MATH93

**Terminale Spécialité Mathématiques**
Recueil d'exercices – Entraînement – Méthodes

**TD – EXERCICES**

TD 1

# Démonstration par récurrence

Version élève

## Sommaire du TD


I Comprendre le principe de récurrence 2

II Rédiger une récurrence complète sur les suites 3

III Sommes classiques et démonstrations 4

IV Dérivées successives et récurrence 4

V Tableur et conjecture 4

VI Questions de bac : récurrence et suites 5

VII Questions de bac accessibles dès le chapitre 1 6

VIII Now We Can Talk : en route vers le supérieur 7


**Organisation du recueil**

Ce recueil accompagne le chapitre sur la démonstration par récurrence. Les exercices sont classés par compétences.

# Thème I Comprendre le principe de récurrence

## Exercice 1 [!] Bilan Une inégalité simple

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ :

$$2^n \geqslant n.$$

**Aide**

Pour l'hérédité, on pourra utiliser que si $p \geqslant 1$, alors $2p \geqslant p+1$.

**Parcours A – Consolider**

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 2, page 2.
*Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.*

**Parcours B – Approfondissement**

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 3, page 2.
*Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.*

## Exercice 2 [+] Consolidation Compléter une rédaction type

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 1}.$$

On souhaite démontrer que, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n > 1.$$

1. Écrire clairement la propriété $P(n)$.
2. Rédiger l'initialisation.
3. Rédiger l'hérédité en commençant par :

   Soit $n$ un entier naturel fixé. Supposons que $P(n)$ soit vraie.

4. Conclure.

## Exercice 3 [*] Approfondissement Récurrence ou preuve directe ?

On souhaite montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$ :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3.$$

1. Démontrer cette inégalité par récurrence.
2. Donner ensuite une preuve directe, sans récurrence.
3. Comparer les deux méthodes : laquelle est la plus efficace ici ?

# Thème II Rédiger une récurrence complète sur les suites

## Exercice 4 Suite définie par une fonction

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$ :
$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - \sqrt{2} = \frac{(x-\sqrt{2})^2}{2x}.$$
2. En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)$ est décroissante.

## Exercice 5 [!] Bilan Terme général d'une suite récurrente

Soit $(v_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$v_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = v_n + 2n + 2.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ :
$$v_n = n(n+1) + 3.$$
2. Retrouver ce résultat sans récurrence, en sommant les accroissements $v_{k+1} - v_k$.

**Parcours A – Consolider**

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 6, page 3.
*Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.*

**Parcours B – Approfondissement**

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 7, page 3.
*Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.*

## Exercice 6 [+] Consolidation Conjecture puis preuve

Soit $(u_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

1. Calculer $u_0$, $u_1$, $u_2$, $u_3$ et $u_4$.
2. La suite semble-t-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Emettre une conjecture sur l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.
4. Démontrer cette conjecture par récurrence.

## Exercice 7 [*] Approfondissement Conjecturer un encadrement puis démontrer

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 6 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

1. Calculer les trois premiers termes et conjecturer un encadrement de $u_n$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $2 \leqslant u_n \leqslant 6$.
3. Étudier la monotonie de $(u_n)$.

# Thème III Sommes classiques et démonstrations

## Exercice 8 Sommes classiques : les indispensables

Ces résultats sont à connaître.

1. Démontrer, par la méthode de votre choix, que pour tout entier $n \geqslant 1$ :
$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$ :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$ :
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

# Thème IV Dérivées successives et récurrence

## Exercice 9 Dérivées successives et récurrence

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = xe^x.$$
Pour tout entier naturel $n$, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n$-ième de $f$, avec la convention $f^{(0)} = f$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Conjecturer une expression de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

# Thème V Tableur et conjecture

## Exercice 10 Tableur, factorielle et récurrence

On souhaite déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles :
$$2^n \leqslant n! \leqslant n^n.$$

On utilise le tableau suivant.

| $n$ | $2^n$ | $n!$ | $n^n$ | Test |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | Faux |
| 2 | 4 | 2 | 4 | Faux |
| 3 | 8 | 6 | 27 | Faux |
| 4 | 16 | 24 | 256 | Vrai |
| 5 | 32 | 120 | 3125 | Vrai |

1. Quelles formules peuvent être entrées dans les cellules de la ligne $n = 2$ pour calculer $2^n$ et $n^n$, puis glissées vers le bas ?
2. Quelle formule peut être entrée pour calculer les factorielles sans utiliser la fonction FACT du tableur ?
3. Conjecturer à partir de quel entier $n$ on semble avoir $2^n \leqslant n! \leqslant n^n$.
4. Démontrer cette conjecture.

Thème VI

# Questions de bac : récurrence et suites

## Exercice 11 [BAC] D'après Bac 2025 Encadrement d'une suite

Source bac : D'après Bac 2025 Métropole J1. Annales Math93 2025.

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

1. Montrer que, pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{3x+2}{x+4} \leqslant 1.$$

2. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ :

$$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

## Exercice 12 [BAC] D'après Bac 2025 Suite auxiliaire

Source bac : D'après Bac 2025 Amérique du Nord J2B, exercice 4. Annales Math93 2025.

On considère une suite $(u_n)$ telle que :

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

On pose :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

On admet que $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que $(w_n)$ est géométrique et exprimer $w_n$ en fonction de $n$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ :

$$u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

**Thème VII**

# Questions de bac accessibles dès le chapitre 1

## Exercice 13 [BAC] D'après Bac 2026 Fonction, variations et récurrence

Source bac : D'après Bac 2026 Asie-Pacifique J2, exercice 1.

On considère la fonction $f$ définie sur l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}.$$

On définit la suite $(u_n)$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle
$$\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right[.$$

2. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, on a :
$$f(x) \in [0\ ;\ 1].$$

3. En utilisant la fonction $f$, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$ :
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

4. Calculer les premiers termes, conjecturer une expression de $u_n$ en fonction de $n$, puis démontrer cette conjecture par récurrence.

# Thème VIII Now We Can Talk : en route vers le supérieur

## Exercice 14 Récurrence forte ★★

On définit une suite $(F_n)$ par :

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Démontrer par récurrence forte que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ :

$$F_n \leqslant 2^{n-1}.$$

## Exercice 15 Une récurrence plus fine ★★★

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 5$ :

$$2^n \geqslant n^2.$$

Puis discuter pourquoi l'initialisation ne peut pas être faite au rang 1 pour cette propriété.

## Exercice 16 Nombre de diagonales d'un polygone convexe ★

Pour un polygone convexe, c'est-à-dire un polygone dont tous les angles sont inférieurs à 180 degrés, on souhaite compter le nombre de diagonales, c'est-à-dire le nombre de segments joignant deux sommets non consécutifs de ce polygone.

1. Déterminer le nombre de diagonales d'un triangle, d'un quadrilatère et d'un pentagone convexe.
2. Soit $n$ un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère la proposition $\mathcal{P}_n$ suivante :

$$\text{« Un polygone convexe à } n \text{ côtés possède } \frac{n(n-3)}{2} \text{ diagonales. »}$$

Que peut-on vérifier d'après la question 1 ?

3. On suppose qu'il existe un entier naturel $k \geqslant 3$ pour lequel $\mathcal{P}_k$ est vraie. On considère $P$ un polygone convexe à $k+1$ sommets et on note $A$ l'un de ses sommets.

3. a. Combien de diagonales comporte le polygone $P'$ composé des $k+1$ sommets sauf $A$ ? Donc $P'$ possède $k$ sommets.

3. b. Combien y a-t-il de diagonales de $P$ partant du point $A$ ?

3. c. En remarquant qu'un des côtés de $P'$ est une diagonale de $P$, montrer que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie et conclure.

↩ Fin du TD ↪