de limites,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{6u_n^2}{3+u_n^2} = \frac{6\ell^2}{3+\ell^2}.$$

Par opération sur les limites, appliquée à la relation

$$u_{n+1}^2 = \frac{6u_n^2}{3+u_n^2},$$

on a alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} & u_{n+1}^2 = \ell^2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} & \dfrac{6u_n^2}{3+u_n^2} = \dfrac{6\ell^2}{3+\ell^2} \end{cases}$$

Donc, par unicité de la limite, ℓ vérifie

$$\ell^2 = \frac{6\ell^2}{3+\ell^2}.$$

En multipliant par $3+\ell^2>0$, on obtient

$$\ell^2(3+\ell^2) = 6\ell^2,$$

soit

$$\ell^2(\ell^2-3) = 0.$$

Comme $\ell \geqslant 1$, on a $\ell \neq 0$. Donc $\ell^2 = 3$ et

$$\boxed{\ell = \sqrt{3}}.$$

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n^2}{3-u_n^2}$.

4. a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.

4. b. En déduire une expression de v_n, puis retrouver la limite de (u_n).

Corrigé

4. a. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2} \\ &= \frac{\frac{6u_n^2}{3+u_n^2}}{3-\frac{6u_n^2}{3+u_n^2}} \\ &= \frac{\frac{6u_n^2}{3+u_n^2}}{\frac{9+3u_n^2-6u_n^2}{3+u_n^2}} \\ &= \frac{6u_n^2}{9-3u_n^2} \\ &= 2\frac{u_n^2}{3-u_n^2} \\ &= 2v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 2.

4. b. On a

$$v_0 = \frac{u_0^2}{3-u_0^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\boxed{v_n = \frac{1}{2}\times 2^n = 2^{n-1}}.$$

Comme $v_n \to +\infty$ et

$$v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2},$$

on obtient

$$u_n^2 = \frac{3v_n}{1+v_n} = \frac{3}{1+\frac{1}{v_n}} \to 3.$$

Pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$ et

$$\left|u_n - \sqrt{3}\right| = \frac{\left|u_n^2 - 3\right|}{u_n + \sqrt{3}} \leqslant \frac{\left|u_n^2 - 3\right|}{\sqrt{3}}.$$

Or $u_n^2 \to 3$, donc le membre de droite tend vers 0. D'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{u_n \to \sqrt{3}}.$$

Exercice 29 [BAC] D'après Bac 2025 : deux suites vers une même limite

Source bac : Baccalauréat spécialité mathématiques, Métropole, jour 1, 9 septembre 2025, exercice 3.

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x-2}$.

Corrigé

Rappels utiles

- Une suite décroissante et minorée converge.
- Si $u_n \to \ell$ et si $u_{n+1} = f(u_n)$, alors, lorsque le passage à la limite est justifié, la limite vérifie $\ell = f(\ell)$.
- Pour un algorithme de seuil, la boucle s'arrête seulement si le seuil demandé est compatible avec la limite atteinte par la suite.

Partie A

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
Variations de f	2 ↗	$+\infty$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

Corrigé

La fonction $x \mapsto 3x-2$ est croissante sur $[2\ ;+\infty[$ et prend des valeurs positives sur cet intervalle. La fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;+\infty[$. Donc, par composition, f est croissante sur $[2\ ;+\infty[$. De plus

$$f(2) = \sqrt{4} = 2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Le tableau de variations donné est donc justifié.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$.

2. b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Corrigé

2. a. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6.$$

On note cette propriété $P(n)$.

- **Initialisation**
  $u_0 = 6$ et
  $$u_1 = f(6) = \sqrt{18-2} = 4.$$
  Donc
  $$2 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 6.$$

Ainsi $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité**
Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

Remarque

Ce que je sais :
$$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6$$

Ce que je veux démontrer :
$$\boxed{2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6}$$

On suppose donc
$$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6.$$

Comme f est croissante sur $[2\,;+\infty[$,
$$f(2) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(6).$$

Or
$$f(2) = 2, \qquad f(u_{n+1}) = u_{n+2}, \qquad f(u_n) = u_{n+1}, \qquad f(6) = 4 \leqslant 6.$$

Donc
$$2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 6.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie, donc la propriété est héréditaire.

- Conclusion : la propriété est vraie au rang 0 et héréditaire donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit :
$$\boxed{2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6}.$$

2. b. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 2$.

3. On appelle ℓ la limite de (u_n). On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer ℓ.

Corrigé

La limite ℓ est solution de $f(x) = x$. On résout sur $[2\,;+\infty[$. Pour $x \geqslant 2$, les nombres $\sqrt{3x-2}$ et x sont positifs. Comme la fonction carré est strictement croissante, donc injective, sur $\mathbb{R}_+$,
$$\begin{aligned}\sqrt{3x-2} = x &\iff 3x - 2 = x^2\\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0\\ &\iff (x-1)(x-2) = 0.\end{aligned}$$

Sur $[2\,;+\infty[$, la seule solution est 2. Donc
$$\boxed{\ell = 2}.$$

4. On considère la fonction `rang` ci-dessous.

```
1  from math import sqrt
2  def rang(a):
3      n = 0
4      u = 6
5      while u > a:
6          u = sqrt(3*u - 2)
7          n = n + 1
8      return n
```

4. **4. a.** Pourquoi peut-on affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur ?

4. b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang(a)` renvoie-t-elle un résultat ?

Corrigé

4. a. Comme (u_n) converge vers 2 et que $2{,}000001 > 2$, il existe un rang à partir duquel $u_n \leqslant 2{,}000001$. La boucle `while u > a` finit donc par s'arrêter pour $a = 2{,}000001$.

4. b. La fonction `rang(a)` renvoie un résultat exactement lorsque la suite finit par devenir inférieure ou égale à a. Comme (u_n) est décroissante vers 2 et vérifie $u_n \geqslant 2$, cela arrive si et seulement si

$$\boxed{a > 2}.$$

Si $a \geqslant 6$, la fonction renvoie immédiatement 0.

Partie B

On admet que $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = 3 - \dfrac{2}{v_n}$.

1. Calculer v_1.

Corrigé

$$v_1 = 3 - \frac{2}{v_0} = 3 - \frac{2}{6} = 3 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}.$$

2. Pour tout n, on pose $w_n = \dfrac{v_n - 1}{v_n - 2}$.

2. a. Démontrer que (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser w_0.

2. b. En déduire que $v_n = 2 + \dfrac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}$.

2. c. Calculer la limite de (v_n).

Corrigé

2. a. Pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{v_{n+1} - 1}{v_{n+1} - 2} \\ &= \frac{3 - \frac{2}{v_n} - 1}{3 - \frac{2}{v_n} - 2} \\ &= \frac{2 - \frac{2}{v_n}}{1 - \frac{2}{v_n}} \\ &= \frac{\frac{2v_n - 2}{v_n}}{\frac{v_n - 2}{v_n}} \\ &= 2\frac{v_n - 1}{v_n - 2} \\ &= 2w_n. \end{aligned}$$

Donc (w_n) est géométrique de raison 2. De plus

$$w_0 = \frac{6 - 1}{6 - 2} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

2. b. On admet

$$\frac{v_n - 1}{v_n - 2} = 1{,}25 \times 2^n.$$

En résolvant cette équation d'inconnue v_n :

$$\begin{aligned} v_n - 1 &= (1{,}25 \times 2^n)(v_n - 2) \\ v_n(1{,}25 \times 2^n - 1) &= 2(1{,}25 \times 2^n) - 1 \\ v_n &= 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{v_n = 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1}}.$$

2. c. Comme $2^n \to +\infty$,

$$\frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} \to 0.$$

Donc

$$\boxed{v_n \to 2}.$$

3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2{,}01$.

Corrigé

On résout : Pour tout entier naturel n, on a

$$1{,}25 \times 2^n - 1 \geqslant 0{,}25 > 0.$$

Les multiplications effectuées ci-dessous se font donc par des nombres strictement positifs :

$$\begin{aligned} v_n < 2{,}01 &\iff 2 + \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} < 2{,}01 \\ &\iff \frac{1}{1{,}25 \times 2^n - 1} < 0{,}01 \\ &\iff 1{,}25 \times 2^n - 1 > 100 \\ &\iff 2^n > 80{,}8. \end{aligned}$$

Or $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$. Le plus petit entier est donc

$$\boxed{n = 7}.$$

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, les termes u_n et v_n appartiennent à l'intervalle $]1{,}99\ ;\ 2{,}01[$.

Corrigé

On veut que, pour tout $n \geqslant N$,

$$u_n \in]1{,}99\ ;\ 2{,}01[\qquad \text{et} \qquad v_n \in]1{,}99\ ;\ 2{,}01[.$$

- Pour la suite (u_n), on a montré que (u_n) est décroissante, converge vers 2 et vérifie $u_n \geqslant 2$ pour tout n. Il suffit donc de déterminer le premier rang à partir duquel

  $$u_n < 2{,}01.$$

  En calculant les termes successifs avec

  $$u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}, \qquad u_0 = 6,$$

  on obtient

  $$u_{16} \approx 2{,}01299 > 2{,}01 \qquad \text{et} \qquad u_{17} \approx 2{,}00869 < 2{,}01.$$

Donc, pour tout $n \geqslant 17$,

$$u_n \in]1{,}99\ ;\ 2{,}01[.$$

- Pour la suite (v_n), on a établi que le plus petit entier naturel tel que $v_n < 2{,}01$ est $n = 7$. Comme $v_n > 2$ pour tout entier naturel n, on a donc, pour tout $n \geqslant 7$,

$$v_n \in]1{,}99\ ;\ 2{,}01[.$$

Les deux conditions doivent être vraies simultanément. On choisit donc le plus grand des deux rangs :

$$N = \max(17, 7) = 17.$$

Ainsi,

$$\boxed{N = 17}.$$

Exercice 30 [BAC] D'après Bac 2026 : probabilités, suites et Python

Source bac : Baccalauréat spécialité mathématiques, Asie-Pacifique, jour 1, 9 juin 2026, exercice 1.

Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre. On note T_n l'événement : « Le tireur atteint le centre au n-ième tir » et $p_n = P(T_n)$.

- $p_1 = \dfrac{1}{2}$;
- s'il a atteint le centre au tir précédent, la probabilité d'atteindre à nouveau le centre est $\dfrac{4}{5}$;
- s'il n'a pas atteint le centre au tir précédent, la probabilité d'atteindre le centre est $\dfrac{1}{3}$.

Corrigé

Probabilités totales et suite auxiliaire

On utilise la formule des probabilités totales à partir de la partition T_n et $\overline{T_n}$. Pour une relation affine $p_{n+1} = ap_n + b$, on cherche souvent le point fixe ℓ puis on étudie la suite auxiliaire $u_n = p_n - \ell$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = \dfrac{17}{30}$.

Corrigé

D'après l'énoncé,

$$\boxed{p_1 = \frac{1}{2}}.$$

Pour calculer p_2, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements T_1 et $\overline{T_1}$:

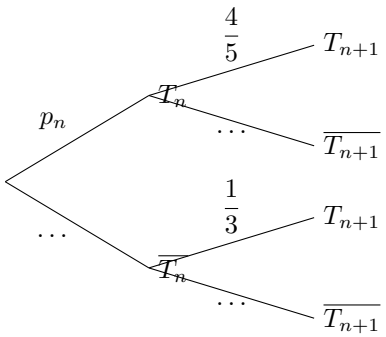
$$\begin{aligned} p_2 &= P(T_2) \\ &= P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T_1} \cap T_2) \\ &= P(T_1)P_{T_1}(T_2) + P(\overline{T_1})P_{\overline{T_1}}(T_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{12}{30} + \frac{5}{30} \\ &= \boxed{\frac{17}{30}}. \end{aligned}$$

2. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant.

Corrigé

Les probabilités manquantes sont les probabilités complémentaires :

$$P(\overline{T_n}) = 1 - p_n, \qquad P_{T_n}(\overline{T_{n+1}}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}, \qquad P_{\overline{T_n}}(\overline{T_{n+1}}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$



3. Montrer que $p_{n+1} = \dfrac{7}{15}p_n + \dfrac{1}{3}$.

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul, on applique la formule des probabilités totales avec T_n et $\overline{T_n}$:

$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P(T_{n+1}) \\
&= P(T_n \cap T_{n+1}) + P(\overline{T_n} \cap T_{n+1}) \\
&= P(T_n)P_{T_n}(T_{n+1}) + P(\overline{T_n})P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{4}{5} + (1-p_n) \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_n \\
&= \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right)p_n + \frac{1}{3} \\
&= \boxed{\frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

4. On pose $u_n = p_n - \dfrac{5}{8}$.

4. a. Montrer que (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{7}{15}$.

4. b. Déterminer une expression de u_n.

4. c. En déduire une expression de p_n.

Corrigé

4. a. Pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{5}{8} \\
&= \left(\frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{8} \\
&= \frac{7}{15}p_n + \frac{8}{24} - \frac{15}{24} \\
&= \frac{7}{15}p_n - \frac{7}{24} \\
&= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{5}{8}\right) \\
&= \frac{7}{15}u_n.
\end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{7}{15}$.

4. b. Son premier terme est

$$u_1 = p_1 - \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}.$$

Comme la suite est définie à partir du rang 1,

$$\boxed{u_n = -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}}.$$

4. c. Comme $u_n = p_n - \dfrac{5}{8}$, on a $p_n = u_n + \dfrac{5}{8}$. Donc

$$\boxed{p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}}.$$

5. Déterminer la limite de (p_n) et l'interpréter.

Corrigé

Comme $0 < \dfrac{7}{15} < 1$, on a

$$\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \to 0.$$

Donc

$$\boxed{p_n \to \frac{5}{8}}.$$

Dans le contexte, cela signifie qu'à long terme la probabilité que le tireur atteigne le centre de la cible se stabilise vers

$$\frac{5}{8} = 0{,}625.$$

6. Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $p_n \geqslant 0{,}6$.

Corrigé

La fonction doit continuer tant que $p < 0{,}6$, puis passer au tir suivant et mettre à jour p avec la relation de récurrence. Une complétion correcte est :

```
def seuil():
    n = 1
    p = 0.5
    while p < 0.6:
        n = n + 1
        p = (7/15) * p + 1/3
    return n
```

```
1  def seuil():
2      n = 1
3      p = 0.5
4      while ..........:
5          n = ..........
6          p = ..........
7      return ..........
```

7. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $p_n \geqslant 0{,}6$.

Corrigé

Pour tout entier naturel n non nul,

$$p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}.$$

On résout : Comme $\frac{1}{8} > 0$, chacune des transformations suivantes conserve le sens de l'inégalité :

$$\begin{aligned} p_n \geqslant 0{,}6 &\iff \frac{5}{8} - \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \geqslant \frac{3}{5} \\ &\iff \frac{5}{8} - \frac{3}{5} \geqslant \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \\ &\iff \frac{1}{40} \geqslant \frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)^{n-1} \\ &\iff \frac{1}{5} \geqslant \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Or

$$\left(\frac{7}{15}\right)^2 = \frac{49}{225} > \frac{1}{5} \quad \text{car } 49 > 45,$$

et

$$\left(\frac{7}{15}\right)^3 = \frac{343}{3375} < \frac{1}{5} \quad \text{car } 5 \times 343 = 1715 < 3375.$$

Le plus petit rang vérifiant l'inéquation est donc obtenu pour $n - 1 = 3$, soit

$$\boxed{n = 4}.$$

Thème XII [HP] Hors programme : Now We Can Talk – en route vers le supérieur

Exercice 31 Suites extraites et valeurs d'adhérence

Cet exercice n'est pas exigible au baccalauréat. Il sert à comprendre plus finement pourquoi certaines suites bornées ne convergent pas.

Corrigé

Suites extraites

Une suite extraite de (a_n) est une suite de la forme $(a_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. Si (a_n) converge vers ℓ, toute suite extraite converge vers la même limite ℓ.

1. On considère $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n+1}$.

1. a. Calculer u_{2n} et u_{2n+1}.

1. b. Déterminer les limites des deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

1. c. En déduire que (u_n) ne converge pas.

Corrigé

1. a. Pour tout entier naturel n,

$$u_{2n} = (-1)^{2n} + \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1},$$

et

$$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = -1 + \frac{1}{2n+2}.$$

1. b. On obtient

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1.$$

1. c. Si la suite (u_n) convergeait vers un réel ℓ, alors toutes ses suites extraites convergeraient vers ℓ. Or deux suites extraites convergent ici vers deux limites différentes, 1 et -1. Donc

$$\boxed{(u_n) \text{ ne converge pas.}}$$

2. On considère une suite (a_n) et une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

2. a. Expliquer pourquoi $(a_{\varphi(n)})$ est appelée une suite extraite de (a_n).

2. b. Montrer que si (a_n) converge vers ℓ, alors toute suite extraite $(a_{\varphi(n)})$ converge aussi vers ℓ.

Corrigé

2. a. Une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante sélectionne des indices

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2) < \cdots.$$

La suite $(a_{\varphi(n)})$ est donc obtenue en conservant certains termes de la suite (a_n), dans leur ordre d'origine : c'est une suite extraite.

2. b. Supposons que (a_n) converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe un rang N tel que, pour tout $p \geqslant N$,

$$|a_p - \ell| < \varepsilon.$$

Comme φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \to +\infty$. Il existe donc un rang N' tel que, pour tout $n \geqslant N'$,

$$\varphi(n) \geqslant N.$$

Alors, pour tout $n \geqslant N'$,

$$|a_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon.$$

Donc

$$\boxed{a_{\varphi(n)} \to \ell}.$$

Exercice 32 Suites adjacentes

Cet exercice n'est pas exigible au baccalauréat. On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

- (u_n) est croissante ;
- (v_n) est décroissante ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$;
- $v_n - u_n \longrightarrow 0$.

Corrigé

Suites adjacentes

Deux suites sont adjacentes lorsqu'une est croissante, l'autre décroissante, que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et que $v_n - u_n \to 0$. Elles convergent alors vers une même limite.

1. Montrer que (u_n) est majorée et que (v_n) est minorée.

Corrigé

Comme (v_n) est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \leqslant v_0.$$

Or $u_n \leqslant v_n$, donc

$$u_n \leqslant v_0.$$

Ainsi (u_n) est majorée.
Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leqslant u_n.$$

Or $u_n \leqslant v_n$, donc

$$u_0 \leqslant v_n.$$

Ainsi (v_n) est minorée.

2. En déduire que les deux suites convergent.

Corrigé

La suite (u_n) est croissante et majorée ; d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. La suite (v_n) est décroissante et minorée ; d'après le même théorème, elle converge.

3. Montrer que leurs limites sont égales.

Corrigé

Notons

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n \qquad \text{et} \qquad m = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Comme $v_n - u_n \to 0$, par différence des limites,

$$m - \ell = 0.$$

Donc

$$\boxed{\ell = m}.$$

Les deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

4. Application : on pose, pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Corrigé

Pour $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

On a déjà montré dans l'exercice 2 que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante. De plus,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \to 0.$$

Enfin $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant 1$ car $\dfrac{1}{n} > 0$. Les suites (u_n) et (v_n) vérifient donc les quatre conditions de la définition : elles sont adjacentes.