

TD – EXERCICES

TD 2

Fonction exponentielle, études de fonctions et suites

Version corrigée

Sommaire du TD

I	Automatismes sur la fonction exponentielle	2
II	Études de fonctions avec exponentielle	5
III	Fonctions associées à des suites	8
IV	En route vers le Bac	11
V	Now We Can Talk : en route vers le supérieur	19

Objectifs du TD

Ce TD a pour objectif de consolider les méthodes autour de la fonction exponentielle, des études de fonctions et des suites définies par récurrence.

- Calculer : manipuler les propriétés de la fonction exponentielle, résoudre des équations ou inéquations simples avec exponentielle, calculer des dérivées et des images.
- Raisonner : exploiter un tableau de variations, démontrer un encadrement, établir la monotonie d'une suite et utiliser un raisonnement par récurrence.
- Communiquer : rédiger une justification complète, organiser une démonstration et présenter clairement les étapes d'un raisonnement.

Thème I

Automatismes sur la fonction exponentielle



Rappels de cours : fonction exponentielle

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1.$$

On note $\exp(x) = e^x$.

Pour tous réels a et b , et pour tout entier naturel n :

$$e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad e^{na} = (e^a)^n.$$

On retiendra aussi l'approximation utile : $e \approx 2,7$.

De plus, pour tout réel x : $e^x > 0$.

Cette propriété est très importante pour les études de signe : le signe de $A(x)e^x$ est le signe de $A(x)$.

Exercice 1 [FLASH] Automatismes Propriétés algébriques de l'exponentielle

Simplifier les expressions suivantes.

1. $A = e^{2x} e^{-x}$.

2. $B = \frac{e^{3x+1}}{e^{x-2}}$.

3. $C = e^{x+1} e^{2-x}$.

4. $D = \frac{e^{2x} e^{-3}}{e^{x-1}}$.

Résoudre ensuite les équations suivantes, sans utiliser de logarithme.

1. $e^x = 1$.

2. $e^{2x} = 1$.

3. $e^{x+3} = e^{2x-1}$.

4. $e^{3x+2} = e^{x-4}$.



Corrigé rédigé

1. On utilise $e^a e^b = e^{a+b}$ et $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$.

$$A = e^{2x} e^{-x} = e^x,$$

$$B = \frac{e^{3x+1}}{e^{x-2}} = e^{3x+1-(x-2)} = e^{2x+3},$$

$$C = e^{x+1} e^{2-x} = e^3,$$

$$D = \frac{e^{2x} e^{-3}}{e^{x-1}} = e^{2x-3-(x-1)} = e^{x-2}.$$

2. On utilise le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante, donc :

$$e^A = e^B \iff A = B.$$

Ainsi :

$$e^x = 1 \iff e^x = e^0$$

$$\iff x = 0.$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$e^{2x} = 1 \iff e^{2x} = e^0$$

$$\iff 2x = 0$$

$$\iff x = 0.$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$e^{x+3} = e^{2x-1} \iff x+3 = 2x-1 \\ \iff x = 4.$$

$$\boxed{x = 4}$$

$$e^{3x+2} = e^{x-4} \iff 3x+2 = x-4 \\ \iff 2x = -6 \\ \iff x = -3.$$

$$\boxed{x = -3}$$

Exercice 2 [FLASH] Automatismes Dériver avec exponentielle



Rappels de cours : dérivées avec exponentielle

Si u est une fonction dérivable, alors :

$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}.$$

On rappelle aussi les formules de dérivation :

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

1. $f(x) = e^{3x-1}$.
2. $g(x) = 4e^{-2x} + 5$.
3. $h(x) = xe^x$.
4. $p(x) = (2x-3)e^{-x}$.
5. $q(x) = \frac{e^x}{x+1}$ sur $[0 ; 3]$.



Corrigé rédigé

1. Comme $(3x-1)' = 3$, on obtient :

$$\boxed{f'(x) = 3e^{3x-1}}.$$

2. Comme $(-2x)' = -2$, on obtient :

$$\boxed{g'(x) = 4 \times (-2)e^{-2x} = -8e^{-2x}}.$$

3. On dérive un produit :

$$h'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x \\ = (x+1)e^x.$$

$$\boxed{h'(x) = (x+1)e^x}.$$

4. On dérive un produit :

$$p'(x) = 2e^{-x} + (2x-3)(-e^{-x}) \\ = (2-2x+3)e^{-x} \\ = (5-2x)e^{-x}.$$

$$\boxed{p'(x) = (5-2x)e^{-x}}.$$

5. Pour $x \in [0 ; 3]$, on a $x + 1 > 0$. On dérive un quotient avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x + 1$:

$$\begin{aligned} q'(x) &= \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{xe^x}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{q'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

Thème II

Études de fonctions avec exponentielle



Méthode : étudier les variations d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction f , on suit généralement les étapes suivantes.

- On calcule la dérivée $f'(x)$.
- On factorise $f'(x)$ si possible.
- On étudie le signe de $f'(x)$.
- On en déduit les variations de f .

Dans ce TD, dès qu'un facteur e^x ou e^{-x} apparaît dans une dérivée, il est toujours strictement positif. Le signe de la dérivée dépend donc des autres facteurs.

Exercice 3 **[!] Bilan** Fonction produit : un classique

Source bac : Inspiré d'un exercice de bac 2025 comportant la fonction $f(x) = xe^{-2x}$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{-2x}.$$

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x}.$$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
 3. Dresser le tableau de variations de f .
 4. Déterminer la valeur exacte du maximum de f .



Corrigé rédigé

1. On dérive un produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times e^{-2x} + x \times (-2e^{-2x}) \\ &= e^{-2x} - 2xe^{-2x} \\ &= (1 - 2x)e^{-2x}. \end{aligned}$$

2. Pour tout réel x , $e^{-2x} > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc le signe de $1 - 2x$.

$$\begin{aligned} 1 - 2x \geq 0 &\iff -2x \geq -1 \\ &\iff x \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi $f'(x) \geq 0$ sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

3. La fonction f est donc croissante puis décroissante. Son tableau de variations est centré au rang $x = \frac{1}{2}$.
 4. La valeur maximale est atteinte en $x = \frac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2e}.$$

Donc :

le maximum de f est $\frac{1}{2e}$.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 4, page 6.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 5, page 7.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 4 **[+]** Consolidation Polynôme multiplié par une exponentielle **[BAC]** D'après Bac 2026

Source bac : D'après Centres étrangers, sujet 2, 11 juin 2026, exercice 4 (partie accessible sans limites).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}(x^2 - 3x + 2).$$

1. On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x) = (-x^2 + 5x - 5)e^{-x}.$$

2. Étudier le signe du trinôme :

$$-x^2 + 5x - 5.$$

3. En déduire le signe de $f'(x)$.

4. Dresser le tableau de variations de f .

**Corrigé rédigé**

1. On pose $u(x) = e^{-x}$ et $v(x) = x^2 - 3x + 2$. Alors $u'(x) = -e^{-x}$ et $v'(x) = 2x - 3$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x}(x^2 - 3x + 2) + e^{-x}(2x - 3) \\ &= e^{-x}(-x^2 + 3x - 2 + 2x - 3) \\ &= (-x^2 + 5x - 5)e^{-x}. \end{aligned}$$

2. On étudie le trinôme $-x^2 + 5x - 5$. Son discriminant est :

$$\Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-5) = 25 - 20 = 5.$$

Ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

En les ordonnant :

$$\alpha = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

Comme le coefficient dominant est négatif, le trinôme est positif entre ses racines et négatif à l'extérieur.

3. Comme $e^{-x} > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe du trinôme $-x^2 + 5x - 5$.

4. Ainsi f est décroissante sur $] -\infty ; \alpha]$, croissante sur $[\alpha ; \beta]$, puis décroissante sur $[\beta ; +\infty[$.

Exercice 5 **[*] Approfondissement** **Fonction quotient et variations sur un intervalle**

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 3]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

1. Justifier que f est bien définie sur $[0 ; 3]$.
2. On admet que f est dérivable sur $[0 ; 3]$. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 3]$:

$$f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 3]$.
4. Dresser le tableau de variations de f sur $[0 ; 3]$.
5. Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de f sur $[0 ; 3]$.

**Corrigé rédigé**

1. La fonction f , quotient de deux fonctions définies sur $[0 ; 3]$, est définie sur tout intervalle où son dénominateur ne s'annule pas. Or, pour tout $x \in [0 ; 3]$:

$$x+1 \geq 1 > 0.$$

Le dénominateur ne s'annule donc pas sur $[0 ; 3]$; ainsi f est bien définie sur cet intervalle.

2. Avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = x+1$, on obtient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} \\ &= \frac{xe^x}{(x+1)^2}. \end{aligned}$$

3. Sur $[0 ; 3]$, on a $x \geq 0$, $e^x > 0$ et $(x+1)^2 > 0$. Donc :

$$f'(x) \geq 0.$$

4. La fonction f est donc croissante sur $[0 ; 3]$.
5. Comme f est croissante sur $[0 ; 3]$, sa valeur minimale est :

$$f(0) = \frac{e^0}{1} = 1.$$

Sa valeur maximale est :

$$f(3) = \frac{e^3}{4}.$$

Donc :

$\min_{[0 ; 3]} f = 1$	et	$\max_{[0 ; 3]} f = \frac{e^3}{4}.$
------------------------	----	-------------------------------------

Thème III

Fonctions associées à des suites



Rappels : intervalle stable et récurrence

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Dire que l'intervalle I est stable par f signifie que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \in I.$$

Si une suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et si $u_0 \in I$, alors une récurrence permet souvent de montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I.$$

C'est une méthode très classique dans les exercices de bac sur les suites définies par récurrence.

Exercice 6 **[!] Bilan** Intervalle stable avec exponentielle

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e+2}.$$

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. On admet que f est dérivable sur $[0 ; 1]$. Montrer que f est croissante sur $[0 ; 1]$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 1]$:

$$0 \leq f(x) \leq 1.$$

3. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq 1.$$



Corrigé rédigé

1. Pour tout $x \in [0 ; 1]$:

$$f'(x) = \frac{e^x}{e+2}.$$

Comme $e^x > 0$ et $e+2 > 0$, on a $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

2. Comme f est croissante sur $[0 ; 1]$, pour tout $x \in [0 ; 1]$:

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1).$$

Or :

$$f(0) = \frac{1}{e+2} > 0 \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{e}{e+2} < 1.$$

Donc :

$$0 \leq f(x) \leq 1.$$

3. On démontre par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$. Notons, pour tout entier naturel n , la propriété :

$$P(n) : 0 \leq u_n \leq 1.$$

- Initialisation
 $u_0 = 0$, donc $0 \leq u_0 \leq 1$. Ainsi $P(0)$ est vraie.
- Hérédité
Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

**Remarque**

Ce que je sais :

- $0 \leq u_n \leq 1$;
- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- f est croissante sur $[0 ; 1]$ et $0 \leq f(0) \leq f(1) \leq 1$.

Ce que je veux démontrer :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1 \quad \text{à prouver}$$

Comme $u_n \in [0 ; 1]$ et que f est croissante sur $[0 ; 1]$:

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(1).$$

Or $0 \leq f(0)$ et $f(1) \leq 1$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1.$$

• Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 7, page 9.

*Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.***Parcours B – Approfondissement**

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 8, page 11.

*Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.***Exercice 7** **[+] Consolidation** **Monotonie d'une suite définie par une fonction croissante**

On reprend la fonction :

$$f(x) = \frac{e^x}{e+2}$$

et la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On admet le résultat de l'exercice précédent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

1. Calculer u_1 .
2. Montrer que $u_0 \leq u_1$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \leq u_{n+1}.$$

4. Que vient-on de démontrer sur la suite (u_n) ?

**Corrigé rédigé**

1. On a :

$$u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{1}{e+2}.$$

2. Comme $u_0 = 0$ et $\frac{1}{e+2} > 0$, on a :

$$u_0 \leq u_1.$$

3. On démontre par récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$. Notons, pour tout entier naturel n , la propriété :

$$P(n) : u_n \leq u_{n+1}.$$

- Initialisation

La question précédente montre que $u_0 \leq u_1$. Donc $P(0)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.



Remarque

Ce que je sais :

- $u_n \leq u_{n+1}$;
- f est croissante sur $[0 ; 1]$;
- $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

Ce que je veux démontrer :

$$u_{n+1} \leq u_{n+2} \quad \text{à prouver}$$

Comme f est croissante sur $[0 ; 1]$ et comme $u_n \leq u_{n+1}$, on obtient :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}).$$

Donc :

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

4. On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Thème IV

En route vers le Bac

Exercice 8 **[*] Approfondissement** **Fonction exponentielle quotient et suite récurrente**

Source bac : Exercice construit dans l'esprit des sujets récents : fonction, suite définie par récurrence, intervalle stable, récurrence et Python.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 3}.$$

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On admet que :

$$1 < e < 3 \quad \text{et donc} \quad 1 < e^2 < 9.$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $[0 ; 2]$.
2. On admet que f est dérivable sur $[0 ; 2]$. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$f'(x) = \frac{6e^x}{(e^x + 3)^2}.$$

3. En déduire que f est croissante sur $[0 ; 2]$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$0 \leq f(x) \leq \frac{3}{2}.$$

5. En déduire que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$0 \leq f(x) \leq 2.$$

6. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq 2.$$

7. Calculer u_1 et u_2 sous forme exacte.
8. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la liste des $N + 1$ premiers termes de la suite, de u_0 à u_N .

```

1  from math import exp
2
3  def liste_termes(N):
4      u = 0
5      L = [u]
6      for k in range(...):
7          u = ...
8          L.append(...)
9      return L

```

9. On obtient avec Python les valeurs arrondies au millième :

$$[0 ; 0,500 ; 0,709 ; 0,808 ; 0,856 ; 0,879].$$

Que peut-on conjecturer sur le sens de variation de la suite (u_n) ?


Corrigé rédigé

1. La fonction f , quotient de deux fonctions définies sur $[0 ; 2]$, est définie sur tout intervalle où son dénominateur

ne s'annule pas. Or, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$e^x > 0 \quad \Rightarrow \quad e^x + 3 > 3 > 0.$$

Le dénominateur ne s'annule donc pas sur $[0 ; 2]$; ainsi f est bien définie sur cet intervalle.

2. On dérive un quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2e^x(e^x + 3) - 2e^x \times e^x}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} + 6e^x - 2e^{2x}}{(e^x + 3)^2} \\ &= \frac{6e^x}{(e^x + 3)^2}. \end{aligned}$$

3. Pour tout $x \in [0 ; 2]$, $6e^x > 0$ et $(e^x + 3)^2 > 0$, donc $f'(x) > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $[0 ; 2]$.

4. Comme f est croissante sur $[0 ; 2]$:

$$f(0) \leq f(x) \leq f(2).$$

Or :

$$f(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

et, comme $e^2 < 9$:

$$\begin{aligned} f(2) = \frac{2e^2}{e^2 + 3} \leq \frac{3}{2} &\iff 4e^2 \leq 3e^2 + 9 \\ &\iff e^2 \leq 9. \end{aligned}$$

Donc :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{3}{2}.$$

5. Comme $\frac{3}{2} \leq 2$, on a bien :

$$0 \leq f(x) \leq 2.$$

6. On applique une récurrence. Notons $P(n) : 0 \leq u_n \leq 2$.

- Initialisation

$$u_0 = 0, \text{ donc } 0 \leq u_0 \leq 2.$$

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.



Remarque

Ce que je sais :

- $0 \leq u_n \leq 2$;
- $u_{n+1} = f(u_n)$.
- f est croissante sur $[0 ; 2]$ et $0 \leq f(0) \leq f(2) \leq 2$.

Ce que je veux démontrer :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2 \quad \text{à prouver}$$

Comme $u_n \in [0 ; 2]$ et que f est croissante sur $[0 ; 2]$:

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(2).$$

Or $0 \leq f(0)$ et $f(2) \leq 2$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 2.$$

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 2.}$$

7. On calcule :

$$u_1 = f(0) = \frac{1}{2}.$$

Puis :

$$u_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2e^{1/2}}{e^{1/2} + 3}.$$

8. La fonction complétée est :

```
from math import exp

def liste_termes(N):
    u = 0
    L = [u]
    for k in range(N):
        u = 2*exp(u)/(exp(u)+3)
        L.append(u)
    return L
```

9. Les valeurs semblent augmenter. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 9 Modèle discret avec fonction exponentielle

Dans un modèle simplifié, on note u_n la quantité, en milligrammes, d'un médicament présente dans le sang après la n -ième injection.

On admet que :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0,7u_n + 0,75 + 0,05e^{-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

On considère la fonction g définie sur $[1 ; 4]$ par :

$$g(x) = 0,7x + 0,75 + 0,05e^{-x}.$$

- Donner la valeur exacte de u_1 , puis une valeur approchée de u_1 et de u_2 au millième.
- On admet que g est dérivable sur $[1 ; 4]$. Montrer que g est strictement croissante sur $[1 ; 4]$.
- Montrer que :

$$u_0 \leq u_1 \leq 4.$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

- Que vient-on de démontrer sur la suite (u_n) ?
- Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie le premier entier n tel que $u_n > 2,4$.

```

1 from math import exp
2
3 def seuil():
4     n = 0
5     u = 1
6     while ...:
7         n = ...
8         u = ...
9     return n

```



Corrigé rédigé

- On calcule :

$$u_1 = 0,7 \times 1 + 0,75 + 0,05e^{-1} = 1,45 + \frac{0,05}{e}.$$

Ainsi :

$$u_1 \approx 1,468 \quad \text{et} \quad u_2 \approx 1,789.$$

- Pour tout $x \in [1 ; 4]$:

$$g'(x) = 0,7 - 0,05e^{-x}.$$

Or $x \geq 1$, donc $0 < e^{-x} \leq e^{-1} < 1$. Ainsi :

$$g'(x) > 0,7 - 0,05 = 0,65 > 0.$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $[1 ; 4]$.

- Comme $e^{-1} > 0$, on a $u_1 > 1,45 > 1 = u_0$. De plus, comme $e^{-1} < 1$:

$$u_1 < 1,45 + 0,05 = 1,5 < 4.$$

Donc :

$$u_0 \leq u_1 \leq 4.$$

- On démontre par récurrence que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$. Notons $P(n) : 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.

- Initialisation

La question précédente montre que $P(0)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.

**Remarque**

Ce que je sais :

- $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$;
- $u_{n+1} = g(u_n)$ et $u_{n+2} = g(u_{n+1})$;
- g est croissante sur $[1 ; 4]$.

Ce que je veux démontrer :

$$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4 \quad \text{à prouver}$$

Comme u_n et u_{n+1} appartiennent à $[1 ; 4]$, et comme g est croissante sur cet intervalle, l'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$ entraîne :

$$g(u_n) \leq g(u_{n+1}).$$

Donc :

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

De plus, $u_{n+1} \geq u_n \geq 1$. Enfin, comme $u_{n+1} \leq 4$ et que g est croissante sur $[1 ; 4]$:

$$u_{n+2} = g(u_{n+1}) \leq g(4) = 3,55 + 0,05e^{-4} < 3,60 < 4.$$

Donc $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 4$.

- Conclusion

Par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4.$$

5. On a montré que la suite (u_n) est croissante et majorée par 4.

6. La fonction complétée est :

```
from math import exp
```

```
def seuil():
    n = 0
    u = 1
    while u <= 2.4:
        n = n + 1
        u = 0.7*u + 0.75 + 0.05*exp(-u)
    return n
```

Exercice 10 Bilan : exponentielle, variations, suite et Python

On considère la fonction f définie sur $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = (2 - x)e^x.$$

On définit d'abord la suite (u_n) par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. On admet que f est dérivable sur $[0 ; 2]$. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$f'(x) = (1 - x)e^x.$$

2. Étudier les variations de f sur $[0 ; 2]$.

3. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$0 \leq f(x) \leq e.$$

Cette question permet-elle de montrer que $[0 ; 2]$ est stable par la fonction f ? Justifier.

4. On modifie la suite et on pose désormais :

$$v_0 = 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{f(v_n)}{e}.$$

Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$0 \leq \frac{f(x)}{e} \leq 1.$$

5. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq v_n \leq 1.$$

6. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la liste des $N + 1$ premiers termes de la suite (v_n) .

```

1 from math import exp
2
3 def liste_v(N):
4     v = 0
5     L = [v]
6     for k in range(...):
7         v = ...
8         L.append(...)
9     return L

```

**Corrigé rédigé**

1. On dérive un produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \times e^x + (2 - x)e^x \\ &= (1 - x)e^x. \end{aligned}$$

2. Comme $e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$. Ainsi f est croissante sur $[0 ; 1]$ puis décroissante sur $[1 ; 2]$.
On calcule :

$$f(0) = 2, \quad f(1) = e, \quad f(2) = 0.$$

3. D'après les variations, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$0 \leq f(x) \leq e.$$

Cette majoration ne suffit pas à montrer que $f(x) \leq 2$, car $e \approx 2,7 > 2$. On ne peut donc pas conclure que $[0 ; 2]$ est stable par f .

4. D'après $0 \leq f(x) \leq e$:

$$0 \leq \frac{f(x)}{e} \leq 1.$$

5. On démontre par récurrence que $0 \leq v_n \leq 1$.

- Initialisation

$v_0 = 0$, donc $0 \leq v_0 \leq 1$.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.



Remarque

Ce que je sais :

- $0 \leq v_n \leq 1$;
- $v_{n+1} = \frac{f(v_n)}{e}$;
- pour tout $x \in [0 ; 2]$, $0 \leq \frac{f(x)}{e} \leq 1$.

Ce que je veux démontrer :

$$\boxed{0 \leq v_{n+1} \leq 1} \quad \text{à prouver}$$

Comme $v_n \in [0 ; 1] \subset [0 ; 2]$, la question précédente donne :

$$0 \leq \frac{f(v_n)}{e} \leq 1.$$

Donc $0 \leq v_{n+1} \leq 1$.

- Conclusion

Par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n \leq 1.}$$

6. La fonction complétée est :

```
from math import exp

def liste_v(N):
    v = 0
    L = [v]
    for k in range(N):
        v = ((2-v)*exp(v))/exp(1)
        L.append(v)
    return L
```

Exercice 11 [BAC] D'après Bac 2026 Récurrence avec un terme exponentiel

Source bac : D'après Métropole, sujet 1, 16 juin 2026, exercice 3 (questions accessibles sans limites).

Lors d'une phase de refroidissement, la température d'une pièce est modélisée par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}.$$

Le terme u_n représente une température, exprimée en degrés Celsius, après n dizaines de minutes.

1. Montrer que $u_1 = 19,72$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n > 10.$$

**Corrigé rédigé**

1. On utilise la relation de récurrence avec $n = 0$:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,965u_0 + 0,35 + 0,07e^{-0,1 \times 0} \\ &= 0,965 \times 20 + 0,35 + 0,07 \\ &= 19,3 + 0,42 \\ &= 19,72. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$u_1 = 19,72.$$

2. Pour tout entier naturel n , notons :

$$P(n) : u_n > 10.$$

- Initialisation

On a $u_0 = 20 > 10$. La propriété $P(0)$ est donc vraie.

- Hérédité

Soit n un entier naturel. Supposons que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_n > 10$, et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

**Remarque**

Ce que je sais :

- $u_n > 10$;
- $u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n}$;
- $0,965 > 0$ et $e^{-0,1n} > 0$.

Ce que je veux démontrer :

$$u_{n+1} > 10 \quad \text{à prouver}$$

Comme $0,965 > 0$, l'hypothèse de récurrence donne :

$$0,965u_n > 0,965 \times 10 = 9,65.$$

De plus, $e^{-0,1n} > 0$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 0,965u_n + 0,35 + 0,07e^{-0,1n} \\ &> 9,65 + 0,35 \\ &> 10. \end{aligned}$$

La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

- Conclusion

La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 10.$$

Thème V

Now We Can Talk : en route vers le supérieur

Exercice 12 Une fonction quotient plus subtile



On considère la fonction f définie sur $[0 ; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 - x + 1}.$$

On admet que :

$$2 < e < 3.$$

- Justifier que f est bien définie sur $[0 ; 2]$.
- On admet que f est dérivable sur $[0 ; 2]$. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 2]$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x-2)e^x}{(x^2 - x + 1)^2}.$$

- Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0 ; 2]$.
- En déduire les variations de f sur $[0 ; 2]$.
- Déterminer la valeur exacte du maximum de f sur $[0 ; 2]$.
- En utilisant $2 < e < 3$, montrer que la valeur minimale de f sur $[0 ; 2]$ est 1.



Corrigé rédigé

- La fonction f , quotient de deux fonctions définies sur $[0 ; 2]$, est définie sur tout intervalle où son dénominateur ne s'annule pas. Or, pour tout réel x :

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Le dénominateur ne s'annule donc pas sur $[0 ; 2]$; ainsi f est bien définie sur cet intervalle.

- On pose :

$$u(x) = e^x \quad \text{et} \quad v(x) = x^2 - x + 1.$$

Alors :

$$u'(x) = e^x \quad \text{et} \quad v'(x) = 2x - 1.$$

On dérive un quotient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(x^2 - x + 1) - e^x(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(x^2 - x + 1 - 2x + 1)}{(x^2 - x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(x^2 - 3x + 2)}{(x^2 - x + 1)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)e^x}{(x^2 - x + 1)^2}. \end{aligned}$$

- Pour tout $x \in [0 ; 2]$, on a $e^x > 0$ et $(x^2 - x + 1)^2 > 0$. Le signe de $f'(x)$ est donc le signe de $(x-1)(x-2)$. Sur $[0 ; 2]$, on obtient donc le tableau de signe suivant :

x	0	1	2
$(x-1)(x-2)$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-

Ainsi, $f'(x) \geq 0$ sur $[0 ; 1]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[1 ; 2]$.

4. On en déduit que la fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$, puis décroissante sur $[1 ; 2]$.

De plus :

$$f(0) = 1, \quad f(1) = e, \quad f(2) = \frac{e^2}{3}.$$

On peut donc résumer les variations dans le tableau suivant :

x	0	1	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	e	$\frac{e^2}{3}$

5. Le maximum est atteint en $x = 1$:

$$f(1) = \frac{e}{1 - 1 + 1} = e.$$

Donc :

$$\boxed{\max_{[0 ; 2]} f = e.}$$

6. On calcule les valeurs aux extrémités :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(2) = \frac{e^2}{3}.$$

Comme $e > 2$, on a $e^2 > 4$, donc :

$$\frac{e^2}{3} > 1.$$

La valeur minimale est donc atteinte en $x = 0$:

$$\boxed{\min_{[0 ; 2]} f = 1.}$$

Exercice 13 Une récurrence plus difficile avec exponentielle



On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{2e^{u_n}}{e^{u_n} + 3}.$$

On admet que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq 2.$$

1. On note f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{2e^x}{e^x + 3}.$$

On admet que f est dérivable sur $[0 ; 1]$. Montrer que f est croissante sur $[0 ; 1]$.

2. Montrer que, pour tout $x \in [0 ; 1]$:

$$0 \leq f(x) \leq 1.$$

3. Calculer u_1 et vérifier que :

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1.$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

5. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie le premier entier n tel que $u_n > 0,9$.

```

1 from math import exp
2
3 def seuil():
4     n = 0
5     u = 0
6     while ...:
7         n = ...
8         u = ...
9     return n

```



Corrigé rédigé

1. Pour tout $x \in [0 ; 1]$, on dérive :

$$f'(x) = \frac{6e^x}{(e^x + 3)^2}.$$

Comme $e^x > 0$ et $(e^x + 3)^2 > 0$, on a $f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

2. Pour tout $x \in [0 ; 1]$, comme f est croissante :

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1).$$

Or :

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{2e}{e+3}.$$

Comme $e < 3$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{2e}{e+3} \leq 1 &\iff 2e \leq e+3 \\ &\iff e \leq 3, \end{aligned}$$

ce qui est vrai. Donc :

$$0 \leq f(x) \leq 1.$$

3. On calcule :

$$u_1 = \frac{2e^0}{e^0 + 3} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1.$$

4. On démontre par récurrence que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

- Initialisation

La question précédente montre que $P(0)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.



Remarque

Ce que je sais :

- $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$;
- f est croissante sur $[0 ; 1]$;
- $f([0 ; 1]) \subset [0 ; 1]$.

Ce que je veux démontrer :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1 \quad \text{à prouver}$$

Comme $u_n \leq u_{n+1}$ et comme f est croissante sur $[0 ; 1]$, on obtient :

$$f(u_n) \leq f(u_{n+1}).$$

Donc :

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

De plus, comme $u_{n+1} \in [0 ; 1]$ et $f([0 ; 1]) \subset [0 ; 1]$, on a :

$$0 \leq u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq 1.$$

On obtient finalement :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion

Par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.}$$

5. La fonction complétée est :

```
from math import exp

def seuil():
    n = 0
    u = 0
    while u <= 0.9:
        n = n + 1
        u = 2*exp(u)/(exp(u)+3)
    return n
```

↩ Fin du TD ↪