

TD – EXERCICES

Chapitre 3

Suites numériques et limites

Version corrigée – Version imprimable

Sommaire du TD

I	Rappels : Généralités	2
II	Rappels : suites arithmétiques et géométriques	5
III	Suites convergentes	10
IV	À partir de la définition de la limite	12
V	Suites divergentes	14
VI	Opérations sur les limites	15
VII	Théorèmes de comparaison	20
VIII	Limite d'une suite géométrique	22
IX	Limites des suites monotones	25
X	Complément : algorithmes de seuil	28
XI	Bilan : en route vers le bac	31
XII	[HP] Hors programme : Now We Can Talk – en route vers le supérieur	50

Objectifs du TD

Ce TD a pour objectif de consolider les méthodes du chapitre sur les suites numériques et leurs limites.

- Calculer : déterminer les premiers termes d'une suite, étudier un sens de variation, manipuler les suites arithmétiques ou géométriques, calculer des sommes et des limites.
- Raisonner : utiliser une définition de limite, démontrer une propriété par récurrence, exploiter les théorèmes de comparaison, le théorème des gendarmes et le théorème de convergence monotone.
- Communiquer : rédiger une preuve structurée, justifier un passage à la limite, interpréter un résultat dans un contexte de modélisation ou d'algorithmique.

Thème I

Rappels : Généralités

Exercice 1 Sens de variation, majoration et minoration

1. Étudier le sens de variation des suites suivantes :

1. a. $u_n = 10^n, n \geq 0$; 1. b. $v_n = 3^n - n, n \geq 0$; 1. c. $w_n = \frac{3^n}{n}, n \geq 1$.

2. Pour chacune des suites, proposer un minorant, puis dire si la suite semble majorée.

3. On considère la suite (a_n) définie par $a_n = 2 + \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. a. Montrer que (a_n) est décroissante.

3. b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 < a_n \leq 3$.



Corrigé

1. Étude des variations.

1. a. Pour $u_n = 10^n$, on compare deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 10^{n+1} - 10^n \\ &= 10^n(10 - 1) \\ &= 9 \times 10^n. \end{aligned}$$

Or $10^n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$. Ainsi, la suite (u_n) est strictement croissante.

1. b. Pour $v_n = 3^n - n$, on calcule :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (3^{n+1} - (n+1)) - (3^n - n) \\ &= 3^{n+1} - 3^n - 1 \\ &= 2 \times 3^n - 1. \end{aligned}$$

Comme $3^n \geq 1$, on a $2 \times 3^n - 1 \geq 1 > 0$. Donc (v_n) est strictement croissante.

1. c. Pour $w_n = \frac{3^n}{n}$, avec $n \geq 1$, les termes sont strictement positifs. On peut donc comparer le quotient :

$$\begin{aligned} \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{3^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{3^n} \\ &= \frac{3n}{n+1}. \end{aligned}$$

Or, pour $n \geq 1$,

$$\frac{3n}{n+1} > 1 \iff 3n > n+1 \iff 2n > 1,$$

ce qui est vrai. Donc $w_{n+1} > w_n$ et (w_n) est strictement croissante.

2. Minorants et majorants. Les trois suites ont des termes positifs, donc 0 est un minorant de chacune d'elles. De plus, les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) sont croissantes et leurs termes deviennent arbitrairement grands ; elles ne semblent donc pas majorées.

3. Étude de la suite (a_n) .

3. a. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(2 + \frac{1}{n+2}\right) - \left(2 + \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n+1 - (n+2)}{(n+1)(n+2)} \\ &= -\frac{1}{(n+1)(n+2)} < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, (a_n) est strictement décroissante.

3. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n + 1 \geq 1$, donc

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq 1.$$

En ajoutant 2 dans les trois membres, on obtient :

$$2 < 2 + \frac{1}{n+1} \leq 3.$$

Donc, pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{2 < a_n \leq 3}.$$

Exercice 2 Suites imbriquées

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
4. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.



Corrigé

1. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} > 0.$$

Donc

$$\boxed{u_n \leq v_n}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0.$$

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

3. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(u_n + \frac{1}{n} \right) \\ &= (u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n - (n+1)}{n(n+1)^2} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc strictement décroissante.

4. Comme (u_n) est croissante, on a $u_n \geq u_1$ pour tout $n \geq 1$. De plus, d'après la question 1,

$$u_n \leq v_n.$$

Comme (v_n) est décroissante, on a $v_n \leq v_1$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi,

$$u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1.$$

Donc (u_n) et (v_n) sont toutes les deux bornées.

Thème II

Rappels : suites arithmétiques et géométriques

Exercice 3 Suite arithmético-géométrique : deux méthodes

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 65$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 0,8u_n + 18.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Méthode 1 : conjecturer puis démontrer le terme général.
 2. a. À partir des premiers termes, conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
 2. b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

3. Méthode 2 : retrouver la suite auxiliaire. On cherche un réel α tel que la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$w_n = u_n - \alpha$$

soit géométrique de raison 0,8.

3. a. Montrer que cela revient à choisir α tel que

$$0,8\alpha + 18 = \alpha.$$

3. b. Déterminer α , puis retrouver l'expression explicite de u_n .
4. Déterminer les variations de (u_n) .
5. Déterminer la limite de (u_n) .



Corrigé

1. On calcule successivement :

$$u_1 = 0,8 \times 65 + 18 = 70 \quad \text{et} \quad u_2 = 0,8 \times 70 + 18 = 74.$$

2. Méthode 1 : conjecture puis récurrence.

2. a. Les premiers termes 65, 70, 74 augmentent et se rapprochent de 90. La forme attendue est celle d'une suite arithmético-géométrique :

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

2. b. Démontrons cette formule par récurrence.

Pour tout entier naturel n , on note

$$P(n) : u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

- Initialisation

Pour $n = 0$,

$$90 - 25 \times 0,8^0 = 90 - 25 = 65 = u_0.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.

On suppose donc

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,8u_n + 18 \\ &= 0,8(90 - 25 \times 0,8^n) + 18 \\ &= 72 - 25 \times 0,8^{n+1} + 18 \\ &= 90 - 25 \times 0,8^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. Donc, par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

3. Méthode 2 : suite auxiliaire.

3. a. On pose $w_n = u_n - \alpha$. On veut que (w_n) soit géométrique de raison 0,8, c'est-à-dire :

$$w_{n+1} = 0,8w_n.$$

Or

$$w_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 0,8u_n + 18 - \alpha,$$

et

$$0,8w_n = 0,8(u_n - \alpha) = 0,8u_n - 0,8\alpha.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} w_{n+1} = 0,8w_n &\iff 0,8u_n + 18 - \alpha = 0,8u_n - 0,8\alpha \\ &\iff 18 - \alpha = -0,8\alpha \\ &\iff 18 = 0,2\alpha \\ &\iff \alpha = 90. \end{aligned}$$

3. b. Avec $\alpha = 90$, on a $w_n = u_n - 90$. Alors

$$w_{n+1} = 0,8w_n.$$

Donc (w_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme

$$w_0 = u_0 - 90 = 65 - 90 = -25.$$

Ainsi,

$$w_n = -25 \times 0,8^n.$$

Comme $w_n = u_n - 90$, on retrouve :

$$u_n = 90 - 25 \times 0,8^n.$$

4. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (90 - 25 \times 0,8^{n+1}) - (90 - 25 \times 0,8^n) \\ &= 25 \times 0,8^n (1 - 0,8) \\ &= 5 \times 0,8^n > 0. \end{aligned}$$

Donc (u_n) est strictement croissante.

5. Comme $-1 < 0,8 < 1$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^n = 0.$$

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 90.$$

Exercice 4 Suite auxiliaire arithmétique

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. 2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

2. b. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser sa raison et

son premier terme.

3. En déduire l'expression de v_n , puis celle de u_n , en fonction de n .
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .



Corrigé

1. On calcule :

$$u_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1 + 2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}, \quad u_2 = \frac{\frac{1}{4}}{1 + 2 \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}.$$

2. a. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

- Initialisation

$$u_0 = \frac{1}{2} > 0.$$

- Hérédité

Supposons que, pour un entier naturel n fixé, $u_n > 0$. Alors $1 + 2u_n > 0$, donc

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n} > 0.$$

- Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

2. b. Comme $u_n > 0$, la suite (v_n) est bien définie. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} \\ &= \frac{1 + 2u_n}{u_n} \\ &= \frac{1}{u_n} + 2 \\ &= v_n + 2. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison 2. Son premier terme est

$$v_0 = \frac{1}{u_0} = 2.$$

3. Pour tout entier naturel n ,

$$v_n = v_0 + nr = 2 + 2n.$$

Ainsi,

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \boxed{\frac{1}{2n + 2}}.$$

4. Comme $2n + 2 \rightarrow +\infty$, on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}.$$

Exercice 5 Conjecturer une formule explicite puis la démontrer

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 3u_n - 2.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

**Corrigé**

1. On calcule :

$$u_1 = 3 \times 2 - 2 = 4, \quad u_2 = 3 \times 4 - 2 = 10, \quad u_3 = 3 \times 10 - 2 = 28.$$

On remarque que

$$2 = 3^0 + 1, \quad 4 = 3^1 + 1, \quad 10 = 3^2 + 1, \quad 28 = 3^3 + 1.$$

2. On conjecture donc que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 3^n + 1.$$

3. Démontrons cette conjecture par récurrence.

Pour tout entier naturel n , on note

$$P(n) : u_n = 3^n + 1.$$

- Initialisation

Pour $n = 0$, on a

$$3^0 + 1 = 2 = u_0.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$. On suppose donc $u_n = 3^n + 1$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n - 2 \\ &= 3(3^n + 1) - 2 \\ &= 3^{n+1} + 3 - 2 \\ &= 3^{n+1} + 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 3^n + 1.$$

4. Comme $3 > 1$, on a $3^n \rightarrow +\infty$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 6 Sommes de termes géométriques

1. Calculer les sommes suivantes :

1. a. $S_1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}$;

1. c. $S_3 = 5 \sum_{k=0}^n 0,6^k$;

1. b. $S_2 = 3 + 3 \times 0,8 + 3 \times 0,8^2 + \dots + 3 \times 0,8^{12}$;

1. d. $S_4 = \sum_{k=4}^n 2 \times 3^k$ pour $n \geq 4$.

2. Une suite géométrique (q_n) vérifie $q_2 = 18$ et sa raison est $\frac{2}{3}$.

2. a. Exprimer q_n en fonction de n .

2. b. Calculer $q_2 + q_3 + \dots + q_{12}$.

**Corrigé**

1. On utilise la formule de somme géométrique : si $q \neq 1$, alors

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

1. a.

$$S_1 = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10} = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \boxed{2^{11} - 1}.$$

1. b. Il s'agit d'une somme géométrique de premier terme 3, de raison 0,8 et comportant 13 termes :

$$S_2 = 3 \frac{1 - 0,8^{13}}{1 - 0,8} = \boxed{15(1 - 0,8^{13})}.$$

1. c.

$$S_3 = 5 \sum_{k=0}^n 0,6^k = 5 \frac{1 - 0,6^{n+1}}{1 - 0,6} = \boxed{12,5(1 - 0,6^{n+1})}.$$

1. d. Pour $n \geq 4$,

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{k=4}^n 2 \times 3^k \\ &= 2(3^4 + 3^5 + \dots + 3^n) \\ &= 2 \times 3^4 \frac{1 - 3^{n-3}}{1 - 3} \\ &= \boxed{81(3^{n-3} - 1)}. \end{aligned}$$

2. 2. a. La suite (q_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $q_2 = 18$. Donc, pour tout entier n ,

$$\boxed{q_n = 18 \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}.$$

2. b. La somme $q_2 + q_3 + \dots + q_{12}$ contient 11 termes, de premier terme 18 et de raison $\frac{2}{3}$. Ainsi,

$$q_2 + q_3 + \dots + q_{12} = 18 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{11}}{1 - \frac{2}{3}} = \boxed{54 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right)}.$$

Thème III

Suites convergentes

Exercice 7 Travailler la définition d'une limite finie

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

1. Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_9 , puis conjecturer la limite de (u_n) .
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - 1| < \varepsilon.$$

3. En déduire que (u_n) converge vers 1.
4. Résoudre l'inéquation $|u_n - 1| < 10^{-4}$.



Corrigé



Définition d'une limite finie

Dire que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ signifie que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Dans une preuve, le rang N peut dépendre de ε .

1. On calcule :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5, \quad u_2 = 1 + \frac{1}{3}, \quad u_9 = 1 + \frac{1}{10} = 1,1.$$

Les termes semblent se rapprocher de 1. On conjecture donc que (u_n) converge vers 1.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout entier naturel n ,

$$|u_n - 1| = \left| 1 + \frac{1}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}.$$

On veut obtenir

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Cette inégalité est vérifiée dès que

$$n+1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Il suffit donc de choisir un entier N tel que

$$N+1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Alors, pour tout $n \geq N$, on a $n+1 \geq N+1 > \frac{1}{\varepsilon}$, donc

$$|u_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

3. D'après la définition de la convergence d'une suite vers un réel, on vient de montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

4. On résout :

$$\begin{aligned} |u_n - 1| < 10^{-4} &\iff \frac{1}{n+1} < 10^{-4} \\ &\iff n+1 > 10^4 \\ &\iff n > 9999. \end{aligned}$$

Comme n est un entier naturel, cela équivaut à

$$n \geq 10000.$$

Exercice 8 Suite convergente et suite bornée

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

1. Montrer que (u_n) converge vers 3.
2. Montrer que (u_n) est bornée.
3. La suite (u_n) est-elle monotone ? Justifier.



Corrigé



Théorème des gendarmes pour les suites

Si, à partir d'un certain rang,

$$a_n \leq u_n \leq b_n$$

et si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \ell,$$

alors la suite (u_n) converge vers ℓ .

1. Pour tout entier naturel n ,

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1.$$

Comme $n+1 > 0$, on obtient

$$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n+1} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3.$$

2. L'encadrement précédent donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2 \leq 3 - \frac{1}{n+1} \leq u_n \leq 3 + \frac{1}{n+1} \leq 4.$$

Ainsi, (u_n) est bornée, par exemple :

$$2 \leq u_n \leq 4.$$

3. La suite n'est pas monotone. En effet,

$$u_0 = 4, \quad u_1 = 3 - \frac{1}{2} = 2,5, \quad u_2 = 3 + \frac{1}{3}.$$

On a donc $u_1 < u_0$ mais $u_2 > u_1$. La suite n'est ni croissante ni décroissante.

Thème IV

À partir de la définition de la limite

Exercice 9 Dépasser un seuil sans utiliser la monotonie

On admet que la suite (u_n) converge vers e^2 .

On ne suppose pas que la suite (u_n) est monotone.

Justifier, uniquement à partir de la définition de la limite, qu'il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geq N$, on ait :

$$u_n > e^2 - 0,01.$$



Corrigé



Méthode

Pour prouver qu'une suite est finalement au-dessus d'un seuil proche de sa limite, on choisit un intervalle ouvert centré en la limite et on utilise uniquement la définition de la convergence. La monotonie n'est pas nécessaire.

On utilise uniquement la définition de la convergence vers un réel.

Comme (u_n) converge vers e^2 , pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geq N$,

$$|u_n - e^2| < \varepsilon.$$

On choisit ici

$$\varepsilon = 0,01.$$

Il existe donc un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - e^2| < 0,01.$$

Or

$$\begin{aligned} |u_n - e^2| < 0,01 &\iff -0,01 < u_n - e^2 < 0,01 \\ &\iff e^2 - 0,01 < u_n < e^2 + 0,01. \end{aligned}$$

On obtient en particulier :

$$\boxed{\forall n \geq N, \quad u_n > e^2 - 0,01.}$$

La monotonie de la suite n'intervient pas : la définition de la limite suffit.

Exercice 10 Entrer définitivement dans un intervalle

On admet que la suite (v_n) converge vers e^{-1} .

Justifier, uniquement à partir de la définition de la limite, qu'il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geq N$, on ait :

$$e^{-1} - 0,01 < v_n < e^{-1} + 0,01.$$



Corrigé

Comme (v_n) converge vers e^{-1} , pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout entier $n \geq N$,

$$|v_n - e^{-1}| < \varepsilon.$$

On prend $\varepsilon = 0,01$. Il existe donc un rang N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|v_n - e^{-1}| < 0,01.$$

Puis :

$$\begin{aligned} |v_n - e^{-1}| < 0,01 &\iff -0,01 < v_n - e^{-1} < 0,01 \\ &\iff e^{-1} - 0,01 < v_n < e^{-1} + 0,01. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad e^{-1} - 0,01 < v_n < e^{-1} + 0,01.}$$

Exercice 11 Comparer deux suites à partir de leurs limites

On admet que la suite (u_n) converge vers 5.

On admet que la suite (v_n) converge vers 6.

Montrer qu'il existe un rang N tel que, pour tout entier $n \geq N$, on ait :

$$u_n < v_n.$$



Corrigé



Idée de preuve

Lorsque deux suites convergent vers deux limites distinctes $\ell_1 < \ell_2$, on peut choisir deux intervalles ouverts disjoints autour de ces deux limites. À partir d'un certain rang, les deux suites restent dans ces intervalles, ce qui permet de les comparer.

Les deux limites sont distinctes : la première vaut 5 et la seconde vaut 6. On choisit donc deux intervalles disjoints autour de ces limites.

Comme (u_n) converge vers 5, il existe un rang N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$,

$$|u_n - 5| < 0,1.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N_1$,

$$4,9 < u_n < 5,1.$$

Comme (v_n) converge vers 6, il existe un rang N_2 tel que, pour tout $n \geq N_2$,

$$|v_n - 6| < 0,1.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N_2$,

$$5,9 < v_n < 6,1.$$

On pose

$$N = \max(N_1, N_2).$$

Alors, pour tout $n \geq N$,

$$u_n < 5,1 < 5,9 < v_n.$$

Donc

$$\boxed{\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n < v_n.}$$

Thème V

Suites divergentes

Exercice 12 Limite infinie et seuil

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = n^3 - n^2 + 3n + 1.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_5 et conjecturer la limite de (u_n) .
2. Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n \geq n$.
3. En déduire rigoureusement la limite de (u_n) .
4. Déterminer un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $u_n \geq 1000$.



Corrigé



Théorème de comparaison pour une limite infinie

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

1. On calcule :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1 - 1 + 3 + 1 = 4, \quad u_2 = 8 - 4 + 6 + 1 = 11,$$

et

$$u_5 = 125 - 25 + 15 + 1 = 116.$$

Les valeurs augmentent rapidement ; on conjecture que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u_n - n &= n^3 - n^2 + 3n + 1 - n \\ &= n^3 - n^2 + 2n + 1 \\ &= n^2(n - 1) + 2n + 1. \end{aligned}$$

Comme $n \geq 1$, on a $n - 1 \geq 0$, donc $n^2(n - 1) \geq 0$ et $2n + 1 > 0$. Ainsi

$$u_n - n \geq 0,$$

donc

$$\boxed{u_n \geq n}.$$

3. Comme $n \rightarrow +\infty$ et que $u_n \geq n$ à partir du rang 1, le théorème de comparaison pour les limites infinies donne :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}.$$

4. D'après la question 2, si $n \geq 1000$, alors

$$u_n \geq n \geq 1000.$$

On peut donc choisir

$$\boxed{N = 1000}.$$

Exercice 13 Une suite bornée divergente : la suite alternée

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

1. Déterminer les valeurs de u_0, u_1, u_2, u_3 .
2. Montrer que (u_{2n}) est constante et que (u_{2n+1}) est constante.
3. En déduire que (u_n) ne converge pas.
4. La suite (u_n) est-elle bornée ?



Corrigé



Suites extraites

Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ , alors toutes ses suites extraites convergent aussi vers ℓ . Pour montrer qu'une suite ne converge pas, il suffit donc de trouver deux suites extraites ayant deux limites différentes.

1.
$$u_0 = (-1)^0 = 1, \quad u_1 = (-1)^1 = -1, \quad u_2 = (-1)^2 = 1, \quad u_3 = (-1)^3 = -1.$$

2. Pour tout entier naturel n ,

$$u_{2n} = (-1)^{2n} = 1$$

et

$$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1.$$

Ainsi, la suite extraite (u_{2n}) est constante égale à 1, et la suite extraite (u_{2n+1}) est constante égale à -1.

3. Si la suite (u_n) convergerait vers un réel ℓ , alors toutes ses suites extraites convergeraient vers la même limite ℓ .
Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -1.$$

Ces deux limites sont différentes. Donc (u_n) ne converge pas.

4. La suite est bornée car, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 \leq u_n \leq 1.$$

Thème VI

Opérations sur les limites

Exercice 14 Calculer des limites sans forme indéterminée

Calculer les limites des suites suivantes.

1. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(3 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right), n \geq 1;$

4. $x_n = \frac{n^2 + 1}{2 - \sqrt{2}};$

2. $v_n = \left(\frac{1}{n} - 2\right) (3 + \sqrt{n}), n \geq 1;$

5. $y_n = n - 3n^2;$

3. $w_n = \frac{5 - \sqrt{26}}{2n^2 + 1};$

6. $z_n = \frac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{n} + n^2}, n \geq 1.$



Corrigé



Opérations sur les limites

Pour conclure proprement, on résume les limites des différents facteurs, numérateurs ou dénominateurs, puis on cite l'opération utilisée : somme, produit ou quotient de limites. En cas de forme indéterminée, il faut d'abord transformer l'expression.

1. On étudie séparément les deux facteurs.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 3 \end{cases}$$

Donc, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3}.$$

2. On étudie séparément les deux facteurs.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - 2\right) = -2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + \sqrt{n}) = +\infty \end{cases}$$

Le premier facteur tend vers un réel strictement négatif et le second facteur tend vers $+\infty$. Donc, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty}.$$

3. On étudie séparément le numérateur et le dénominateur.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (5 - \sqrt{26}) = 5 - \sqrt{26} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^2 + 1) = +\infty \end{cases}$$

Le numérateur tend vers un réel fini et le dénominateur tend vers $+\infty$. Donc, par quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0}.$$

4. On étudie séparément le numérateur et le dénominateur.

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 1) = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2} > 0 \end{cases}$$

Donc, par quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty}.$$

5. Pour tout entier $n \geq 1$, on factorise par le terme dominant n^2 :

$$y_n = n - 3n^2 = n^2 \left(\frac{1}{n} - 3\right).$$

Or

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - 3\right) = -3 \end{cases}$$

Le premier facteur tend vers $+\infty$ et le second vers un réel strictement négatif. Donc, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = -\infty}.$$

6. Pour tout entier $n \geq 1$, on factorise par les termes dominants :

$$\begin{aligned} z_n &= \frac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{n} + n^2} \\ &= \frac{n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2 \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} + 1\right)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}} \end{aligned}$$

Or

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = 1 \end{cases}$$

Donc, par quotient puis par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0}.$$

Exercice 15 Lever une forme indéterminée

Calculer les limites suivantes.

1. $a_n = \frac{2n^2 + 3n}{n^2 + n + 1};$

2. $b_n = \frac{2n^2 + 3n}{n + 1};$

3. $c_n = \frac{2n + 3}{n^2 + 1};$

4. $d_n = \sqrt{n^2 + n} - n;$

5. $e_n = \frac{\sqrt{n} - 2}{\sqrt{n} + 1};$

6. $f_n = \frac{n^2 - 4n + 1}{3n^2 + n - 5}.$



Corrigé



Méthode pour lever une forme indéterminée

Pour les quotients de polynômes en n , on factorise par la plus grande puissance de n . Pour les expressions avec racines, on peut utiliser la quantité conjuguée. On conclut ensuite par opérations sur les limites.

1. Pour $n \neq 0$, on factorise par n^2 au numérateur et au dénominateur :

$$a_n = \frac{n^2 \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Donc

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1 \end{cases}$$

Et par quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2}.$$

2. Pour $n \neq 0$, on factorise par n^2 au numérateur et par n au dénominateur :

$$b_n = \frac{n^2 \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = n \times \frac{2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}}.$$

Or

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \end{cases}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2.$$

Ainsi, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty}.$$

3. Pour $n \neq 0$, on factorise par n au numérateur et par n^2 au dénominateur :

$$c_n = \frac{n \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \times \frac{2 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}.$$

Or

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1 \end{cases}$$

Donc, par quotient puis par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0}.$$

4. On lève l'indétermination en utilisant la quantité conjuguée. Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} d_n &= \sqrt{n^2 + n} - n \\ &= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}. \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right) = 2.$$

Donc, par quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \frac{1}{2}}.$$

5. Pour $n \geq 1$, on factorise par $\sqrt{n}$ au numérateur et au dénominateur :

$$e_n = \frac{\sqrt{n} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

Or

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 \end{cases}$$

Donc, par quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = 1}.$$

6. Pour $n \neq 0$, on factorise par n^2 au numérateur et au dénominateur :

$$f_n = \frac{n^2 \times \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \times \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Donc

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = 3 \end{cases}$$

Et par quotient de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \frac{1}{3}}.$$

Thème VII

Théorèmes de comparaison

Exercice 16 Comparaison pour les limites infinies

1. On suppose que, pour tout entier $n \geq 4$,

$$u_n \geq \sqrt{n}.$$

Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.

2. On considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = n + (-1)^n \sqrt{n}.$$

Montrer que (v_n) diverge vers $+\infty$.

3. On considère la suite (w_n) définie par

$$w_n = -n^2 + 5 \sin n.$$

Montrer que (w_n) diverge vers $-\infty$.



Corrigé



Théorèmes de comparaison

- Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang et si $v_n \rightarrow +\infty$, alors $u_n \rightarrow +\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $v_n \rightarrow -\infty$, alors $u_n \rightarrow -\infty$.

1. On sait que, pour tout entier $n \geq 4$,

$$u_n \geq \sqrt{n}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

Donc, d'après le théorème de comparaison pour les limites infinies,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on a $(-1)^n \geq -1$, donc

$$(-1)^n \sqrt{n} \geq -\sqrt{n}.$$

Ainsi,

$$v_n = n + (-1)^n \sqrt{n} \geq n - \sqrt{n}.$$

On factorise l'expression minorante :

$$n - \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1).$$

Or

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - 1) = +\infty \end{cases}$$

Donc, par produit de limites,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n} - 1) = +\infty.$$

Comme $v_n \geq n - \sqrt{n}$ à partir du rang 1, le théorème de comparaison donne

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty}.$$

3. Pour tout entier naturel n ,

$$-1 \leq \sin n \leq 1.$$

Donc

$$5 \sin n \leq 5.$$

Ainsi,

$$w_n = -n^2 + 5 \sin n \leq -n^2 + 5.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2 + 5) = -\infty.$$

Comme $w_n \leq -n^2 + 5$, le théorème de comparaison pour les limites vers $-\infty$ donne

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty}.$$

Exercice 17 Théorème des gendarmes

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{\sin n}{n+1}$ converge vers 0.
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 2$ ($n \geq 1$) converge vers 2.
3. Montrer que la suite (s_n) définie par

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k}$$

converge vers 0.



Corrigé



Théorème des gendarmes

Si, à partir d'un certain rang, $a_n \leq u_n \leq b_n$ et si a_n et b_n convergent vers la même limite ℓ , alors u_n converge vers ℓ .

1. Pour tout entier naturel n ,

$$-1 \leq \sin n \leq 1.$$

Comme $n+1 > 0$, on peut diviser l'encadrement par $n+1$:

$$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sin n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Or

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{n+1} \right) = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{cases}$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}.$$

2. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1.$$

Comme $\sqrt{n} > 0$, on obtient

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

En ajoutant 2 dans les trois membres :

$$2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Or

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2 \end{cases}$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2}.$$

3. Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$n^2 + k \geq n^2.$$

Donc

$$0 < \frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2}.$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 1 à n , on obtient

$$0 \leq s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Donc, par le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 0}.$$

Thème VIII

Limite d'une suite géométrique

Exercice 18 [FLASH] Automatismes : puissances, exponentielle et sommes

Source bac : Exercice de synthèse type baccalauréat, inspiré des questions classiques des sujets 2023–2026 sur les limites de suites et les sommes géométriques.

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite proposée.

- $u_n = \frac{1 + 2^n}{3 + 5^n}.$
- $v_n = \frac{e^n + 3^n}{2e^n + 5^n}.$
- $S_n = 1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-n}.$ Exprimer S_n en fonction de n , puis déterminer sa limite.



Corrigé



Rappel : puissances et suites géométriques

Si $-1 < q < 1$, alors $q^n \rightarrow 0$. Si $q > 1$, alors $q^n \rightarrow +\infty$. Pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

- On factorise par 5^n , terme dominant du dénominateur :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1 + 2^n}{3 + 5^n} \\ &= \frac{\frac{1}{5^n} + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{3}{5^n} + 1}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{5^n} \rightarrow 0, \quad \left(\frac{2}{5}\right)^n \rightarrow 0, \quad \frac{3}{5^n} \rightarrow 0.$$

Donc, par quotient,

$$\boxed{u_n \rightarrow 0}.$$

2. Le terme dominant au numérateur est 3^n et celui du dénominateur est 5^n . On factorise par 5^n :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{e^n + 3^n}{2e^n + 5^n} \\ &= \frac{\left(\frac{e}{5}\right)^n + \left(\frac{3}{5}\right)^n}{2\left(\frac{e}{5}\right)^n + 1}. \end{aligned}$$

Comme $0 < \frac{3}{5} < 1$ et $0 < \frac{e}{5} < 1$, on a

$$\left(\frac{3}{5}\right)^n \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{e}{5}\right)^n \rightarrow 0.$$

Donc

$$\boxed{v_n \rightarrow 0}.$$

3. S_n est la somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison e^{-1} :

$$S_n = \frac{1 - (e^{-1})^{n+1}}{1 - e^{-1}}.$$

Comme $0 < e^{-1} < 1$,

$$(e^{-1})^{n+1} \rightarrow 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{1 - e^{-1}}}.$$

Exercice 19 Utiliser la limite de q^n

Calculer les limites suivantes.

1. $u_n = 4 \times 0,7^n + 3;$

4. $x_n = 3^n - 2n;$

2. $v_n = 2 - 5 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n;$

5. $a_n = \frac{2^n + 1}{3^n};$

3. $w_n = (-0,8)^n;$

6. $b_n = 5 \sum_{k=0}^n 0,8^k.$



Corrigé



Limite de q^n

- Si $-1 < q < 1$, alors $q^n \rightarrow 0$.
- Si $q > 1$, alors $q^n \rightarrow +\infty$.
- Pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

1. Comme $-1 < 0,7 < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,7^n = 0.$$

Donc, par produit puis somme de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 \times 0,7^n + 3) = 3}.$$

2. Comme $\frac{4}{3} > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = +\infty.$$

Ainsi,

$$-5 \left(\frac{4}{3}\right)^n \rightarrow -\infty,$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty}.$$

3. Comme $-1 < -0,8 < 1$,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,8)^n = 0}.$$

4. On a $3^n \rightarrow +\infty$. De plus, l'exponentielle géométrique 3^n domine le terme linéaire $2n$. Pour le justifier, on écrit

$$x_n = 3^n - 2n = 3^n \left(1 - \frac{2n}{3^n}\right).$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n}{3^n} = 0.$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2n}{3^n}\right) = 1.$$

Ainsi, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty}.$$

5. Pour tout entier naturel n ,

$$a_n = \frac{2^n + 1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3^n}.$$

Or

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0 \end{cases}$$

Donc, par somme de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0}.$$

6. On utilise la formule de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $0,8 \neq 1$:

$$b_n = 5 \sum_{k=0}^n 0,8^k = 5 \frac{1 - 0,8^{n+1}}{1 - 0,8} = 25 (1 - 0,8^{n+1}).$$

Comme $-1 < 0,8 < 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,8^{n+1} = 0.$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 25}.$$

Thème IX

Limites des suites monotones

Exercice 20 Récurrence et convergence monotone

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 6$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que (u_n) converge.
4. Déterminer sa limite.
5. On pose $v_n = 6 - u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique puis retrouver l'expression de u_n .



Corrigé



Théorème de convergence monotone

Toute suite croissante et majorée converge. Plus précisément, si (u_n) est croissante et majorée par M , alors elle converge vers un réel ℓ tel que $\ell \leq M$.

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq 6$.

On note

$$P(n) : u_n \leq 6.$$

- Initialisation

$u_0 = 1 \leq 6$, donc $P(0)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$. On suppose donc $u_n \leq 6$. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$ est croissante, on obtient

$$\frac{1}{2}u_n + 3 \leq \frac{1}{2} \times 6 + 3 = 6.$$

Or $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$, donc $u_{n+1} \leq 6$.

- Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{u_n \leq 6}.$$

2. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{2}u_n + 3 \right) - u_n \\ &= 3 - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{1}{2}(6 - u_n). \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $u_n \leq 6$, donc $6 - u_n \geq 0$. Ainsi

$$u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

La suite (u_n) est donc croissante.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par 6. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ tel que

$$\ell \leq 6.$$

4. Comme (u_n) converge vers ℓ , la suite décalée (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ . En passant à la limite dans

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3,$$

on obtient

$$\ell = \frac{1}{2}\ell + 3.$$

Donc

$$\ell = 6.$$

Ainsi

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6}.$$

5. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 6 - u_{n+1} \\ &= 6 - \left(\frac{1}{2}u_n + 3\right) \\ &= 3 - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{1}{2}(6 - u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. De plus

$$v_0 = 6 - u_0 = 5.$$

Ainsi

$$v_n = 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $v_n = 6 - u_n$, on obtient

$$\boxed{u_n = 6 - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n}.$$

Exercice 21 Méthode de Héron : un exercice guidé

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$

1. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) - \sqrt{2} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}.$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq \sqrt{2}$.

3. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

4. En déduire que (u_n) est décroissante puis convergente.

5. Déterminer sa limite.



Corrigé



Méthode

Pour établir la convergence d'une suite définie par récurrence, on montre souvent qu'elle est monotone et bornée. Une fois la convergence obtenue, on peut passer à la limite dans la relation de récurrence, lorsque les opérations utilisées sont continues sur le domaine considéré.

1. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) - \sqrt{2} &= \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \sqrt{2} \\ &= \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x}{2x} \\ &= \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) - \sqrt{2} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}}.$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq \sqrt{2}$.

- Initialisation

$$u_0 = 2 \geq \sqrt{2}.$$

- Hérédité

Supposons $u_n \geq \sqrt{2}$. En particulier $u_n > 0$. En appliquant l'identité précédente à $x = u_n$, on obtient

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0.$$

Donc $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$.

- Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{u_n \geq \sqrt{2}}.$$

3. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - u_n \\ &= \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n} - u_n \\ &= \frac{1}{u_n} - \frac{u_n}{2} \\ &= \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.\end{aligned}$$

4. D'après la question 2, $u_n \geq \sqrt{2}$, donc $u_n^2 \geq 2$. Ainsi $2 - u_n^2 \leq 0$. Comme $u_n > 0$, on obtient

$$\frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0,$$

c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante.

Elle est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ tel que $\ell \geq \sqrt{2}$.

5. On passe à la limite dans la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$

Comme $\ell \geq \sqrt{2} > 0$, on obtient

$$\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right) &\iff 2\ell = \ell + \frac{2}{\ell} \\ &\iff \ell = \frac{2}{\ell} \\ &\iff \ell^2 = 2. \end{aligned}$$

Comme $\ell > 0$,

$$\boxed{\ell = \sqrt{2}}.$$

Thème X

Complément : algorithmes de seuil

Exercice 22 Python et suites définies par récurrence

On considère la suite (r_n) définie par

$$r_0 = 50000 \quad \text{et} \quad r_{n+1} = 0,96r_n.$$

1. Compléter mentalement les premières valeurs r_1, r_2 .
2. La fonction suivante renvoie le terme de rang n .

```
1 def terme_r(n):
2     r = 50000
3     for k in range(n):
4         r = 0.96 * r
5     return r
```

3. Expliquer pourquoi la boucle est répétée n fois.
4. Écrire une fonction Python qui renvoie la liste $[r_0, r_1, \dots, r_N]$.
5. Écrire une fonction Python qui renvoie le plus petit entier n tel que $r_n < 30000$.



Corrigé



Lecture d'un algorithme de suite

Une boucle qui remplace une variable par l'expression donnant le terme suivant de la suite applique la relation de récurrence une fois à chaque passage dans la boucle. Le nombre de passages permet donc de déterminer le rang atteint.

1. On utilise la relation de récurrence :

$$r_1 = 0,96 \times 50000 = 48000, \quad r_2 = 0,96 \times 48000 = 46080.$$

2. La fonction commence par initialiser r à 50000, c'est-à-dire à r_0 . À chaque passage dans la boucle, l'instruction

$$r = 0.96 * r$$

remplace la valeur de r_k par celle de r_{k+1} . Après n passages dans la boucle, la variable r contient donc la valeur de r_n .

3. En Python, `range(n)` produit n valeurs : $0, 1, \dots, n-1$. La boucle est donc répétée exactement n fois. Cela correspond aux n passages successifs

$$r_0 \rightarrow r_1 \rightarrow \dots \rightarrow r_n.$$

4. Une fonction possible est :

```
def liste_r(N):
    r = 50000
    L = [r]
    for k in range(N):
        r = 0.96 * r
        L.append(r)
    return L
```

On initialise la liste avec r_0 , puis on ajoute successivement $r_1, r_2, \dots, r_N$.

5. Une fonction de seuil possible est :

```
def seuil_r():
    r = 50000
    n = 0
    while r >= 30000:
        r = 0.96 * r
        n = n + 1
    return n
```

La boucle continue tant que le seuil n'est pas franchi. Elle s'arrête donc au premier rang n tel que $r_n < 30000$.

Exercice 23 [BAC] D'après Bac 2026 : programmer une somme cumulée

Source bac : Exercice inspiré des sujets 2026 : suite récurrente, somme de termes et programmation Python.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}}.$$

Pour tout entier naturel n , on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2.$$

1. Calculer u_1 , puis S_0 et S_1 .
2. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la liste

$$[S_0, S_1, \dots, S_p].$$

```
1 from math import sqrt
2
3 def sommes_cumulees(p):
4     u = 1
5     S = .....
6     L = [S]
7     for k in range(p):
8         u = .....
9         S = .....
10        L.append(S)
11    return L
```

3. Expliquer pourquoi la variable u doit être mise à jour avant la variable S dans la boucle.
4. On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$. Montrer que $S_n \geq n + 1$, puis déterminer la limite de (S_n) .

Corrigé



Somme cumulée dans une boucle

Pour construire successivement les sommes $S_0, S_1, \dots, S_p$, on conserve simultanément le terme courant u_n et la somme courante S_n . À chaque passage dans la boucle, on calcule d'abord u_{n+1} , puis on ajoute u_{n+1}^2 à la somme.

1. On obtient

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2u_0}{\sqrt{1+u_0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \\ S_0 &= u_0^2 = 1, \\ S_1 &= u_0^2 + u_1^2 = 1 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_1 = \sqrt{2}, \quad S_0 = 1 \quad \text{et} \quad S_1 = 3.$$

2. Une complétion correcte est :

```

1 from math import sqrt
2
3 def sommes_cumulees(p):
4     u = 1
5     S = u**2
6     L = [S]
7     for k in range(p):
8         u = 2*u/sqrt(1+u**2)
9         S = S + u**2
10        L.append(S)
11    return L

```

La liste contient d'abord S_0 . Les p passages dans la boucle ajoutent ensuite successivement $S_1, S_2, \dots, S_p$.

3. Au début d'un passage dans la boucle, les variables contiennent u_k et S_k . Pour obtenir

$$S_{k+1} = S_k + u_{k+1}^2,$$

il faut d'abord calculer le nouveau terme u_{k+1} , puis ajouter son carré à la somme. Si l'on mettait **S** à jour en premier, on ajouterait une seconde fois u_k^2 .

4. Pour tout entier k , $u_k \geq 1$, donc $u_k^2 \geq 1$. Par sommation,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n u_k^2 \\ &\geq \sum_{k=0}^n 1 \\ &= n + 1. \end{aligned}$$

Or $n + 1 \rightarrow +\infty$. D'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Thème XI

Bilan : en route vers le bac

Exercice 24 [BAC] D'après Bac 2025 : définition de la convergence et seuil

Source bac : Bac 2025 Métropole Sujet 1, exercice 4 - partie A.

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares, et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n , on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année 2024 + n . Ainsi, $u_0 = 1$.

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

- Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au 1^{er} juillet 2025.
- On considère la fonction h définie sur $[0 ; 20]$ par $h(x) = -0,02x^2 + 1,3x$. On admet que h est croissante sur cet intervalle.
 - Démontrer que, pour tout entier naturel n , $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20$.
 - En déduire que la suite (u_n) converge.
 - Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à 15.
- Les biologistes souhaitent savoir quand la posidonie dépassera 14 hectares.
 - Sans calcul, justifier que cela se produira.
 - Compléter l'algorithme Python ci-dessous pour déterminer ce rang.

```

1 | def seuil():
2 |     n = 0
3 |     u = 1
4 |     while .....:
5 |         n = n + 1
6 |         u = -0.02*u**2 + 1.3*u
7 |     return n

```



Corrigé



Stratégie de preuve

Dans une récurrence du type $u_{n+1} = h(u_n)$, si la fonction h est croissante sur l'intervalle où vivent les termes de la suite, on peut composer un encadrement par h pour obtenir l'encadrement au rang suivant.

- On a $u_0 = 1$, donc

$$u_1 = -0,02u_0^2 + 1,3u_0 = -0,02 \times 1^2 + 1,3 \times 1 = 1,28.$$

La posidonie devrait donc recouvrir

1,28 ha

au 1^{er} juillet 2025.

2. a. On pose, pour tout entier naturel n ,

$$P(n) : 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20.$$

Montrons $P(n)$ par récurrence.

- Initialisation

On a

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 1,28.$$

Donc

$$1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 20.$$

La propriété $P(0)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.

On suppose donc

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20.$$

La fonction h est croissante sur $[0 ; 20]$. On peut donc composer l'encadrement précédent par h :

$$h(1) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(20).$$

Or

$$h(u_n) = u_{n+1}, \quad h(u_{n+1}) = u_{n+2}, \quad h(1) = 1,28, \quad h(20) = 18.$$

Ainsi

$$1 \leq 1,28 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 18 \leq 20.$$

Donc

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20.$$

La propriété $P(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20}.$$

2. b. D'après l'encadrement précédent, la suite (u_n) est croissante et majorée par 20. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel L tel que

$$1 \leq L \leq 20.$$

2. c. Comme (u_n) converge vers L , la suite décalée (u_{n+1}) converge aussi vers L . En passant à la limite dans

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n,$$

on obtient

$$L = -0,02L^2 + 1,3L.$$

On résout :

$$\begin{aligned} L = -0,02L^2 + 1,3L &\iff -0,02L^2 + 0,3L = 0 \\ &\iff L(-0,02L + 0,3) = 0 \\ &\iff L = 0 \quad \text{ou} \quad L = 15. \end{aligned}$$

Or $L \in [1 ; 20]$, donc $L \neq 0$. Ainsi

$$\boxed{L = 15}.$$

3. 3. a. La suite (u_n) converge vers 15. D'après la définition de la convergence, tout intervalle ouvert contenant 15 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. En particulier, à partir d'un certain rang, on aura $u_n \in]14 ; 16[$. Donc la posidonie dépassera bien 14 hectares.

3. b. Tant que la superficie ne dépasse pas 14, il faut continuer l'algorithme. La ligne 4 est donc :

$$\boxed{\text{while } u \leq 14:}$$

Exercice 25 [BAC] D'après Bac 2025 : médicament, moyenne et définition de la limite

Source bac : Bac 2025 Asie Sujet 1, exercice 3.

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 mL d'un médicament. On note u_n la quantité de médicament, en mL, présente dans l'organisme immédiatement après n prises. On a $u_1 = 2$ et, pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_{n+1} = 2 + 0,8u_n.$$

Partie A

1. Calculer la valeur u_2 .
2. Montrer, par récurrence sur n , que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}.$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et donner une interprétation.
4. Soit N un entier naturel strictement positif. L'inéquation $u_N \geq 10$ admet-elle des solutions ? Interpréter.
5. À l'aide de la calculatrice ou d'un court programme Python, déterminer à partir de combien de prises la quantité présente dans l'organisme est strictement supérieure à 9 mL.

Partie B

On définit $S_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ pour tout entier naturel n strictement positif. On admet que (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2 .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0,8^n.$$

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.
4. On donne la fonction `mystere` suivante. Dans le contexte de l'exercice, que représente `mystere(9)` ?

```

1 def mystere(k):
2     n = 1
3     s = 2
4     while s < k:
5         n = n + 1
6         s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
7     return n

```

5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.



Corrigé



Rappels utiles

- Pour une suite géométrique de raison q avec $-1 < q < 1$, on a $q^n \rightarrow 0$.
- Pour déterminer un rang de seuil dans une inégalité faisant intervenir q^n , on peut procéder par essais successifs, à la calculatrice ou avec une boucle Python.
- La moyenne $S_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$ se traite souvent en commençant par calculer la somme $u_1 + \dots + u_n$.

Partie A

1. On a $u_1 = 2$. Donc

$$u_2 = 2 + 0,8u_1 = 2 + 0,8 \times 2 = 3,6.$$

Ainsi

$$u_2 = 3,6.$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}.$$

On note

$$P(n) : u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}.$$

- Initialisation

Pour $n = 1$,

$$10 - 8 \times 0,8^0 = 10 - 8 = 2 = u_1.$$

Donc $P(1)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour un entier $n \geq 1$ fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$. On suppose donc

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 + 0,8u_n \\ &= 2 + 0,8(10 - 8 \times 0,8^{n-1}) \\ &= 2 + 8 - 8 \times 0,8^n \\ &= 10 - 8 \times 0,8^n. \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}.$$

3. Comme $-1 < 0,8 < 1$, on a $0,8^{n-1} \rightarrow 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 10.$$

Dans le contexte, cela signifie que la quantité de médicament présente dans l'organisme se rapproche de 10 mL lorsque le nombre de prises devient très grand.

4. Pour tout entier $N \geq 1$,

$$u_N = 10 - 8 \times 0,8^{N-1}.$$

Or $0,8^{N-1} > 0$, donc $8 \times 0,8^{N-1} > 0$. Ainsi

$$u_N < 10.$$

L'inéquation $u_N \geq 10$ n'admet donc aucune solution. Dans le contexte, la quantité de médicament se rapproche de 10 mL mais ne l'atteint jamais avec ce modèle.

5. Comme $0 < 0,8 < 1$, la suite $(0,8^{n-1})$ est décroissante ; la suite

$$u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$$

est donc croissante. Il suffit ainsi de repérer le premier franchissement du seuil 9.

À la calculatrice, on obtient :

$$\begin{aligned} u_{10} &= 10 - 8 \times 0,8^9 \approx 8,926 < 9, \\ u_{11} &= 10 - 8 \times 0,8^{10} \approx 9,141 > 9. \end{aligned}$$

Le premier rang convenable est donc $n = 11$. La quantité de médicament devient strictement supérieure à 9 mL à partir de la

$$11^{\text{e}} \text{ prise}.$$

Partie B

1.

$$S_2 = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{2 + 3,6}{2} = 2,8.$$

Donc

$$\boxed{S_2 = 2,8}.$$

2. Pour tout entier $k \geq 1$,

$$u_k = 10 - 8 \times 0,8^{k-1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_1 + \cdots + u_n &= \sum_{k=1}^n (10 - 8 \times 0,8^{k-1}) \\ &= 10n - 8 \sum_{k=1}^n 0,8^{k-1} \\ &= 10n - 8 \sum_{j=0}^{n-1} 0,8^j \\ &= 10n - 8 \frac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8} \\ &= 10n - 40(1 - 0,8^n) \\ &= \boxed{10n - 40 + 40 \times 0,8^n}. \end{aligned}$$

3. On en déduit

$$S_n = \frac{10n - 40 + 40 \times 0,8^n}{n} = 10 - \frac{40}{n} + \frac{40 \times 0,8^n}{n}.$$

Or

$$\frac{40}{n} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{40 \times 0,8^n}{n} \rightarrow 0.$$

Donc

$$\boxed{S_n \rightarrow 10}.$$

4. La fonction `mystere(k)` renvoie le plus petit entier n tel que

$$S_n \geq k.$$

Ainsi, `mystere(9)` représente le premier nombre de prises à partir duquel la quantité moyenne de médicament dans l'organisme est au moins égale à 9 mL.

5. On admet que (S_n) est croissante. Calculons S_{10} :

$$S_{10} = 10 - \frac{40}{10} + \frac{40 \times 0,8^{10}}{10} = 6 + 4 \times 0,8^{10} < 6 + 4 = 10.$$

Plus précisément, $S_{10} \approx 6,43 < 9$. Comme (S_n) est croissante, pour tout $n \leq 10$,

$$S_n \leq S_{10} < 9.$$

Le premier rang pour lequel $S_n \geq 9$ est donc strictement supérieur à 10.

Exercice 26 [!] Bilan – [BAC] D'après Bac 2026 : passer à la limite dans une relation de récurrence

Source bac : Baccalauréat spécialité mathématiques, Métropole, jour 1, 16 juin 2026, exercice 3, partie B.

Lors d'une phase de refroidissement, on modélise la température d'une pièce par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}.$$

1. Montrer que $u_1 = 19,72$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 10$.
3. On admet que la suite (u_n) est décroissante. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .
 4. a. Justifier que cette limite est solution de l'équation $x = 0,965x + 0,35$.
 4. b. Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 27, page 37.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 28, page 40.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.



Corrigé



Passage à la limite dans une relation de récurrence

Si (u_n) converge vers ℓ , alors la suite décalée (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ . On peut ensuite passer à la limite dans la relation de récurrence en justifiant les limites de tous les termes qui apparaissent.

1. En utilisant la relation de récurrence avec $n = 0$:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,965u_0 + 0,35 + 0,07e^{-0,1 \times 0} \\ &= 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07 \\ &= 19,3 + 0,42 \\ &= 19,72. \end{aligned}$$

Donc

$$u_1 = 19,72.$$

2. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 10$. On note

$$P(n) : u_n > 10.$$

- Initialisation
 $u_0 = 20 > 10$, donc $P(0)$ est vraie.

- Hérédité
 Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$. On suppose donc $u_n > 10$. Comme $0,965 > 0$,

$$0,965u_n > 0,965 \times 10 = 9,65.$$

De plus $0,07e^{-0,1n} > 0$. Donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n} \\ &> 9,65 + 0,35 \\ &= 10. \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{u_n > 10}.$$

3. La suite (u_n) est admise décroissante et, d'après la question précédente, elle est minorée par 10. D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge vers un réel ℓ tel que

$$\ell \geq 10.$$

4. 4. a. Comme (u_n) converge vers ℓ , la suite décalée (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ . De plus

$$e^{-0,1n} \rightarrow 0.$$

En passant à la limite dans

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n},$$

on obtient

$$\ell = 0,965\ell + 0,35.$$

Donc ℓ est bien solution de

$$\boxed{x = 0,965x + 0,35}.$$

4. b. On résout :

$$\begin{aligned} x = 0,965x + 0,35 &\iff 0,035x = 0,35 \\ &\iff x = 10. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\ell = 10}.$$

Dans le contexte, cela signifie que la température de la pièce tend vers 10°C au cours de la phase de refroidissement.

Exercice 27 **[+]** Consolidation : suite auxiliaire et minoration

Source bac : Exercice de synthèse type baccalauréat.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 1$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$.
 2. a. Justifier que la suite (a_n) est bien définie.
 2. b. Montrer que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 3a_n - 1$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $a_n \geq n + 2$.
4. En déduire la limite de la suite (a_n) , puis celle de la suite (u_n) .



Corrigé



Changement de suite

Lorsqu'une relation de récurrence n'est pas directement exploitable, on introduit parfois une suite auxiliaire. Il faut alors vérifier que cette suite est bien définie, établir sa relation de récurrence, puis revenir à la suite initiale.

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n > 1$. On note

$$P(n) : u_n > 1.$$

- Initialisation

$u_0 = 2 > 1$, donc $P(0)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$. On suppose donc $u_n > 1$. Alors $u_n + 2 > 0$, et on peut écrire :

$$\begin{aligned} u_{n+1} > 1 &\iff \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} > 1 \\ &\iff 2u_n + 1 > u_n + 2 \\ &\iff u_n > 1. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie par hypothèse de récurrence. Donc $u_{n+1} > 1$.

- Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{u_n > 1}.$$

2. 2. a. Comme $u_n > 1$ pour tout n , on a $u_n - 1 > 0$. Le quotient

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

est donc bien défini pour tout entier naturel n .

2. b. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2} - 1} \\ &= \frac{\frac{2u_n + 1}{u_n + 2}}{\frac{2u_n + 1 - u_n - 2}{u_n + 2}} \\ &= \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}. \end{aligned}$$

Or

$$3a_n - 1 = 3 \frac{u_n}{u_n - 1} - 1 = \frac{3u_n - (u_n - 1)}{u_n - 1} = \frac{2u_n + 1}{u_n - 1}.$$

Donc

$$\boxed{a_{n+1} = 3a_n - 1}.$$

3. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $a_n \geq n + 2$. On note

$$Q(n) : a_n \geq n + 2.$$

- Initialisation

$$a_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{2}{1} = 2 = 0 + 2.$$

Donc $Q(0)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $Q(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$. On suppose donc $a_n \geq n + 2$. Alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3a_n - 1 \\ &\geq 3(n + 2) - 1 \\ &= 3n + 5 \\ &= (n + 3) + 2n + 2 \\ &\geq n + 3. \end{aligned}$$

Donc $Q(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{a_n \geq n + 2}.$$

4. Comme $a_n \geq n + 2$ et $n + 2 \rightarrow +\infty$, le théorème de comparaison donne

$$\boxed{a_n \rightarrow +\infty}.$$

Or

$$\begin{aligned} a_n = \frac{u_n}{u_n - 1} &\iff a_n(u_n - 1) = u_n \\ &\iff a_n u_n - a_n = u_n \\ &\iff u_n(a_n - 1) = a_n \\ &\iff u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}. \end{aligned}$$

Donc

$$u_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_n}}.$$

Comme $a_n \rightarrow +\infty$, on a $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$, et ainsi

$$\boxed{u_n \rightarrow 1}.$$

Exercice 28 [*] **Approfondissement : deux méthodes pour une même limite**

Source bac : Exercice de synthèse type baccalauréat.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{6u_n^2}{3 + u_n^2}}.$$

1. Montrer par récurrence que $1 \leq u_n < \sqrt{3}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$.
3. En déduire que la suite (u_n) converge, puis déterminer sa limite.
4. Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.
 4. a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 2.
 4. b. En déduire une expression de v_n , puis retrouver la limite de (u_n) .

**Corrigé****Deux approches complémentaires**

Une première méthode consiste à prouver la convergence par monotonie et encadrement, puis à identifier la limite. Une seconde méthode consiste à introduire une suite auxiliaire explicite, souvent géométrique, afin de retrouver la limite par calcul direct.

1. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$1 \leq u_n < \sqrt{3}.$$

On note $P(n)$ cette propriété.

- Initialisation
 $u_0 = 1$, donc $1 \leq u_0 < \sqrt{3}$.
- Hérédité
Supposons que pour n entier fixé, $1 \leq u_n < \sqrt{3}$. Alors $1 \leq u_n^2 < 3$. Comme $u_{n+1} \geq 0$, on peut raisonner sur son carré :

$$u_{n+1}^2 = \frac{6u_n^2}{3 + u_n^2}.$$

D'une part, comme $u_n^2 \geq 1$,

$$u_{n+1}^2 = \frac{6u_n^2}{3 + u_n^2} \geq 1 \iff 6u_n^2 \geq 3 + u_n^2 \iff 5u_n^2 \geq 3,$$

ce qui est vrai puisque $u_n^2 \geq 1$. Donc $u_{n+1} \geq 1$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 < 3 &\iff \frac{6u_n^2}{3 + u_n^2} < 3 \\ &\iff 6u_n^2 < 9 + 3u_n^2 \\ &\iff u_n^2 < 3, \end{aligned}$$

ce qui est vrai par hypothèse de récurrence. Donc $u_{n+1} < \sqrt{3}$.

- Conclusion
Par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{1 \leq u_n < \sqrt{3}}.$$

2. Les termes étant positifs, on peut comparer les carrés :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} \geq u_n &\iff u_{n+1}^2 \geq u_n^2 \\
 &\iff \frac{6u_n^2}{3+u_n^2} \geq u_n^2 \\
 &\iff 6u_n^2 \geq u_n^2(3+u_n^2) \\
 &\iff 6 \geq 3+u_n^2 \quad (u_n^2 > 0) \\
 &\iff u_n^2 \leq 3.
 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie d'après la question précédente. Donc

$$\boxed{u_{n+1} \geq u_n}.$$

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par $\sqrt{3}$. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel ℓ tel que

$$1 \leq \ell \leq \sqrt{3}.$$

En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient

$$\ell = \sqrt{\frac{6\ell^2}{3+\ell^2}}.$$

Comme $\ell \geq 1$, on peut élever au carré :

$$\begin{aligned}
 \ell^2 = \frac{6\ell^2}{3+\ell^2} &\iff \ell^2(3+\ell^2) = 6\ell^2 \\
 &\iff \ell^2(\ell^2-3) = 0.
 \end{aligned}$$

Comme $\ell \geq 1$, on a $\ell \neq 0$. Donc $\ell^2 = 3$ et

$$\boxed{\ell = \sqrt{3}}.$$

4. 4. a. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}^2}{3-u_{n+1}^2} \\
 &= \frac{\frac{6u_n^2}{3+u_n^2}}{3-\frac{6u_n^2}{3+u_n^2}} \\
 &= \frac{\frac{6u_n^2}{3+u_n^2}}{\frac{9+3u_n^2-6u_n^2}{3+u_n^2}} \\
 &= \frac{6u_n^2}{9-3u_n^2} \\
 &= 2 \frac{u_n^2}{3-u_n^2} \\
 &= 2v_n.
 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est géométrique de raison 2.

4. b. On a

$$v_0 = \frac{u_0^2}{3-u_0^2} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\boxed{v_n = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}}.$$

Comme $v_n \rightarrow +\infty$ et

$$v_n = \frac{u_n^2}{3-u_n^2},$$

on obtient

$$u_n^2 = \frac{3v_n}{1+v_n} = \frac{3}{1+\frac{1}{v_n}} \rightarrow 3.$$

Puisque $u_n \geqslant 0$,

$$\boxed{u_n \rightarrow \sqrt{3}}.$$

Exercice 29 [BAC] D'après Bac 2025 : deux suites vers une même limite

Source bac : Baccalauréat spécialité mathématiques, Métropole, jour 1, 9 septembre 2025, exercice 3.

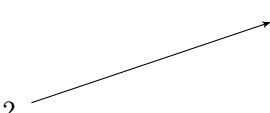
Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[2 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x-2}$.

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
Variations de f	2	$+\infty$



On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. 2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.
2. b. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. On appelle ℓ la limite de (u_n) . On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer ℓ .
4. On considère la fonction **rang** ci-dessous.

```

1 | from math import sqrt
2 | def rang(a):
3 |     n = 0
4 |     u = 6
5 |     while u > a:
6 |         u = sqrt(3*u - 2)
7 |         n = n + 1
8 |     return n

```

4. 4. a. Pourquoi peut-on affirmer que **rang**(2.000001) renvoie une valeur ?
4. b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction **rang**(a) renvoie-t-elle un résultat ?

Partie B

On admet que $v_0 = 6$ et $v_{n+1} = 3 - \frac{2}{v_n}$.

1. Calculer v_1 .
2. Pour tout n , on pose $w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$.
 2. a. Démontrer que (w_n) est géométrique de raison 2 et préciser w_0 .
 2. b. En déduire que $v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$.
 2. c. Calculer la limite de (v_n) .
3. Déterminer le plus petit entier naturel n pour lequel $v_n < 2,01$.

Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier N tel que pour tout $n \geq N$, les termes u_n et v_n appartiennent à l'intervalle $]1,99 ; 2,01[$.

**Corrigé****Rappels utiles**

- Une suite décroissante et minorée converge.
- Si $u_n \rightarrow \ell$ et si $u_{n+1} = f(u_n)$, alors, lorsque le passage à la limite est justifié, la limite vérifie $\ell = f(\ell)$.
- Pour un algorithme de seuil, la boucle s'arrête seulement si le seuil demandé est compatible avec la limite atteinte par la suite.

Partie A

1. La fonction $x \mapsto 3x - 2$ est croissante sur $[2 ; +\infty[$ et prend des valeurs positives sur cet intervalle. La fonction racine carrée est croissante sur $[0 ; +\infty[$. Donc, par composition, f est croissante sur $[2 ; +\infty[$. De plus

$$f(2) = \sqrt{4} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Le tableau de variations donné est donc justifié.

2. 2. a. Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n ,

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6.$$

On note cette propriété $P(n)$.

- Initialisation

$$u_0 = 6 \text{ et}$$

$$u_1 = f(6) = \sqrt{18 - 2} = 4.$$

Donc

$$2 \leq u_1 \leq u_0 \leq 6.$$

Ainsi $P(0)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$. On suppose donc

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6.$$

Comme f est croissante sur $[2 ; +\infty[$,

$$f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(6).$$

Or

$$f(2) = 2, \quad f(u_{n+1}) = u_{n+2}, \quad f(u_n) = u_{n+1}, \quad f(6) = 4 \leq 6.$$

Donc

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 6.$$

Ainsi $P(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion

Par récurrence, pour tout entier naturel n ,

$$\boxed{2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6}.$$

2. b. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers un réel $\ell \geq 2$.
3. La limite ℓ est solution de $f(x) = x$. On résout sur $[2 ; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \sqrt{3x - 2} = x &\iff 3x - 2 = x^2 \quad \text{car } x \geq 2 \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\iff (x - 1)(x - 2) = 0. \end{aligned}$$

Sur $[2 ; +\infty[$, la seule solution est 2. Donc

$$\boxed{\ell = 2}.$$

4. 4. a. Comme (u_n) converge vers 2 et que $2,000001 > 2$, il existe un rang à partir duquel $u_n \leq 2,000001$. La boucle **while** **u > a** finit donc par s'arrêter pour $a = 2,000001$.
4. b. La fonction **rang(a)** renvoie un résultat exactement lorsque la suite finit par devenir inférieure ou égale à a . Comme (u_n) est décroissante vers 2 et vérifie $u_n \geq 2$, cela arrive si et seulement si

$$\boxed{a > 2}.$$

Si $a \geq 6$, la fonction renvoie immédiatement 0.

Partie B

1.

$$v_1 = 3 - \frac{2}{v_0} = 3 - \frac{2}{6} = 3 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}.$$

2. 2. a. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \frac{v_{n+1} - 1}{v_{n+1} - 2} \\ &= \frac{3 - \frac{2}{v_n} - 1}{3 - \frac{2}{v_n} - 2} \\ &= \frac{2 - \frac{2}{v_n}}{1 - \frac{2}{v_n}} \\ &= \frac{\frac{2v_n - 2}{v_n}}{\frac{v_n - 2}{v_n}} \\ &= 2 \frac{v_n - 1}{v_n - 2} \\ &= 2w_n. \end{aligned}$$

Donc (w_n) est géométrique de raison 2. De plus

$$w_0 = \frac{6 - 1}{6 - 2} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

2. b. On admet

$$\frac{v_n - 1}{v_n - 2} = 1,25 \times 2^n.$$

En résolvant cette équation d'inconnue v_n :

$$\begin{aligned} v_n - 1 &= (1,25 \times 2^n)(v_n - 2) \\ v_n(1,25 \times 2^n - 1) &= 2(1,25 \times 2^n) - 1 \\ v_n &= 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}}.$$

2. c. Comme $2^n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} \rightarrow 0.$$

Donc

$$\boxed{v_n \rightarrow 2}.$$

3. On résout :

$$\begin{aligned} v_n < 2,01 &\iff 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} < 2,01 \\ &\iff \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1} < 0,01 \\ &\iff 1,25 \times 2^n - 1 > 100 \\ &\iff 2^n > 80,8. \end{aligned}$$

Or $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$. Le plus petit entier est donc

$$\boxed{n = 7}.$$

Partie C

On veut que, pour tout $n \geq N$,

$$u_n \in]1,99 ; 2,01[\quad \text{et} \quad v_n \in]1,99 ; 2,01[.$$

- Pour la suite (u_n) , on a montré que (u_n) est décroissante, converge vers 2 et vérifie $u_n \geq 2$ pour tout n . Il suffit donc de déterminer le premier rang à partir duquel

$$u_n < 2,01.$$

En calculant les termes successifs avec

$$u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2}, \quad u_0 = 6,$$

on obtient

$$u_{16} \approx 2,01299 > 2,01 \quad \text{et} \quad u_{17} \approx 2,00869 < 2,01.$$

Donc, pour tout $n \geq 17$,

$$u_n \in]1,99 ; 2,01[.$$

- Pour la suite (v_n) , on a établi que le plus petit entier naturel tel que $v_n < 2,01$ est $n = 7$. Comme $v_n > 2$ pour tout entier naturel n , on a donc, pour tout $n \geq 7$,

$$v_n \in]1,99 ; 2,01[.$$

Les deux conditions doivent être vraies simultanément. On choisit donc le plus grand des deux rangs :

$$N = \max(17, 7) = 17.$$

Ainsi,

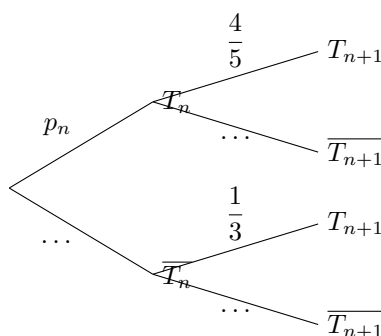
$$\boxed{N = 17}.$$

Exercice 30 [BAC] D'après Bac 2026 : probabilités, suites et Python

Source bac : Baccalauréat spécialité mathématiques, Asie-Pacifique, jour 1, 9 juin 2026, exercice 1.

Un tireur à l'arc s'entraîne sur une cible dans le but d'atteindre son centre. On note T_n l'événement : « Le tireur atteint le centre au n -ième tir » et $p_n = P(T_n)$.

- $p_1 = \frac{1}{2}$;
 - s'il a atteint le centre au tir précédent, la probabilité d'atteindre à nouveau le centre est $\frac{4}{5}$;
 - s'il n'a pas atteint le centre au tir précédent, la probabilité d'atteindre le centre est $\frac{1}{3}$.
1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = \frac{17}{30}$.
 2. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant.



3. Montrer que $p_{n+1} = \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}$.
4. On pose $u_n = p_n - \frac{5}{8}$.
 4. a. Montrer que (u_n) est géométrique de raison $\frac{7}{15}$.
 4. b. Déterminer une expression de u_n .
 4. c. En déduire une expression de p_n .
5. Déterminer la limite de (p_n) et l'interpréter.
6. Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie le plus petit entier n tel que $p_n \geq 0,6$.

```

1 def seuil():
2     n = 1
3     p = 0.5
4     while .....:
5         n = .....
6         p = .....
7     return .....
```

7. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $p_n \geq 0,6$.

**Corrigé****Probabilités totales et suite auxiliaire**

On utilise la formule des probabilités totales à partir de la partition T_n et $\overline{T_n}$. Pour une relation affine $p_{n+1} = ap_n + b$, on cherche souvent le point fixe ℓ puis on étudie la suite auxiliaire $u_n = p_n - \ell$.

1. D'après l'énoncé,

$$p_1 = \frac{1}{2}.$$

Pour calculer p_2 , on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements T_1 et $\overline{T_1}$:

$$\begin{aligned} p_2 &= P(T_2) \\ &= P(T_1 \cap T_2) + P(\overline{T_1} \cap T_2) \\ &= P(T_1)P_{T_1}(T_2) + P(\overline{T_1})P_{\overline{T_1}}(T_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{12}{30} + \frac{5}{30} \\ &= \frac{17}{30}. \end{aligned}$$

2. Les probabilités manquantes sont les probabilités complémentaires :

$$P(\overline{T_n}) = 1 - p_n, \quad P_{T_n}(\overline{T_{n+1}}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}, \quad P_{\overline{T_n}}(\overline{T_{n+1}}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

3. Pour tout entier naturel n non nul, on applique la formule des probabilités totales avec T_n et $\overline{T_n}$:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(T_{n+1}) \\ &= P(T_n \cap T_{n+1}) + P(\overline{T_n} \cap T_{n+1}) \\ &= P(T_n)P_{T_n}(T_{n+1}) + P(\overline{T_n})P_{\overline{T_n}}(T_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{4}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{5}p_n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_n \\ &= \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right)p_n + \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4. 4. a. Pour tout entier naturel n non nul,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - \frac{5}{8} \\ &= \left(\frac{7}{15}p_n + \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{8} \\ &= \frac{7}{15}p_n + \frac{8}{24} - \frac{15}{24} \\ &= \frac{7}{15}p_n - \frac{7}{24} \\ &= \frac{7}{15}\left(p_n - \frac{5}{8}\right) \\ &= \frac{7}{15}u_n. \end{aligned}$$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{7}{15}$.

4. b. Son premier terme est

$$u_1 = p_1 - \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8}.$$

Comme la suite est définie à partir du rang 1,

$$u_n = -\frac{1}{8} \left(\frac{7}{15}\right)^{n-1}.$$

4. c. Comme $u_n = p_n - \frac{5}{8}$, on a $p_n = u_n + \frac{5}{8}$. Donc

$$p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1}.$$

5. Comme $0 < \frac{7}{15} < 1$, on a

$$\left(\frac{7}{15} \right)^{n-1} \rightarrow 0.$$

Donc

$$p_n \rightarrow \frac{5}{8}.$$

Dans le contexte, cela signifie qu'à long terme la probabilité que le tireur atteigne le centre de la cible se stabilise vers

$$\frac{5}{8} = 0,625.$$

6. La fonction doit continuer tant que $p < 0,6$, puis passer au tir suivant et mettre à jour p avec la relation de récurrence. Une complétion correcte est :

```
def seuil():
    n = 1
    p = 0.5
    while p < 0.6:
        n = n + 1
        p = (7/15) * p + 1/3
    return n
```

7. Pour tout entier naturel n non nul,

$$p_n = \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1}.$$

On résout :

$$\begin{aligned} p_n \geq 0,6 &\iff \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1} \geq \frac{3}{5} \\ &\iff \frac{5}{8} - \frac{3}{5} \geq \frac{1}{8} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1} \\ &\iff \frac{1}{40} \geq \frac{1}{8} \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1} \\ &\iff \frac{1}{5} \geq \left(\frac{7}{15} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Or

$$\left(\frac{7}{15} \right)^2 = \frac{49}{225} > \frac{1}{5} \quad \text{car } 49 > 45,$$

et

$$\left(\frac{7}{15} \right)^3 = \frac{343}{3375} < \frac{1}{5} \quad \text{car } 5 \times 343 = 1715 < 3375.$$

Le plus petit rang vérifiant l'inéquation est donc obtenu pour $n - 1 = 3$, soit

$$n = 4.$$

Thème XII

[HP] Hors programme : Now We Can Talk – en route vers le supérieur

Exercice 31 Suites extraites et valeurs d'adhérence

Cet exercice n'est pas exigible au baccalauréat. Il sert à comprendre plus finement pourquoi certaines suites bornées ne convergent pas.

- On considère $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$.
 - Calculer u_{2n} et u_{2n+1} .
 - Déterminer les limites des deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) .
 - En déduire que (u_n) ne converge pas.
- On considère une suite (a_n) et une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
 - Expliquer pourquoi $(a_{\varphi(n)})$ est appelée une suite extraite de (a_n) .
 - Montrer que si (a_n) converge vers ℓ , alors toute suite extraite $(a_{\varphi(n)})$ converge aussi vers ℓ .



Corrigé



Suites extraites

Une suite extraite de (a_n) est une suite de la forme $(a_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante. Si (a_n) converge vers ℓ , toute suite extraite converge vers la même limite ℓ .

1. a. Pour tout entier naturel n ,

$$u_{2n} = (-1)^{2n} + \frac{1}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1},$$

et

$$u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = -1 + \frac{1}{2n+2}.$$

- b. On obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -1.$$

- c. Si la suite (u_n) convergerait vers un réel ℓ , alors toutes ses suites extraites convergeraient vers ℓ . Or deux suites extraites convergent ici vers deux limites différentes, 1 et -1 . Donc

(u_n) ne converge pas.

2. a. Une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante sélectionne des indices

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \varphi(2) < \dots$$

La suite $(a_{\varphi(n)})$ est donc obtenue en conservant certains termes de la suite (a_n) , dans leur ordre d'origine : c'est une suite extraite.

- b. Supposons que (a_n) converge vers ℓ . Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence, il existe un rang N tel que, pour tout $p \geq N$,

$$|a_p - \ell| < \varepsilon.$$

Comme φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \rightarrow +\infty$. Il existe donc un rang N' tel que, pour tout $n \geq N'$,

$$\varphi(n) \geq N.$$

Alors, pour tout $n \geq N'$,

$$|a_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon.$$

Donc

$$a_{\varphi(n)} \rightarrow \ell.$$

Exercice 32 Suites adjacentes

Cet exercice n'est pas exigible au baccalauréat. On considère deux suites (u_n) et (v_n) telles que :

- (u_n) est croissante ;
 - (v_n) est décroissante ;
 - pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$;
 - $v_n - u_n \rightarrow 0$.
1. Montrer que (u_n) est majorée et que (v_n) est minorée.
 2. En déduire que les deux suites convergent.
 3. Montrer que leurs limites sont égales.
 4. Application : on pose, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

**Corrigé****Suites adjacentes**

Deux suites sont adjacentes lorsqu'une est croissante, l'autre décroissante, que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, et que $v_n - u_n \rightarrow 0$. Elles convergent alors vers une même limite.

1. Comme (v_n) est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n \leq v_0.$$

Or $u_n \leq v_n$, donc

$$u_n \leq v_0.$$

Ainsi (u_n) est majorée.

Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_0 \leq u_n.$$

Or $u_n \leq v_n$, donc

$$u_0 \leq v_n.$$

Ainsi (v_n) est minorée.

2. La suite (u_n) est croissante et majorée ; d'après le théorème de convergence monotone, elle converge. La suite (v_n) est décroissante et minorée ; d'après le même théorème, elle converge.

3. Notons

$$\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \quad \text{et} \quad m = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Comme $v_n - u_n \rightarrow 0$, par différence des limites,

$$m - \ell = 0.$$

Donc

$$\boxed{\ell = m}.$$

Les deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

4. Pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

On a déjà montré dans l'exercice 2 que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante. De plus,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Enfin $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 1$ car $\frac{1}{n} > 0$. Les suites (u_n) et (v_n) vérifient donc les quatre conditions de la définition : elles sont adjacentes.