MATH93

Terminale Spécialité Mathématiques
Recueil d'exercices – Entraînement – Méthodes

TD – EXERCICES

TD 1

Démonstration par récurrence

Version corrigée

Sommaire du TD

I Comprendre le principe de récurrence 2

II Rédiger une récurrence complète sur les suites 6

III Sommes classiques et démonstrations 10

IV Dérivées successives et récurrence 11

V Tableur et conjecture 12

VI Questions de bac : récurrence et suites 14

VII Questions de bac accessibles dès le chapitre 1 17

VIII Now We Can Talk : en route vers le supérieur 21

Organisation du recueil

Ce recueil accompagne le chapitre sur la démonstration par récurrence. Les exercices sont classés par compétences.

Thème I Comprendre le principe de récurrence

Exercice 1 [!] Bilan Une inégalité simple

Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$2^n \geqslant n.$$

Aide

Pour l'hérédité, on pourra utiliser que si $p \geqslant 1$, alors $2p \geqslant p+1$.

Corrigé rédigé

1. Démonstration par récurrence. Notons, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété

$$P(n) \ : \ 2^n \geqslant n.$$

- Initialisation
Pour $n = 1$, on a :
$$2^1 = 2 \geqslant 1.$$
La propriété $P(1)$ est donc vraie.
- Hérédité
Soit n un entier fixé dans l'ensemble des rangs considérés. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $2^n \geqslant n$.
On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $2^{n+1} \geqslant n+1$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
◦ $2^n \geqslant n$;	$\boxed{2^{n+1} \geqslant n+1}$ à prouver
◦ $n \geqslant 1$.	

Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie. On applique l'hypothèse de récurrence :

$$2^n \geqslant n.$$

Comme $2 > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2^n \geqslant n &\Longrightarrow 2 \times 2^n \geqslant 2n \\ &\Longrightarrow 2^{n+1} \geqslant 2n. \end{aligned}$$

Or $n \geqslant 1$, donc $2n \geqslant n+1$. Ainsi :

$$2^{n+1} \geqslant 2n \geqslant n+1.$$

On a donc montré $2^{n+1} \geqslant n+1$. La propriété est héréditaire.

- Conclusion
On a montré que la propriété est vraie au rang 1 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad 2^n \geqslant n.}$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 2, page 3.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 3, page 4.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 2 [+] Consolidation Compléter une rédaction type

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 1}.$$

On souhaite démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_n > 1.$$

1. Écrire clairement la propriété $P(n)$.
2. Rédiger l'initialisation.
3. Rédiger l'hérédité en commençant par :

Soit n un entier naturel fixé. Supposons que $P(n)$ soit vraie.

4. Conclure.

Corrigé rédigé

1. La propriété est :

$$\boxed{P(n) : \quad u_n > 1.}$$

2. Rédaction complète. Notons, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, la propriété

$$P(n) \ : \ u_n > 1.$$

- Initialisation
  Pour $n = 0$, $u_0 = 2 > 1$. Donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité
  Soit n un entier fixé dans l'ensemble des rangs considérés. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $u_n > 1$.
  On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} > 1$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
◦ $u_n > 1$;	$\boxed{u_{n+1} > 1}$ à prouver
◦ $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 6}{u_n + 1}$.	

Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie. On calcule :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{u_n + 6}{u_n + 1} - 1 \\ &= \frac{5}{u_n + 1}. \end{aligned}$$

Or $u_n > 1$, donc $u_n + 1 > 0$. Ainsi $u_{n+1} - 1 > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$.

- Conclusion
  On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 1.}$$

Exercice 3 [*] Approfondissement Récurrence ou preuve directe ?

On souhaite montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3.$$

1. Démontrer cette inégalité par récurrence.
2. Donner ensuite une preuve directe, sans récurrence.
3. Comparer les deux méthodes : laquelle est la plus efficace ici ?

Corrigé rédigé

1. Preuve par récurrence. Notons, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, la propriété :

$$P(n) \ : \ \sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3.$$

- Initialisation
  Pour $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad 1^3 = 1.$$

  Donc $P(1)$ est vraie.

- Hérédité
  Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \leqslant (n+1)^3$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
◦ $\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3$;	$\boxed{\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \leqslant (n+1)^3}$ à prouver
◦ $n \geqslant 1$.	

  Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &\leqslant n^3 + (n+1)^2.\end{aligned}$$

  Or :

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - \left(n^3 + (n+1)^2\right) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 - n^2 - 2n - 1 \\ &= 2n^2 + n \\ &= n(2n+1) \geqslant 0.\end{aligned}$$

  Donc $n^3 + (n+1)^2 \leqslant (n+1)^3$, puis $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 \leqslant (n+1)^3$. L'hérédité est prouvée.

- Conclusion
  On a montré que la propriété est vraie au rang 1 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3.}$$

2. Preuve directe. Pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, on a $k \leqslant n$, donc $k^2 \leqslant n^2$ car la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} n^2.$$

Or dans la somme de droite, la variable k varie de 1 à n mais n'intervient pas dans l'expression sommée, donc cela revient à ajouter n fois le terme n^2 :

$$\sum_{k=1}^{n} n^2 = n^2 + n^2 + \cdots + n^2 = n \times n^2 = n^3.$$

Donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 \leqslant n^3.}$$

3. La preuve directe est ici la plus efficace : elle exploite seulement la majoration terme à terme $k^2 \leqslant n^2$.

Thème II Rédiger une récurrence complète sur les suites

Exercice 4 Suite définie par une fonction

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. Montrer que, pour tout réel $x > 0$:
$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - \sqrt{2} = \frac{(x-\sqrt{2})^2}{2x}.$$
2. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Corrigé rédigé

1. Pour tout $x > 0$:
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - \sqrt{2} &= \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \sqrt{2} \\ &= \frac{x^2 + 2 - 2\sqrt{2}x}{2x} \\ &= \boxed{\frac{(x-\sqrt{2})^2}{2x}}.\end{aligned}$$

2. On démontre par récurrence que $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
   - Initialisation
   $u_0 = 2 \geqslant \sqrt{2}$.
   - Hérédité
   Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $u_n \geqslant \sqrt{2}$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$.

   Remarque

   Ce que je sais :
   - $u_n \geqslant \sqrt{2}$;
   - $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.

   Ce que je veux démontrer :
   $\boxed{u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}}$ à prouver

   Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie. Comme $u_n \geqslant \sqrt{2} > 0$, on applique la question 1 avec $x = u_n$:
   $$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geqslant 0.$$
   Donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{2}$.
   - Conclusion
   On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant \sqrt{2}.}$$

3. Pour tout n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) - u_n \\ &= \frac{2 - u_n^2}{2u_n}. \end{aligned}$$

Comme $u_n \geqslant \sqrt{2}$, on a $2 - u_n^2 \leqslant 0$ et $2u_n > 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

Exercice 5 [!] Bilan Terme général d'une suite récurrente

Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$v_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = v_n + 2n + 2.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$v_n = n(n+1) + 3.$$

2. Retrouver ce résultat sans récurrence, en sommant les accroissements $v_{k+1} - v_k$.

Corrigé rédigé

1. Notons $P(n) : v_n = n(n+1) + 3$.

- Initialisation
Pour $n = 0$, $v_0 = 3$ et $0(0+1) + 3 = 3$.
- Hérédité
Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $v_n = n(n+1) + 3$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $v_{n+1} = (n+1)(n+2) + 3$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
◦ $v_n = n(n+1) + 3$;	$\boxed{v_{n+1} = (n+1)(n+2) + 3}$ à prouver
◦ $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$.	

Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie. Alors :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + 2n + 2 \\ &= n(n+1) + 3 + 2n + 2 \\ &= n^2 + 3n + 5 \\ &= (n+1)(n+2) + 3. \end{aligned}$$

- Conclusion
On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = n(n+1) + 3.}$

2. Sans récurrence :

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 + \sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) \\ &= 3 + \sum_{k=0}^{n-1}(2k+2) \\ &= 3 + 2\sum_{j=1}^{n} j \\ &= 3 + n(n+1). \end{aligned}$$

$$\boxed{v_n = n(n+1) + 3.}$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 6, page 8.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 7, page 9.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 6 [+] Consolidation Conjecture puis preuve

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. La suite semble-t-elle arithmétique ? géométrique ?
3. Emettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.
4. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Corrigé rédigé

1. On obtient :

$$\boxed{u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad u_2 = 3, \qquad u_3 = 7, \qquad u_4 = 15.}$$

2. Les différences et les quotients ne sont pas constants : la suite ne semble ni arithmétique, ni géométrique.
3. On conjecture :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1.}$$

4. On démontre la conjecture par récurrence.
   - Initialisation
     $u_0 = 0 = 2^0 - 1$.
   - Hérédité
     Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $u_n = 2^n - 1$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$.

Remarque

Ce que je sais :
- $u_n = 2^n - 1$;
- $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Ce que je veux démontrer :

$\boxed{u_{n+1} = 2^{n+1} - 1}$ à prouver

Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2u_n + 1 \\ &= 2(2^n - 1) + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1. \end{aligned}$$

- Conclusion
  On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1.}$$

Exercice 7 [*] Approfondissement Conjecturer un encadrement puis démontrer

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 6 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$

1. Calculer les trois premiers termes et conjecturer un encadrement de u_n.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant 6$.
3. Étudier la monotonie de (u_n).

Corrigé rédigé

1. On calcule :

$$\boxed{u_0 = 6, \qquad u_1 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \qquad u_2 = \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}.}$$

On conjecture $2 \leqslant u_n \leqslant 6$.

2. Notons $P(n) : 2 \leqslant u_n \leqslant 6$.
   - Initialisation
     $u_0 = 6$, donc $2 \leqslant u_0 \leqslant 6$.
   - Hérédité
     Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $2 \leqslant u_n \leqslant 6$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
◦ $2 \leqslant u_n \leqslant 6$;	$\boxed{2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 6}$ à prouver
◦ $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.	

Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie. Alors $4 \leqslant u_n + 2 \leqslant 8$. Par croissance de la racine carrée :

$$2 \leqslant \sqrt{u_n + 2} \leqslant \sqrt{8}.$$

Comme $\sqrt{8} \leqslant 6$, on a $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 6$.

   - Conclusion
     On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leqslant u_n \leqslant 6.}$$

3. Pour $x \in [2\ ;\ 6]$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+2} \leqslant x &\iff x + 2 \leqslant x^2 \\ &\iff (x-2)(x+1) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie sur $[2\ ;\ 6]$. Donc $u_{n+1} \leqslant u_n$.

(u_n) est décroissante.

Thème III Sommes classiques et démonstrations

Exercice 8 Sommes classiques : les indispensables

Ces résultats sont à connaître.

1. Démontrer, par la méthode de votre choix, que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Corrigé rédigé

1. Par la méthode de Gauss, si $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$, alors :
$$2S_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1).$$
Donc :
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.}$$
2. Posons $C_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et montrons par récurrence que :
$$C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- Initialisation
Pour $n = 1$, $C_1 = 1$ et $\dfrac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.
- Hérédité
Soit $n \geqslant 1$ un entier fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $C_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $C_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

Remarque

Ce que je sais :
- $C_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
- $C_{n+1} = C_n + (n+1)^2$.

Ce que je veux démontrer :

$\boxed{C_{n+1} = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}}$ à prouver

Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie soit :

$$C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= C_n + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)\left(n(2n+1)+6(n+1)\right)}{6} \\ C_{n+1} &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \end{aligned}$$

Ou pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} (n+2)(2n+3) &= 2n^2+3n+4n+6 \\ &= 2n^2+7n+6 \end{aligned}$$

Donc on a bien :

$$C_{n+1} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

La propriété est héréditaire.

- Conclusion
  On a montré que la propriété est vraie au rang 1 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

3. Posons $T_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$. On démontre de même :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad T_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.}$$

En effet, l'initialisation est immédiate et :

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= T_n + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Thème IV Dérivées successives et récurrence

Exercice 9 Dérivées successives et récurrence

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x.$$

Pour tout entier naturel n, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f, avec la convention $f^{(0)} = f$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f^{(3)}(x)$.
2. Conjecturer une expression de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer cette conjecture par récurrence.

Corrigé rédigé

1. On calcule :

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x,$$
$$f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x,$$
$$f^{(3)}(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x.$$

$$\boxed{f'(x) = (x+1)e^x, \quad f''(x) = (x+2)e^x, \quad f^{(3)}(x) = (x+3)e^x.}$$

2. On conjecture :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = (x+n)e^x.}$$

3. On démontre cette formule par récurrence sur n. Notons, pour tout entier naturel n, la propriété :

$$P(n) \ : \ f^{(n)}(x) = (x+n)e^x.$$

- Initialisation
  Pour $n = 0$, on a $f^{(0)}(x) = f(x) = xe^x = (x+0)e^x$. Donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité
  Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $f^{(n+1)}(x) = (x+n+1)e^x$.

  Remarque

  Ce que je sais :
  - $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$;
  - $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

  Ce que je veux démontrer :

  $\boxed{f^{(n+1)}(x) = (x+n+1)e^x}$ à prouver

  Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie. Alors, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) \\ &= ((x+n)e^x)' \\ &= e^x + (x+n)e^x \\ &= (x+n+1)e^x. \end{aligned}$$

  Donc $P(n+1)$ est vraie.
- Conclusion
  On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = (x+n)e^x.}$$

Thème V Tableur et conjecture

Exercice 10 Tableur, factorielle et récurrence

On souhaite déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquelles :

$$2^n \leqslant n! \leqslant n^n.$$

On utilise le tableau suivant.

n	2^n	$n!$	n^n	Test
1	2	1	1	Faux
2	4	2	4	Faux
3	8	6	27	Faux
4	16	24	256	Vrai
5	32	120	3125	Vrai

1. Quelles formules peuvent être entrées dans les cellules de la ligne $n = 2$ pour calculer 2^n et n^n, puis glissées vers le bas ?
2. Quelle formule peut être entrée pour calculer les factorielles sans utiliser la fonction FACT du tableur ?
3. Conjecturer à partir de quel entier n on semble avoir $2^n \leqslant n! \leqslant n^n$.
4. Démontrer cette conjecture.

Corrigé rédigé

1. Pour calculer 2^n et n^n, on peut utiliser des formules du type :

$$\boxed{\texttt{=2\^{}A2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\texttt{=A2\^{}A2}}.$$

2. Pour la factorielle, si la colonne C contient $n!$, on peut utiliser la relation :

$$(n+1)! = (n+1)n!.$$

Donc, à la ligne suivante :

$$\boxed{C_{\text{ligne suivante}} = A_{\text{ligne suivante}} \times C_{\text{ligne précédente}}.}$$

3. D'après le tableau, on conjecture :

$$\boxed{\forall n \geqslant 4, \quad 2^n \leqslant n! \leqslant n^n.}$$

4. On démontre les deux inégalités.
D'abord, on démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 4$:

$$2^n \leqslant n!.$$

Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 4$ la propriété

$$P(n) \ : \ 2^n \leqslant n!.$$

- Initialisation
Pour $n = 4$, on a :

$$2^4 = 16 \qquad \text{et} \qquad 4! = 24.$$

Ainsi $2^4 \leqslant 4!$, donc $P(4)$ est vraie.

- Hérédité
Soit n un entier fixé dans lensemble des rangs considérés. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $2^n \leqslant n!$.
On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, cest-à-dire que $2^{n+1} \leqslant (n+1)!$.

Remarque

Ce que je sais :
- $2^n \leqslant n!$;
- $n \geqslant 4$.

Ce que je veux démontrer :

$\boxed{2^{n+1} \leqslant (n+1)!}$ à prouver

Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie. On applique l'hypothèse de récurrence :

$$2^n \leqslant n!.$$

Comme $n \geqslant 4$, on a $n+1 \geqslant 5$, donc $2 \leqslant n+1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 2^n \leqslant n! &\Longrightarrow 2 \times 2^n \leqslant 2n! \\ &\Longrightarrow 2^{n+1} \leqslant 2n! \\ &\Longrightarrow 2^{n+1} \leqslant (n+1)n! \\ &\Longrightarrow 2^{n+1} \leqslant (n+1)!. \end{aligned}$$

On a donc montré $2^{n+1} \leqslant (n+1)!$. La propriété est héréditaire.

- Conclusion
  On a montré que la propriété est vraie au rang 4 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 4$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 4, \quad 2^n \leqslant n!.}$$

Ensuite, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n \leqslant n \times n \times \cdots \times n = n^n.$$

On obtient donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 4, \quad 2^n \leqslant n! \leqslant n^n.}$$

Thème VI Questions de bac : récurrence et suites

Exercice 11 [BAC] D'après Bac 2025 Encadrement d'une suite

Source bac : D'après Bac 2025 Métropole J1. Annales Math93 2025.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

1. Montrer que, pour tout réel $x \in [0\ ;\ 1]$, on a :
$$0 \leqslant \frac{3x+2}{x+4} \leqslant 1.$$

2. En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$$0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

Corrigé rédigé

1. Soit $x \in [0\ ;\ 1]$. Comme $x+4 > 0$ et $3x+2 \geqslant 0$, on a :
$$\frac{3x+2}{x+4} \geqslant 0.$$
De plus :
$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{x+4} \leqslant 1 &\iff 3x+2 \leqslant x+4 \\ &\iff 2x \leqslant 2 \\ &\iff x \leqslant 1. \end{aligned}$$
Donc :
$$\boxed{0 \leqslant \frac{3x+2}{x+4} \leqslant 1.}$$

2. On applique une récurrence.
   - Initialisation
     $u_0 = 1$, donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$.
   - Hérédité
     Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
◦ $0 \leqslant u_n \leqslant 1$;	$\boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1}$ à prouver
◦ $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.	

Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie. En appliquant la question 1 avec $x = u_n$, on obtient :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

   - Conclusion
     On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.}$$

Exercice 12 [BAC] D'après Bac 2025 Suite auxiliaire

Source bac : D'après Bac 2025 Amérique du Nord J2B, exercice 4. Annales Math93 2025.

On considère une suite (u_n) telle que :

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

On pose :

$$w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

On admet que $u_0 = 0$ et $u_1 = \dfrac{1}{2}$.

1. Montrer que (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Corrigé rédigé

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}w_n. \end{aligned}$$

Donc (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Comme $w_0 = \frac{1}{2}$, on a :

$$\boxed{w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.}$$

2. On démontre par récurrence que $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- Initialisation
  $u_0 = 0 = 0\left(\frac{1}{2}\right)^0$.
- Hérédité
  Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Remarque

Ce que je sais :
- $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$;
- $w_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$;
- $u_{n+1} = w_n + \frac{1}{2}u_n$.

Ce que je veux démontrer :

$\boxed{u_{n+1} = (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$ à prouver

Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= w_n + \frac{1}{2}u_n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

- Conclusion
  On a montré que la propriété est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n.}$$

Thème VII Questions de bac accessibles dès le chapitre 1

Exercice 13 [BAC] D'après Bac 2026 Fonction, variations et récurrence

Source bac : D'après Bac 2026 Asie-Pacifique J2, exercice 1.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}.$$

On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3} \quad \text{pour tout entier naturel } n.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle

$$\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right[.$$

Corrigé

Pour tout réel $x < \frac{3}{2}$, on a :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}.$$

La fonction f est dérivable sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right[$, et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1\times(2x-3) - (x-2)\times 2}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{2x-3-2x+4}{(2x-3)^2} \\ &= \frac{1}{(2x-3)^2}. \end{aligned}$$

Or, pour tout réel $x < \frac{3}{2}$:

$$(2x-3)^2 > 0.$$

Donc :

$$f'(x) > 0.$$

Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur :

$$\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right[.$$

2. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, on a :

$$f(x) \in [0\ ;\ 1].$$

Corrigé

On a :

$$[0\ ;\ 1] \subset \left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right[.$$

D'après la question précédente, la fonction f est croissante sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{3}{2}\right[$, donc elle est croissante sur $[0\ ;\ 1]$.
Ainsi, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$:

$$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1).$$

Or :

$$f(0) = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad f(1) = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Donc, pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$:

$$\frac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

En particulier :

$$\boxed{f(x) \in [0\ ;\ 1].}$$

3. En utilisant la fonction f, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

Corrigé

On remarque que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

On définit, pour tout entier naturel n, la propriété :

$$P(n) : \quad 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

- Initialisation.
  On a :
  $$u_0 = 0.$$
  De plus :
  $$u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{2}{3}.$$
  Donc :
  $$0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1.$$
  Ainsi, $P(0)$ est vraie.
- Hérédité.
  Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que
  $$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$
  On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que
  $$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1.$$

Remarque

Ce que je sais :
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$$
Ce que je veux démontrer :
$$\boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1}$$

Supposons donc que, pour l'entier n fixé,

$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

D'après la question 1 la fonction f est croissante sur $[0\ ;\ 1]$.

Ainsi :

$$u_n \leqslant u_{n+1} \Longrightarrow f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}).$$

Donc :

$$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}.$$

De plus, comme $u_{n+1} \in [0\ ;\ 1]$, la partie A donne :

$$f(u_{n+1}) \in [0\ ;\ 1].$$

Donc :

$$u_{n+2} \in [0\ ;\ 1].$$

On obtient finalement :

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1.$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion.

  La propriété $P(0)$ est vraie et elle est héréditaire.

  Donc, par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.}$$

4. Calculer les premiers termes, conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer cette conjecture par récurrence.

Corrigé

Les premiers termes sont :

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = \frac{2}{3}, \qquad u_2 = \frac{4}{5}, \qquad u_3 = \frac{6}{7}.$$

On conjecture que, pour tout entier naturel n :

$$P(n) : \quad u_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

- Initialisation Pour $n = 0$:

$$\frac{2 \times 0}{2 \times 0 + 1} = 0 = u_0.$$

  La propriété $P(0)$ est vraie.

- Hérédité

  Soit n un entier naturel fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que

$$u_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

  On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}.$$

Remarque

Ce que je sais :

$$u_n = \frac{2n}{2n+1}$$

Ce que je veux démontrer :

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}}$$

Supposons donc que, pour l'entier n fixé,

$$u_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n - 2}{2u_n - 3} \\ &= \frac{\dfrac{2n}{2n+1} - 2}{2 \times \dfrac{2n}{2n+1} - 3} \\ &= \frac{-2n-2}{-2n-3} \\ &= \frac{2(n+1)}{2(n+1)+1}. \end{aligned}$$

La propriété $P(n+1)$ est vraie.

- Conclusion La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2n}{2n+1}.}$$

Thème VIII Now We Can Talk : en route vers le supérieur

Exercice 14 Récurrence forte ★★

On définit une suite (F_n) par :

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Démontrer par récurrence forte que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$F_n \leqslant 2^{n-1}.$$

Corrigé rédigé

1. On utilise une récurrence forte.
   - Initialisation
     Pour $n = 1$, $F_1 = 1 = 2^0$. Pour $n = 2$, $F_2 = 1 \leqslant 2 = 2^1$.
   - Hérédité forte
     Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. On suppose que $F_k \leqslant 2^{k-1}$ pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. On cherche à démontrer que

     $$F_{n+1} \leqslant 2^n.$$

     Remarque

     Ce que je sais :

     $$\forall k \in [\![1\,;\,n]\!], \quad F_k \leqslant 2^{k-1}$$

     Ce que je veux démontrer :

     $$\boxed{F_{n+1} \leqslant 2^n}$$

     Supposons donc que, pour l'entier n fixé, $F_k \leqslant 2^{k-1}$ pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Alors :

     $$\begin{aligned} F_{n+1} &= F_n + F_{n-1} \\ &\leqslant 2^{n-1} + 2^{n-2} \\ &= 3 \times 2^{n-2} \\ &\leqslant 4 \times 2^{n-2} \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

   - Conclusion
     La propriété est vraie aux rangs 1 et 2 et elle est héréditaire au sens fort. Donc, d'après le principe de récurrence forte, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad F_n \leqslant 2^{n-1}.}$$

Exercice 15 Une récurrence plus fine ★★★

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 5$:

$$2^n \geqslant n^2.$$

Puis discuter pourquoi l'initialisation ne peut pas être faite au rang 1 pour cette propriété.

Corrigé rédigé

1. Montrons par récurrence que, pour tout $n \geqslant 5$, $2^n \geqslant n^2$.
   - Initialisation
     $2^5 = 32 \geqslant 25 = 5^2$.

- Hérédité
  Soit $n \geqslant 5$ un entier fixé. On suppose que $P(n)$ est vraie, et donc que $2^n \geqslant n^2$. On cherche à démontrer que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$.

Remarque

Ce que je sais :	Ce que je veux démontrer :
◦ $2^n \geqslant n^2$;	
◦ $n \geqslant 5$.	$\boxed{2^{n+1} \geqslant (n+1)^2}$ à prouver

Supposons donc que, pour l'entier n fixé, l'hypothèse de récurrence est vraie. On a :

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n \geqslant 2n^2.$$

Or :

$$\begin{aligned} 2n^2 - (n+1)^2 &= n^2 - 2n - 1 \\ &= n(n-2) - 1 \\ &\geqslant 5 \times 3 - 1 > 0. \end{aligned}$$

Donc $2n^2 \geqslant (n+1)^2$, puis $2^{n+1} \geqslant (n+1)^2$.

- Conclusion
  On a montré que la propriété est vraie au rang 5 et qu'elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \geqslant 5$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 5, \quad 2^n \geqslant n^2.}$$

2. On ne peut pas initialiser au rang 1 pour une propriété vraie pour tout $n \geqslant 5$, car elle est fausse au rang 3 :

$$2^3 = 8 < 9 = 3^2.$$

Exercice 16 Nombre de diagonales d'un polygone convexe ★

Pour un polygone convexe, c'est-à-dire un polygone dont tous les angles sont inférieurs à 180 degrés, on souhaite compter le nombre de diagonales, c'est-à-dire le nombre de segments joignant deux sommets non consécutifs de ce polygone.

1. Déterminer le nombre de diagonales d'un triangle, d'un quadrilatère et d'un pentagone convexe.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère la proposition $\mathcal{P}_n$ suivante :

« Un polygone convexe à n côtés possède $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonales. »

Que peut-on vérifier d'après la question 1 ?

3. On suppose qu'il existe un entier naturel $k \geqslant 3$ pour lequel $\mathcal{P}_k$ est vraie. On considère P un polygone convexe à $k+1$ sommets et on note A l'un de ses sommets.

3. a. Combien de diagonales comporte le polygone P' composé des $k+1$ sommets sauf A ? Donc P' possède k sommets.

3. b. Combien y a-t-il de diagonales de P partant du point A ?

3. c. En remarquant qu'un des côtés de P' est une diagonale de P, montrer que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie et conclure.

Corrigé rédigé

1. Un triangle ne possède aucune diagonale. Un quadrilatère convexe possède 2 diagonales et un pentagone convexe possède 5 diagonales.
2. Pour $n = 3$, la formule donne :

$$\frac{3(3-3)}{2} = 0.$$

Pour $n = 4$, elle donne :

$$\frac{4(4-3)}{2} = 2.$$

Pour $n = 5$, elle donne :

$$\frac{5(5-3)}{2} = 5.$$

Les trois valeurs sont cohérentes avec les résultats de la question 1.

3. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour un entier $k \geqslant 3$.

3. a. Le polygone P' possède k sommets. D'après l'hypothèse de récurrence, il possède donc :

$$\frac{k(k-3)}{2}$$

diagonales.

3. b. Depuis le sommet A, on peut relier A aux k autres sommets. Deux de ces segments sont des côtés du polygone P, donc ne sont pas des diagonales. Ainsi, il y a :

$$k-2$$

diagonales issues de A.

3. c. Soit $k \geqslant 3$ un entier fixé. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie, et donc qu'un polygone convexe à k côtés possède $\dfrac{k(k-3)}{2}$ diagonales. On cherche à démontrer que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie, c'est-à-dire qu'un polygone convexe à $k+1$ côtés possède $\dfrac{(k+1)(k-2)}{2}$ diagonales.

Remarque

Ce que je sais :

$$d_k = \frac{k(k-3)}{2}$$

Ce que je veux démontrer :

$$\boxed{d_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}}$$

Supposons donc que, pour l'entier k fixé, $\mathcal{P}_k$ est vraie.
En passant de P' à P, on ajoute les $k-2$ diagonales issues de A. De plus, un côté de P' devient une diagonale de P. Le nombre total de diagonales de P est donc :

$$\begin{aligned}\frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 &= \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 \\ &= \frac{k^2 - 3k + 2k - 2}{2} \\ &= \frac{k^2 - k - 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k-2)}{2}.\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{(k+1)((k+1)-3)}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
La propriété est vraie pour $n = 3$ et elle est héréditaire. Donc, d'après le principe de récurrence, tout polygone convexe à n côtés possède :

$$\boxed{\frac{n(n-3)}{2}}$$

diagonales, pour tout entier $n \geqslant 3$.

↩ Fin du TD ↪