

TD 1

Démonstration par récurrence

Version élève

Sommaire

I	Comprendre le principe de récurrence	2
II	Rédiger une récurrence complète sur les suites	3
III	Sommes classiques et démonstrations	4
IV	Dérivées successives et récurrence	4
V	Tableur et conjecture	4
VI	Questions de bac : récurrence et suites	5
VII	Questions de bac accessibles dès le chapitre 1	6
VIII	Now We Can Talk : en route vers le supérieur	7

Organisation du recueil

Ce recueil accompagne le chapitre sur la démonstration par récurrence. Les exercices sont classés par compétences.

Thème I

Comprendre le principe de récurrence

Exercice 1 [!] Bilan Une inégalité simple

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$2^n \geq n.$$



Aide

Pour l'hérédité, on pourra utiliser que si $p \geq 1$, alors $2p \geq p + 1$.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 2, page 2.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 3, page 2.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 2 [+] Consolidation Compléter une rédaction type

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 1}.$$

On souhaite démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n > 1.$$

1. Écrire clairement la propriété $P(n)$.
2. Rédiger l'initialisation.
3. Rédiger l'hérédité en commençant par :

Soit n un entier naturel fixé. Supposons que $P(n)$ soit vraie.

4. Conclure.

Exercice 3 [*] Approfondissement Récurrence ou preuve directe ?

On souhaite montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^n k^2 \leq n^3.$$

1. Démontrer cette inégalité par récurrence.
2. Donner ensuite une preuve directe, sans récurrence.
3. Comparer les deux méthodes : laquelle est la plus efficace ici ?

Thème II

Rédiger une récurrence complète sur les suites

Exercice 4 Suite définie par une fonction

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) - \sqrt{2} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}.$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq \sqrt{2}$.
 3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 5 [!] Bilan Terme général d'une suite récurrente

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 3 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + 2n + 2.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$v_n = n(n+1) + 3.$$

2. Retrouver ce résultat sans récurrence, en sommant les accroissements $v_{k+1} - v_k$.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 6, page 3.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 7, page 3.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 6 [+] Consolidation Conjecture puis preuve

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 .
 2. La suite semble-t-elle arithmétique ? géométrique ?
 3. Emettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n .
 4. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Exercice 7 [*] Approfondissement Conjecturer un encadrement puis démontrer

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 6 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

1. Calculer les trois premiers termes et conjecturer un encadrement de u_n .
 2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n \leq 6$.
 3. Étudier la monotonie de (u_n) .

Thème III

Sommes classiques et démonstrations

Exercice 8 Sommes classiques : les indispensables

Ces résultats sont à connaître.

1. Démontrer, par la méthode de votre choix, que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Thème IV

Dérivées successives et récurrence

Exercice 9 Dérivées successives et récurrence

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x.$$

Pour tout entier naturel n , on note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f , avec la convention $f^{(0)} = f$.

- Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
- Conjecturer une expression de $f^{(n)}(x)$.
- Démontrer cette conjecture par récurrence.

Thème V

Tableur et conjecture

Exercice 10 Tableur, factorielle et récurrence

On souhaite déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles :

$$2^n \leq n! \leq n^n.$$

On utilise le tableau suivant.

n	2^n	$n!$	n^n	Test
1	2	1	1	Faux
2	4	2	4	Faux
3	8	6	27	Faux
4	16	24	256	Vrai
5	32	120	3125	Vrai

- Quelles formules peuvent être entrées dans les cellules de la ligne $n = 2$ pour calculer 2^n et n^n , puis glissées vers le bas ?
- Quelle formule peut être entrée pour calculer les factorielles sans utiliser la fonction FACT du tableur ?
- Conjecturer à partir de quel entier n on semble avoir $2^n \leq n! \leq n^n$.
- Démontrer cette conjecture.

Thème VI

Questions de bac : récurrence et suites

Exercice 11 [BAC] D'après Bac 2025 Encadrement d'une suite

Source bac : D'après Bac 2025 Métropole J1. Annales Math93 2025.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

1. Montrer que, pour tout réel $x \in [0 ; 1]$, on a :

$$0 \leq \frac{3x + 2}{x + 4} \leq 1.$$

2. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq 1.$$

Exercice 12 [BAC] D'après Bac 2025 Suite auxiliaire

Source bac : D'après Bac 2025 Amérique du Nord J2B, exercice 4. Annales Math93 2025.

On considère une suite (u_n) telle que :

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

On pose :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

On admet que $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = n \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Thème VII

Questions de bac accessibles dès le chapitre 1

Exercice 13 [BAC] D'après Bac 2026 Fonction, variations et récurrence

Source bac : D'après Bac 2026 Asie-Pacifique J2, exercice 1.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left] -\infty ; \frac{3}{2} \right[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}.$$

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle

$$\left] -\infty ; \frac{3}{2} \right[.$$

2. En déduire que pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a :

$$f(x) \in [0 ; 1].$$

3. En utilisant la fonction f , démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

4. Calculer les premiers termes, conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis démontrer cette conjecture par récurrence.

Thème VIII

Now We Can Talk : en route vers le supérieur

Exercice 14 Récurrence forte



On définit une suite (F_n) par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Démontrer par récurrence forte que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$F_n \leq 2^{n-1}.$$

Exercice 15 Une récurrence plus fine



Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 5$:

$$2^n \geq n^2.$$

Puis discuter pourquoi l'initialisation ne peut pas être faite au rang 1 pour cette propriété.

Exercice 16 Nombre de diagonales d'un polygone convexe



Pour un polygone convexe, c'est-à-dire un polygone dont tous les angles sont inférieurs à 180 degrés, on souhaite compter le nombre de diagonales, c'est-à-dire le nombre de segments joignant deux sommets non consécutifs de ce polygone.

- Déterminer le nombre de diagonales d'un triangle, d'un quadrilatère et d'un pentagone convexe.
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère la proposition $\mathcal{P}_n$ suivante :

$$\text{« Un polygone convexe à } n \text{ côtés possède } \frac{n(n-3)}{2} \text{ diagonales. »}$$

Que peut-on vérifier d'après la question 1 ?

- On suppose qu'il existe un entier naturel $k \geq 3$ pour lequel $\mathcal{P}_k$ est vraie. On considère P un polygone convexe à $k+1$ sommets et on note A l'un de ses sommets.
 - Combien de diagonales comporte le polygone P' composé des $k+1$ sommets sauf A ? Donc P' possède k sommets.
 - Combien y a-t-il de diagonales de P partant du point A ?
 - En remarquant qu'un des côtés de P' est une diagonale de P , montrer que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie et conclure.

↔ Fin du TD ↔