

TD 1

Démonstration par récurrence

Version corrigée

Sommaire

I	Comprendre le principe de récurrence	2
II	Rédiger une récurrence complète sur les suites	6
III	Sommes classiques et démonstrations	9
IV	Dérivées successives et récurrence	11
V	Tableur et conjecture	12
VI	Questions de bac : récurrence et suites	13
VII	Questions de bac accessibles dès le chapitre 1	16
VIII	Now We Can Talk : en route vers le supérieur	19

Organisation du recueil

Ce recueil accompagne le chapitre sur la démonstration par récurrence. Les exercices sont classés par compétences.

Thème I

Comprendre le principe de récurrence

Exercice 1 [!] Bilan Une inégalité simple

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$2^n \geq n.$$



Aide

Pour l'hérédité, on pourra utiliser que si $p \geq 1$, alors $2p \geq p + 1$.



Corrigé rédigé

1. Démonstration par récurrence. Notons, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la propriété

$$P(n) : 2^n \geq n.$$

- Initialisation

Pour $n = 1$, on a :

$$2^1 = 2 \geq 1.$$

La propriété $P(1)$ est donc vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est vraie au rang $n + 1$.



Remarque

On admet que :

- $2^n \geq n$;
- $n \geq 1$.

Et on cherche à montrer que :

$$\boxed{2^{n+1} \geq n + 1} \quad \text{à prouver}$$

On applique l'hypothèse de récurrence :

$$2^n \geq n.$$

Comme $2 > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2^n \geq n &\implies 2 \times 2^n \geq 2n \\ &\implies 2^{n+1} \geq 2n. \end{aligned}$$

Or $n \geq 1$, donc $2n \geq n + 1$. Ainsi :

$$2^{n+1} \geq 2n \geq n + 1.$$

On a donc montré $2^{n+1} \geq n + 1$. La propriété est héréditaire.

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 1 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 2^n \geq n.}$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 2, page 3.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 3, page 3.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 2 **[+] Consolidation** Compléter une rédaction type

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 1}.$$

On souhaite démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n > 1.$$

1. Écrire clairement la propriété $P(n)$.
2. Rédiger l'initialisation.
3. Rédiger l'hérédité en commençant par :

Soit n un entier naturel fixé. Supposons que $P(n)$ soit vraie.

4. Conclure.

**Corrigé rédigé**

1. La propriété est :

$$P(n) : u_n > 1.$$

2. Rédaction complète. Notons, pour tout entier naturel $n \geq 0$, la propriété

$$P(n) : u_n > 1.$$

- Initialisation

Pour $n = 0$, $u_0 = 2 > 1$. Donc $P(0)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est vraie au rang $n + 1$.

**Remarque**

On admet que :

- $u_n > 1$;
- $u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 1}$.

Et on cherche à montrer que :

$$u_{n+1} > 1 \quad \text{à prouver}$$

On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{u_n + 6}{u_n + 1} - 1 \\ &= \frac{5}{u_n + 1}. \end{aligned}$$

Or $u_n > 1$, donc $u_n + 1 > 0$. Ainsi $u_{n+1} - 1 > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$.

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1.$$

Exercice 3 **[*] Approfondissement** Récurrence ou preuve directe ?

On souhaite montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^n k^2 \leq n^3.$$

1. Démontrer cette inégalité par récurrence.

- Donner ensuite une preuve directe, sans récurrence.
- Comparer les deux méthodes : laquelle est la plus efficace ici ?



Corrigé rédigé

- Preuve par récurrence. Notons, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la propriété :

$$P(n) : \sum_{k=1}^n k^2 \leq n^3.$$

- Initialisation

Pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 \quad \text{et} \quad 1^3 = 1.$$

Donc $P(1)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour $n \geq 1$ fixé, $P(n)$ soit vraie.



Remarque

On admet que :

- $\sum_{k=1}^n k^2 \leq n^3$;
- $n \geq 1$.

Et on cherche à montrer que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \leq (n+1)^3} \quad \text{à prouver}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &\leq n^3 + (n+1)^2. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n^3 + (n+1)^2) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - n^2 - 2n - 1 \\ &= 2n^2 + n \\ &= n(2n+1) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $n^3 + (n+1)^2 \leq (n+1)^3$, puis $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \leq (n+1)^3$. L'hérédité est prouvée.

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 1 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{\forall n \geq 1, \sum_{k=1}^n k^2 \leq n^3.}$$

- Preuve directe. Pour tout $k \in [1; n]$, on a $k \leq n$, donc $k^2 \leq n^2$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n k^2 \leq \sum_{k=1}^n n^2.$$

Or dans la somme de droite, la variable k varie de 1 à n mais n'intervient pas dans l'expression sommée, donc cela revient à ajouter n fois le terme n^2 :

$$\sum_{k=1}^n n^2 = n^2 + n^2 + \cdots + n^2 = n \times n^2 = n^3.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n k^2 \leq n^3.$$

3. La preuve directe est ici la plus efficace : elle exploite seulement la majoration terme à terme $k^2 \leq n^2$.

Thème II

Rédiger une récurrence complète sur les suites

Exercice 4 Suite définie par une fonction

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right).$$

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) - \sqrt{2} = \frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}.$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq \sqrt{2}$.
 3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.



Corrigé rédigé

1. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right) - \sqrt{2} &= \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \sqrt{2} \\ &= \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x}{2x} \\ &= \boxed{\frac{(x - \sqrt{2})^2}{2x}}. \end{aligned}$$

2. On démontre par récurrence que $u_n \geq \sqrt{2}$.

- Initialisation
 $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$.
- Hérédité
Supposons que pour n fixé, $u_n \geq \sqrt{2}$.



Remarque

On admet que :

- $u_n \geq \sqrt{2}$;
- $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

Et on cherche à montrer que :

$$\boxed{u_{n+1} \geq \sqrt{2}} \quad \text{à prouver}$$

Comme $u_n \geq \sqrt{2} > 0$, on applique la question 1 avec $x = u_n$:

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0.$$

Donc $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$.

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq \sqrt{2}.}$$

3. Pour tout n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right) - u_n \\ &= \frac{2 - u_n^2}{2u_n}. \end{aligned}$$

Comme $u_n \geq \sqrt{2}$, on a $2 - u_n^2 \leq 0$ et $2u_n > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

(u_n) est décroissante.

Exercice 5 [!] Bilan Terme général d'une suite récurrente

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 3 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n + 2n + 2.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$v_n = n(n+1) + 3.$$

2. Retrouver ce résultat sans récurrence, en sommant les accroissements $v_{k+1} - v_k$.



Corrigé rédigé

1. Notons $P(n) : v_n = n(n+1) + 3$.

- Initialisation
Pour $n = 0$, $v_0 = 3$ et $0(0+1) + 3 = 3$.
- Hérédité
Supposons que pour n fixé, $v_n = n(n+1) + 3$.



Remarque

On admet que :

- $v_n = n(n+1) + 3$;
- $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$.

Et on cherche à montrer que :

$v_{n+1} = (n+1)(n+2) + 3$

à prouver

Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + 2n + 2 \\ &= n(n+1) + 3 + 2n + 2 \\ &= n^2 + 3n + 5 \\ &= (n+1)(n+2) + 3. \end{aligned}$$

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = n(n+1) + 3.$

2. Sans récurrence :

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) \\ &= 3 + \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 2) \\ &= 3 + 2 \sum_{j=1}^n j \\ &= 3 + n(n+1). \end{aligned}$$

$v_n = n(n+1) + 3.$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 6, page 8.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 7, page 8.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 6 **[+] Consolidation** Conjecture puis preuve

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 .
2. La suite semble-t-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Emettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n .
4. Démontrer cette conjecture par récurrence.

**Corrigé rédigé**

1. On obtient :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 7, \quad u_4 = 15.$$

2. Les différences et les quotients ne sont pas constants : la suite ne semble ni arithmétique, ni géométrique.
3. On conjecture :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1.$$

4. On démontre la conjecture par récurrence.

- Initialisation

$$u_0 = 0 = 2^0 - 1.$$

- Hérédité

Supposons que pour n fixé, $u_n = 2^n - 1$.

**Remarque**

On admet que :

- $u_n = 2^n - 1$;
- $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Et on cherche à montrer que :

$$u_{n+1} = 2^{n+1} - 1 \quad \text{à prouver}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + 1 \\ &= 2(2^n - 1) + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1.$$

Exercice 7 **[*] Approfondissement** Conjecturer un encadrement puis démontrer

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 6 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

1. Calculer les trois premiers termes et conjecturer un encadrement de u_n .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n \leq 6$.
3. Étudier la monotonie de (u_n) .

**Corrigé rédigé**

1. On calcule :

$$u_0 = 6, \quad u_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad u_2 = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}.$$

On conjecture $2 \leq u_n \leq 6$.

2. Notons $P(n) : 2 \leq u_n \leq 6$.

- Initialisation
 $u_0 = 6$, donc $2 \leq u_0 \leq 6$.
- Hérédité
Supposons que $2 \leq u_n \leq 6$.

**Remarque**

On admet que :

- $2 \leq u_n \leq 6$;
- $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

Et on cherche à montrer que :

$$2 \leq u_{n+1} \leq 6 \quad \text{à prouver}$$

Alors $4 \leq u_n + 2 \leq 8$. Par croissance de la racine carrée :

$$2 \leq \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{8}.$$

Comme $\sqrt{8} \leq 6$, on a $2 \leq u_{n+1} \leq 6$.

- Conclusion
On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq u_n \leq 6.$$

3. Pour $x \in [2 ; 6]$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} \leq x &\iff x+2 \leq x^2 \\ &\iff (x-2)(x+1) \geq 0. \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie sur $[2 ; 6]$. Donc $u_{n+1} \leq u_n$.

$$(u_n) \text{ est décroissante.}$$

Thème III**Sommes classiques et démonstrations****Exercice 8 Sommes classiques : les indispensables**

Ces résultats sont à connaître.

1. Démontrer, par la méthode de votre choix, que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$



Corrigé rédigé

1. Par la méthode de Gauss, si $S_n = 1 + 2 + \dots + n$, alors :

$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) = n(n+1).$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}}.$$

2. Posons $C_n = \sum_{k=1}^n k^2$ et montrons par récurrence que :

$$C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Initialisation

Pour $n = 1$, $C_1 = 1$ et $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.

- Hérédité

Supposons la formule vraie au rang $n \geq 1$.



Remarque

On admet que :

- $C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $C_{n+1} = C_n + (n+1)^2$.

Et on cherche à montrer que :

$$\boxed{C_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$$

à prouver

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 1 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

3. Posons $T_n = \sum_{k=1}^n k^3$. On démontre de même :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}.$$

En effet, l'initialisation est immédiate et :

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Thème IV

Dérivées successives et récurrence

Exercice 9 Dérivées successives et récurrence

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x.$$

Pour tout entier naturel n , on note $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f , avec la convention $f^{(0)} = f$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Conjecturer une expression de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.



Corrigé rédigé

1. On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + xe^x = (x+1)e^x, \\ f''(x) &= e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x, \\ f^{(3)}(x) &= e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x. \end{aligned}$$

$$f'(x) = (x+1)e^x, \quad f''(x) = (x+2)e^x, \quad f^{(3)}(x) = (x+3)e^x.$$

2. On conjecture :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = (x+n)e^x.$$

3. On démontre cette formule par récurrence sur n . Notons, pour tout entier naturel n , la propriété :

$$P(n) : f^{(n)}(x) = (x+n)e^x.$$

- Initialisation

Pour $n = 0$, on a $f^{(0)}(x) = f(x) = xe^x = (x+0)e^x$. Donc $P(0)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vraie.



Remarque

On admet que :

- $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$;
- $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Et on cherche à montrer que :

$$f^{(n+1)}(x) = (x+n+1)e^x \quad \text{à prouver}$$

Alors, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= ((x+n)e^x)' \\ &= e^x + (x+n)e^x \\ &= (x+n+1)e^x. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (x+n)e^x.$$

Thème V

Tableur et conjecture

Exercice 10 Tableur, factorielle et récurrence

On souhaite déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles :

$$2^n \leq n! \leq n^n.$$

On utilise le tableau suivant.

n	2^n	$n!$	n^n	Test
1	2	1	1	Faux
2	4	2	4	Faux
3	8	6	27	Faux
4	16	24	256	Vrai
5	32	120	3125	Vrai

1. Quelles formules peuvent être entrées dans les cellules de la ligne $n = 2$ pour calculer 2^n et n^n , puis glissées vers le bas ?
2. Quelle formule peut être entrée pour calculer les factorielles sans utiliser la fonction FACT du tableur ?
3. Conjecturer à partir de quel entier n on semble avoir $2^n \leq n! \leq n^n$.
4. Démontrer cette conjecture.



Corrigé rédigé

1. Pour calculer 2^n et n^n , on peut utiliser des formules du type :

$$=2^A2 \quad \text{et} \quad =A2^A2.$$

2. Pour la factorielle, si la colonne C contient $n!$, on peut utiliser la relation :

$$(n+1)! = (n+1)n!.$$

Donc, à la ligne suivante :

$$C_{\text{ligne suivante}} = A_{\text{ligne suivante}} \times C_{\text{ligne précédente}}.$$

3. D'après le tableau, on conjecture :

$$\forall n \geq 4, \quad 2^n \leq n! \leq n^n.$$

4. On démontre les deux inégalités.

D'abord, on démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 4$:

$$2^n \leq n!.$$

Notons pour tout entier naturel $n \geq 4$ la propriété

$$P(n) : 2^n \leq n!.$$

- Initialisation

Pour $n = 4$, on a :

$$2^4 = 16 \quad \text{et} \quad 4! = 24.$$

Ainsi $2^4 \leq 4!$, donc $P(4)$ est vraie.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est vraie au rang $n + 1$.



Remarque

On admet que :

- $2^n \leq n!$;
- $n \geq 4$.

Et on cherche à montrer que :

$$2^{n+1} \leq (n+1)! \quad \text{à prouver}$$

On applique l'hypothèse de récurrence :

$$2^n \leq n!.$$

Comme $n \geq 4$, on a $n + 1 \geq 5$, donc $2 \leq n + 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 2^n \leq n! &\implies 2 \times 2^n \leq 2n! \\ &\implies 2^{n+1} \leq 2n! \\ &\implies 2^{n+1} \leq (n+1)n! \\ &\implies 2^{n+1} \leq (n+1)!. \end{aligned}$$

On a donc montré $2^{n+1} \leq (n+1)!$. La propriété est héréditaire.

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 4 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 4$.

$$\boxed{\forall n \geq 4, \quad 2^n \leq n!}.$$

Ensuite, pour tout entier $n \geq 1$:

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \leq n \times n \times \cdots \times n = n^n.$$

On obtient donc :

$$\boxed{\forall n \geq 4, \quad 2^n \leq n! \leq n^n}.$$

Thème VI

Questions de bac : récurrence et suites

Exercice 11 [BAC] D'après Bac 2025 Encadrement d'une suite

Source bac : D'après Bac 2025 Métropole J1. Annales Math93 2025.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

1. Montrer que, pour tout réel $x \in [0 ; 1]$, on a :

$$0 \leq \frac{3x+2}{x+4} \leq 1.$$

2. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq 1.$$



Corrigé rédigé

1. Soit $x \in [0 ; 1]$. Comme $x+4 > 0$ et $3x+2 \geq 0$, on a :

$$\frac{3x+2}{x+4} \geq 0.$$

De plus :

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{x+4} \leq 1 &\iff 3x+2 \leq x+4 \\ &\iff 2x \leq 2 \\ &\iff x \leq 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$0 \leq \frac{3x+2}{x+4} \leq 1.$$

2. On applique une récurrence.

- Initialisation

$$u_0 = 1, \text{ donc } 0 \leq u_0 \leq 1.$$

- Hérédité

Supposons que pour n fixé, $0 \leq u_n \leq 1$.



Remarque

On admet que :

- $0 \leq u_n \leq 1$;
- $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$.

Et on cherche à montrer que :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1 \quad \text{à prouver}$$

En appliquant la question 1 avec $x = u_n$, on obtient :

$$0 \leq u_{n+1} \leq 1.$$

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq 1.$$

Exercice 12 [BAC] D'après Bac 2025 Suite auxiliaire

Source bac : D'après Bac 2025 Amérique du Nord J2B, exercice 4. Annales Math93 2025.

On considère une suite (u_n) telle que :

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

On pose :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

On admet que $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$.

1. Montrer que (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n .
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = n \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$



Corrigé rédigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \right) \\ &= \frac{1}{2}w_n. \end{aligned}$$

Donc (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Comme $w_0 = \frac{1}{2}$, on a :

$$w_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}.$$

2. On démontre par récurrence que $u_n = n \left(\frac{1}{2} \right)^n$.

- Initialisation

$$u_0 = 0 = 0 \left(\frac{1}{2} \right)^0.$$

- Hérédité

$$\text{Supposons que pour } n \text{ fixé, } u_n = n \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$



Remarque

On admet que :

- $u_n = n \left(\frac{1}{2} \right)^n$;
- $w_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$;
- $u_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}u_n$.

Et on cherche à montrer que :

$$u_{n+1} = (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \quad \text{à prouver}$$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= w_n + \frac{1}{2}u_n \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n \left(\frac{1}{2} \right)^n \\ &= (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

- Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

Thème VII

Questions de bac accessibles dès le chapitre 1

Exercice 13 [BAC] D'après Bac 2026 Fonction, variations et récurrence

Source bac : D'après Bac 2026 Asie-Pacifique J2, exercice 1.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}.$$

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle

$$\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[.$$



Corrigé

Pour tout réel $x < \frac{3}{2}$, on a :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}.$$

La fonction f est dérivable sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[$, et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (2x-3) - (x-2) \times 2}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{2x-3-2x+4}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{1}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

Or, pour tout réel $x < \frac{3}{2}$:

$$(2x-3)^2 > 0.$$

Donc :

$$f'(x) > 0.$$

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur :

$$\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[.$$

2. En déduire que pour tout $x \in [0 ; 1]$, on a :

$$f(x) \in [0 ; 1].$$



Corrigé

On a :

$$[0 ; 1] \subset \left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[.$$

D'après la question précédente, la fonction f est croissante sur $\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right]$, donc elle est croissante sur $[0 ; 1]$.

Ainsi, pour tout $x \in [0 ; 1]$:

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1).$$

Or :

$$f(0) = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Donc, pour tout $x \in [0 ; 1]$:

$$\frac{2}{3} \leq f(x) \leq 1.$$

En particulier :

$$\boxed{f(x) \in [0 ; 1].}$$

3. En utilisant la fonction f , démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$



Corrigé

On remarque que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

On définit, pour tout entier naturel n , la propriété :

$$P(n) : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

- Initialisation.

On a :

$$u_0 = 0.$$

De plus :

$$u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{2}{3}.$$

Donc :

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1.$$

Ainsi, $P(0)$ est vraie.

- Hérédité.

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.

On suppose donc :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

D'après la question 1 la fonction f est croissante sur $[0 ; 1]$.

Ainsi :

$$u_n \leq u_{n+1} \implies f(u_n) \leq f(u_{n+1}).$$

Donc :

$$u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

De plus, comme $u_{n+1} \in [0 ; 1]$, la partie A donne :

$$f(u_{n+1}) \in [0 ; 1].$$

Donc :

$$u_{n+2} \in [0 ; 1].$$

On obtient finalement :

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1.$$

Ainsi, $P(n + 1)$ est vraie.

- Conclusion.

La propriété $P(0)$ est vraie et elle est héréditaire.

Donc, par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

4. Calculer les premiers termes, conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis démontrer cette conjecture par récurrence.



Corrigé

Les premiers termes sont :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{2}{3}, \quad u_2 = \frac{4}{5}, \quad u_3 = \frac{6}{7}.$$

On conjecture que, pour tout entier naturel n :

$$P(n) : u_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

- Initialisation Pour $n = 0$:

$$\frac{2 \times 0}{2 \times 0 + 1} = 0 = u_0.$$

La propriété $P(0)$ est vraie.

- Hérédité Soit n un entier naturel fixé. Supposons que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n - 2}{2u_n - 3} \\ &= \frac{\frac{2n}{2n+1} - 2}{2 \times \frac{2n}{2n+1} - 3} \\ &= \frac{-2n - 2}{-2n - 3} \\ &= \frac{2(n+1)}{2(n+1) + 1}. \end{aligned}$$

La propriété $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

Thème VIII

Now We Can Talk : en route vers le supérieur

Exercice 14 Récurrence forte



On définit une suite (F_n) par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Démontrer par récurrence forte que, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$F_n \leq 2^{n-1}.$$



Corrigé rédigé

1. On utilise une récurrence forte.

- Initialisation

Pour $n = 1$, $F_1 = 1 = 2^0$. Pour $n = 2$, $F_2 = 1 \leq 2 = 2^1$.

- Hérédité forte

Supposons que, pour un entier $n \geq 2$ fixé, on ait $F_k \leq 2^{k-1}$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Alors :

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &\leq 2^{n-1} + 2^{n-2} \\ &= 3 \times 2^{n-2} \\ &\leq 4 \times 2^{n-2} \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

- Conclusion

La propriété est vraie aux rangs 1 et 2 et elle est héréditaire au sens fort. Donc, d'après le principe de récurrence forte, elle est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad F_n \leq 2^{n-1}.$$

Exercice 15 Une récurrence plus fine



Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 5$:

$$2^n \geq n^2.$$

Puis discuter pourquoi l'initialisation ne peut pas être faite au rang 1 pour cette propriété.



Corrigé rédigé

1. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geq 5$, $2^n \geq n^2$.

- Initialisation

$$2^5 = 32 \geq 25 = 5^2.$$

- Hérédité

Supposons que pour $n \geq 5$ fixé, $2^n \geq n^2$.



Remarque

On admet que :

- $2^n \geq n^2$;
- $n \geq 5$.

Et on cherche à montrer que :

$$\boxed{2^{n+1} \geq (n+1)^2} \quad \text{à prouver}$$

On a :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2.$$

Or :

$$\begin{aligned} 2n^2 - (n+1)^2 &= n^2 - 2n - 1 \\ &= n(n-2) - 1 \\ &\geq 5 \times 3 - 1 > 0. \end{aligned}$$

Donc $2n^2 \geq (n+1)^2$, puis $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

• Conclusion

On a montré que la propriété est vraie au rang 5 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geq 5$.

$$\boxed{\forall n \geq 5, \quad 2^n \geq n^2.}$$

2. On ne peut pas initialiser au rang 1 pour une propriété vraie pour tout $n \geq 5$, car elle est fausse au rang 3 :

$$2^3 = 8 < 9 = 3^2.$$

Exercice 16 Nombre de diagonales d'un polygone convexe



Pour un polygone convexe, c'est-à-dire un polygone dont tous les angles sont inférieurs à 180 degrés, on souhaite compter le nombre de diagonales, c'est-à-dire le nombre de segments joignant deux sommets non consécutifs de ce polygone.

- Déterminer le nombre de diagonales d'un triangle, d'un quadrilatère et d'un pentagone convexe.
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère la proposition $\mathcal{P}_n$ suivante :

« Un polygone convexe à n côtés possède $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales. »

Que peut-on vérifier d'après la question 1 ?

- On suppose qu'il existe un entier naturel $k \geq 3$ pour lequel $\mathcal{P}_k$ est vraie. On considère P un polygone convexe à $k+1$ sommets et on note A l'un de ses sommets.
 - Combien de diagonales comporte le polygone P' composé des $k+1$ sommets sauf A ? Donc P' possède k sommets.
 - Combien y a-t-il de diagonales de P partant du point A ?
 - En remarquant qu'un des côtés de P' est une diagonale de P , montrer que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie et conclure.



Corrigé rédigé

- Un triangle ne possède aucune diagonale. Un quadrilatère convexe possède 2 diagonales et un pentagone convexe possède 5 diagonales.

- Pour $n = 3$, la formule donne :

$$\frac{3(3-3)}{2} = 0.$$

Pour $n = 4$, elle donne :

$$\frac{4(4-3)}{2} = 2.$$

Pour $n = 5$, elle donne :

$$\frac{5(5-3)}{2} = 5.$$

Les trois valeurs sont cohérentes avec les résultats de la question 1.

- On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un entier $k \geq 3$.

- Le polygone P' possède k sommets. D'après l'hypothèse de récurrence, il possède donc :

$$\frac{k(k-3)}{2}$$

diagonales.

3. b. Depuis le sommet A , on peut relier A aux k autres sommets. Deux de ces segments sont des côtés du polygone P , donc ne sont pas des diagonales. Ainsi, il y a :

$$k - 2$$

diagonales issues de A .

3. c. En passant de P' à P , on ajoute les $k - 2$ diagonales issues de A . De plus, un côté de P' devient une diagonale de P . Le nombre total de diagonales de P est donc :

$$\begin{aligned} \frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 &= \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 \\ &= \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} \\ &= \frac{k^2 - k - 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k-2)}{2}. \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{(k+1)((k+1)-3)}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

La propriété est vraie pour $n = 3$ et elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, tout polygone convexe à n côtés possède :

$$\boxed{\frac{n(n-3)}{2}}$$

diagonales, pour tout entier $n \geq 3$.

↩ Fin du TD ↪