

TD – EXERCICES

TD 2

Fonction exponentielle, études de fonctions et suites

Version élève

Sommaire du TD

I	Automatismes sur la fonction exponentielle	2
II	Études de fonctions avec exponentielle	4
III	Fonctions associées à des suites	7
IV	En route vers le Bac	9
V	Now We Can Talk : en route vers le supérieur	13

Objectifs du TD

Ce TD a pour objectif de consolider les méthodes autour de la fonction exponentielle, des études de fonctions et des suites définies par récurrence.

- Calculer : manipuler les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre des équations ou inéquations simples avec exponentielle, calculer des dérivées et des images.
- Raisonner : exploiter un tableau de variations, démontrer un encadrement, établir la monotonie d'une suite et utiliser un raisonnement par récurrence.
- Communiquer : rédiger une justification complète, organiser une démonstration et présenter clairement les étapes d'un raisonnement.

Thème I

Automatismes sur la fonction exponentielle



Rappels de cours : fonction exponentielle

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1.$$

On note $\exp(x) = e^x$.

Pour tous réels a et b , et pour tout entier naturel n :

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad e^{na} = (e^a)^n.$$

On retiendra aussi l'approximation utile : $e \approx 2,7$.

De plus, pour tout réel x : $e^x > 0$.

Cette propriété est très importante pour les études de signe : le signe de $A(x)e^x$ est le signe de $A(x)$.

Exercice 1 [FLASH] Automatismes Propriétés algébriques de l'exponentielle

Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = e^{2x}e^{-x}$.

2. $B = \frac{e^{3x+1}}{e^{x-2}}$.

3. $C = e^{x+1}e^{2-x}$.

4. $D = \frac{e^{2x}e^{-3}}{e^{x-1}}$.

Résoudre ensuite les équations suivantes, sans utiliser de logarithme.

1. $e^x = 1$.

2. $e^{2x} = 1$.

3. $e^{x+3} = e^{2x-1}$.

4. $e^{3x+2} = e^{x-4}$.

Exercice 2 [FLASH] Automatismes Dériver avec exponentielle**Rappels de cours : dérivées avec exponentielle**

Si u est une fonction dérivable, alors :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}.$$

On rappelle aussi les formules de dérivation :

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

1. $f(x) = e^{3x-1}$.

4. $p(x) = (2x - 3)e^{-x}$.

2. $g(x) = 4e^{-2x} + 5$.

5. $q(x) = \frac{e^x}{x+1}$ sur $[0 ; 3]$.

3. $h(x) = xe^x$.

Thème II

Études de fonctions avec exponentielle



Méthode : étudier les variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction f , on suit généralement les étapes suivantes.

- On calcule la dérivée $f'(x)$.
- On factorise $f'(x)$ si possible.
- On étudie le signe de $f'(x)$.
- On en déduit les variations de f .

Dans ce TD, dès qu'un facteur e^x ou e^{-x} apparaît dans une dérivée, il est toujours strictement positif. Le signe de la dérivée dépend donc des autres facteurs.

Exercice 3 Bilan Fonction produit : un classique

Source bac : Inspiré d'un exercice de bac 2025 comportant la fonction $f(x) = xe^{-2x}$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{-2x}.$$

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. Dresser le tableau de variations de f .
4. Déterminer la valeur exacte du maximum de f .

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 5, page 6.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Source bac : D'après Centres étrangers, sujet 2, 11 juin 2026, exercice 4 (partie accessible sans limites).

$$f(x) = e^{-x}(x^2 - 3x + 2).$$

- $$f'(x) = (-x^2 + 5x - 5)e^{-x}.$$

- $$-x^2 + 5x - 5.$$

4. Dresser le tableau de variations de f .

[illegible]

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

1. Justifier que f est bien définie sur $[0 ; 3]$.
2. On admet que f est dérivable sur $[0 ; 3]$. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 3]$:

$$f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 3]$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 3]$.
5. Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $[0 ; 3]$.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting or typing. There are no margins, text, or other markings on the page.

Thème III

Fonctions associées à des suites



Rappels : intervalle stable et récurrence

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Dire que l'intervalle I est stable par f signifie que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in I.$$

Si une suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et si $u_0 \in I$, alors une récurrence permet souvent de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$

C'est une méthode très classique dans les exercices de bac sur les suites définies par récurrence.

Exercice 6

[!] Bilan Intervalle stable avec exponentielle

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e+2}.$$

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. On admet que f est dérivable sur $[0 ; 1]$. Montrer que f est croissante sur $[0 ; 1]$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 1]$:

$$0 \leq f(x) \leq 1.$$

3. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq 1.$$

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the entire width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

Parcours A – Consolidation

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 7, page 8.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 8, page 9.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 7 [+] Consolidation Monotonie d'une suite définie par une fonction croissante

On reprend la fonction :

$$f(x) = \frac{e^x}{e+2}$$

et la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet le résultat de l'exercice précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

1. Calculer u_1 .
2. Montrer que $u_0 \leq u_1$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

4. Que vient-on de démontrer sur la suite (u_n) ?

[illegible]

Thème IV

En route vers le Bac

Exercice 8 **[*] Approfondissement** **Fonction exponentielle quotient et suite récurrente**

Source bac : Exercice construit dans l'esprit des sujets récents : fonction, suite définie par récurrence, intervalle stable, récurrence et Python.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 3}.$$

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On admet que :

$$1 < e < 3 \quad \text{et donc} \quad 1 < e^2 < 9.$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $[0 ; 2]$.
2. On admet que f est dérivable sur $[0 ; 2]$. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$f'(x) = \frac{6e^x}{(e^x + 3)^2}.$$

3. En déduire que f est croissante sur $[0 ; 2]$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{3}{2}.$$

5. En déduire que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$0 \leq f(x) \leq 2.$$

6. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq 2.$$

7. Calculer u_1 et u_2 sous forme exacte.
8. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la liste des $N + 1$ premiers termes de la suite, de u_0 à u_N .

```

1  from math import exp
2
3  def liste_termes(N):
4      u = 0
5      L = [u]
6      for k in range(...):
7          u = ...
8          L.append(...)
9      return L

```

9. On obtient avec Python les valeurs arrondies au millièmme :

$$[0 ; 0,500 ; 0,709 ; 0,808 ; 0,856 ; 0,879].$$

Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (u_n) ?

.....

.....

.....

.....

Exercice 9

Dans un modèle simplifié, on note u_n la quantité, en milligrammes, d'un médicament présente dans le sang après la n -ième injection.

On admet que :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0,7u_n + 0,75 + 0,05e^{-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On considère la fonction g définie sur $[1 ; 4]$ par :

$$q(x) = 0,7x + 0,75 + 0,05e^{-x}.$$

1. Donner la valeur exacte de u_1 , puis une valeur approchée de u_1 et de u_2 au millième.
2. On admet que g est dérivable sur $[1 ; 4]$. Montrer que g est strictement croissante sur $[1 ; 4]$.
3. Montrer que :

$$u_0 \leq u_1 \leq 4.$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

5. Que vient-on de démontrer sur la suite (u_n) ?
6. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie le premier entier n tel que $u_n > 2,4$.

```
1 from math import exp
2
3 def seuil():
4     n = 0
5     u = 1
6     while ...:
7         n = ...
8         u = ...
9     return n
```

Exercice 10 Bilan : exponentielle, variations, suite et Python

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = (2 - x)e^x.$$

On définit d'abord la suite (u_n) par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. On admet que f est dérivable sur $[0 ; 2]$. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$f'(x) = (1 - x)e^x.$$

2. Étudier les variations de f sur $[0 ; 2]$.

3. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$0 \leq f(x) \leq e.$$

Cette question permet-elle de montrer que $[0 ; 2]$ est stable par la fonction f ? Justifier.

4. On modifie la suite et on pose désormais :

$$v_0 = 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{f(v_n)}{e}.$$

Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$0 \leq \frac{f(x)}{e} \leq 1.$$

5. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq v_n \leq 1.$$

6. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la liste des $N + 1$ premiers termes de la suite (v_n) .

```
1 from math import exp
2
3 def liste_v(N):
4     v = 0
5     L = [v]
6     for k in range(...):
7         v = ...
8         L.append(...)
9     return L
```

Exercice 11 [BAC] D'après Bac 2026 Récurrence avec un terme exponentiel

Source bac : D'après Métropole, sujet 1, 16 juin 2026, exercice 3 (questions accessibles sans limites).

Lors d'une phase de refroidissement, la température d'une pièce est modélisée par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}.$$

Le terme u_n représente une température, exprimée en degrés Celsius, après n dizaines de minutes.

1. Montrer que $u_1 = 19,72$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n > 10.$$

Thème V

Now We Can Talk : en route vers le supérieur

Exercice 12 Une fonction quotient plus subtile



On considère la fonction f définie sur $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - x + 1}.$$

On admet que :

$$2 < e < 3.$$

1. Justifier que f est bien définie sur $[0 ; 2]$.
2. On admet que f est dérivable sur $[0 ; 2]$. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)e^x}{(x^2-x+1)^2}.$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 2]$.
4. En déduire les variations de f sur $[0 ; 2]$.
5. Déterminer la valeur exacte du maximum de f sur $[0 ; 2]$.
6. En utilisant $2 < e < 3$, montrer que la valeur minimale de f sur $[0 ; 2]$ est 1.

[illegible]

Exercice 13 Une récurrence plus difficile avec exponentielle



On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2e^{u_n}}{e^{u_n} + 3}.$$

On admet que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq 2.$$

1. On note f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 3}.$$

On admet que f est dérivable sur $[0 ; 1]$. Montrer que f est croissante sur $[0 ; 1]$.

2. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 1]$:

$$0 \leq f(x) \leq 1.$$

3. Calculer u_1 et vérifier que :

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1.$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

5. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie le premier entier n tel que $u_n > 0,9$.

```
1 from math import exp
2
3 def seuil():
4     n = 0
5     u = 0
6     while ...:
7         n = ...
8         u = ...
9     return n
```

↵ Fin du TD ↗