MATH93

Terminale Spécialité Mathématiques

Recueil d'exercices – Entraînement – Méthodes

TD – EXERCICES

TD 6

Limites de fonctions

Sommaire du TD

I Limites usuelles, asymptotes et formes indéterminées 2

II Composition, comparaison et encadrement 14

III Fonction exponentielle et croissances comparées 18

IV Extraits du Bac 26

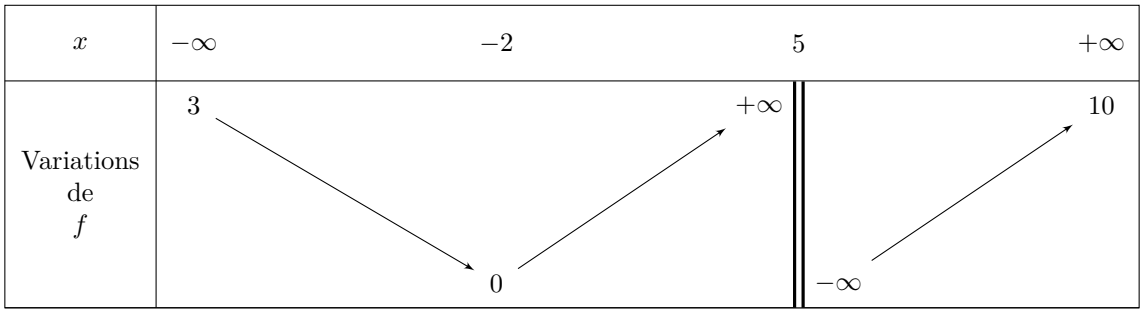
Thème I Limites usuelles, asymptotes et formes indéterminées

Rappel – asymptotes

- Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $\boxed{x = a}$ est une asymptote verticale à la courbe de f.
- Si $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $\boxed{y = \ell}$ est une asymptote horizontale à la courbe de f.

Exercice 1 Lire des asymptotes dans un tableau de variations

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{5\}$. Déterminer les équations des asymptotes.



Exercice 2 Calculer des limites classiques et déterminer les asymptotes

Dans cet exercice, on précisera les éventuelles asymptotes aux courbes représentatives.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{5\}$ par

$$f(x) = \frac{6-x}{x-5}.$$

Étudier les limites de f en 5 à gauche et à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Soit g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par

$$g(x) = x^2 - x + \frac{1}{x-1}.$$

Étudier les limites de g en 1 à gauche et à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Soit h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par

$$h(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2}.$$

Étudier les limites de h en 1 à gauche et à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Soit k définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\ ;\ 2\}$ par

$$k(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2}.$$

Étudier les limites de k en 1 à gauche et à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 3 Lever une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ par factorisation

Méthode

Quand une fraction rationnelle conduit à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en a, on cherche à factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$, puis on simplifie avant de reprendre le calcul de la limite.

1. Soit f définie sur D_f par

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}.$$

1. a. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.

1. b. Étudier la limite de f en 1.

Aide

Factoriser x^2-3x+2 puis simplifier l'expression de f.

1. c. Étudier les limites de f aux autres bornes de son ensemble de définition.

2. Soit g définie sur D_g par

$$g(x) = \frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}.$$

2. a. Déterminer D_g, l'ensemble de définition de g.

2. b. Étudier la limite de g en 3.

Aide

Factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier l'expression de g.

2. c. Étudier les limites de g aux autres bornes de son ensemble de définition.

Exercice 4 Lever une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en transformant l'expression

Méthode

On cherche une transformation adaptée : factorisation remarquable, identité algébrique ou quantité conjuguée. L'objectif est de faire apparaître puis de simplifier le facteur responsable de la forme $\frac{0}{0}$.

1. a. Montrer que, pour tout réel $x \neq 1$,

$$1+x+x^2+x^3 = \frac{x^4-1}{x-1}.$$

1. b. Déterminer

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^2-3x+2}.$$

2. Déterminer

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}.$$

Exercice 5 Reconnaître un nombre dérivé

Méthode

Lorsque x tend vers a et qu'une expression contient $f(x)-f(a)$ et $x-a$, penser au taux d'accroissement :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et soit a un réel. On suppose que $g'(a)\neq 0$.

1. Déterminer

$$\lim_{x\to a}\ \frac{xf(a)-af(x)}{x-a}.$$

Aide

Poser $h(x)=xf(a)-af(x)$ et calculer $h(a)$.

2. Déterminer

$$\lim_{x\to a}\ \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}.$$

Exercice 6 Lever une indétermination avec la quantité conjuguée

Méthode

Lorsqu'une expression contient une racine carrée et conduit à une forme indéterminée, penser à multiplier par la quantité conjuguée afin de faire apparaître une identité remarquable.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+5}.$$

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

1. b. Montrer que, pour tout réel x,

$$f(x)=\frac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}.$$

1. c. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Soit f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(h)=\frac{\sqrt{4+h}-2}{h}.$$

Démontrer que

$$\lim_{h\to 0^+}\ f(h)=\frac{1}{4}.$$

Exercice 7 Traiter une valeur absolue

Méthode

Pour calculer une limite contenant $|x|$, distinguer les zones où x est positif ou négatif :

$$|x| = x \text{ si } x \geqslant 0, \qquad |x| = -x \text{ si } x < 0.$$

Soit f définie sur son ensemble de définition par

$$f(x) = \frac{3x + |x|}{7x - 5|x|}.$$

Déterminer :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; **2.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; **3.** $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; **4.** $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; **5.** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Thème II Composition, comparaison et encadrement

Exercice 8 Utiliser une composition de limites

Rappel – fonction exponentielle

$$\boxed{\lim_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty}.$$

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{3x+2}$ en utilisant une composition.

2. Calculer de la même façon les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

2. a. $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x-1}$;

2. b. $x \longmapsto \dfrac{5}{\mathrm{e}^{5x-3}}$;

2. c. $x \longmapsto \mathrm{e}^{-4x-1}$.

Exercice 9 Utiliser un théorème de comparaison

Méthode

Pour montrer qu'une fonction tend vers $+\infty$, on peut la minorer par une fonction qui tend vers $+\infty$. Pour montrer qu'elle tend vers $-\infty$, on peut la majorer par une fonction qui tend vers $-\infty$.

1. Retrouver par comparaison la limite en $+\infty$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{3x+2}$.

2. Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes par comparaison.

2. a. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

2. b. $g(x) = x^5 + 10x + 3$.

Exercice 10 Utiliser le théorème des gendarmes

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$1 \leqslant 1 + \frac{1}{x} \leqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2.$$

2. En déduire un encadrement de $f(x)$.

3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 11 Comparer avec la partie entière

Rappel – partie entière

Pour tout réel x :

$$\boxed{\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1}.$$

Ainsi :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

On note $E(x) = \lfloor x \rfloor$.

1. Comparer les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x \qquad \text{et} \qquad g(x) = E(x).$$

2. En déduire les limites de g en $+\infty$ puis en $-\infty$.

Thème III Fonction exponentielle et croissances comparées

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- **Limites usuelles.**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{\,x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\,x} = 0 \end{cases}$$

- **Conséquence du nombre dérivé en 0.**

À savoir redémontrer.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{e}^{\,x} - 1}{x} = 1$$

- **Croissances comparées.**

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{x^n} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^n\, \mathrm{e}^{\,x} = 0 \end{cases}$$

Exercice 12 Combiner composition et croissance comparée

On ne peut utiliser que les limites du rappel ci-dessus.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,2x}}{x}.$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.

2. a. Vérifier que, pour tout réel $x \neq 0$,

$$g(x) = 2\frac{\mathrm{e}^{\,2x}}{2x}.$$

2. b. En déduire la limite de g en $+\infty$ en utilisant une composition.

3. Sur le même modèle, déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

3. a. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{5x}$;

3. b. $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-5x}}{x}$;

3. c. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$;

3. d. $k(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+1}}{x}$.

Exercice 13 Utiliser directement les croissances comparées

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{\,x} + x - 1, \qquad g(x) = \mathrm{e}^{\,-x} + x^2 - x, \qquad h(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,x} - x^{10}}{\mathrm{e}^{\,x} - x^{100}}.$$

1. Étudier les limites de f.

2. Étudier les limites de g.

3. Étudier les limites de h.

Exercice 14 Transformer avant d'utiliser une croissance comparée

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions

$$f(x) = \frac{1 - 3\,\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,2x}}{\mathrm{e}^{\,x} + 1} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,x}\,(x - \mathrm{e}^{\,-x})}{1 - x + \mathrm{e}^{\,x}}.$$

1. Étudier les limites de f.

2. Étudier les limites de g.

Exercice 15 Avec un paramètre : discuter selon les valeurs de k

Soit k un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\}$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,-kx}}{k - x}.$$

1. Étudier, selon les valeurs de k, les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Étudier les limites de f en k^- et en k^+.

Thème IV Extraits du Bac

Exercice 16 [BAC] D'après Bac 2020 Polynésie – fonction exponentielle et croissance comparée

Source bac : Bac S 2020 – Polynésie – 2 septembre 2020.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{\,-x^2+1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. 1. a. Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\,x^2}}.$$

1. b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2. Pour tout réel x, on considère les points M et N de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives x et $-x$.

2. a. Montrer que le point O est le milieu du segment $[MN]$.

2. b. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 17 [BAC] D'après Bac 2018 Nouvelle-Calédonie – exponentielle, encadrement et variations

Source bac : Bac S 2018 – Nouvelle-Calédonie – février 2018.

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. 1. a. Étudier les variations de la fonction g.

1. b. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que $\alpha \in [-1\ ;\ 0]$. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B – Étude de la fonction principale

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right)\,\mathrm{e}^{\,-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

2. 2. a. Démontrer que, pour tout $x > 1$,

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

2. b. En déduire que, pour $x > 1$,

$$0 < f(x) < 4x^3\,\mathrm{e}^{\,-2x+1}.$$

2. c. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x\to+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{\,-x} = 0.$$

Vérifier que, pour tout réel x,

$$4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1} = \frac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\,\mathrm{e}^{-2x},$$

puis montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1} = 0.$$

2. d. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

3. Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 [BAC] D'après Bac 2026 Métropole J2 – croissance comparée et étude d'une fonction

Source bac : Bac Terminale Spécialité Mathématiques 2026 – Métropole, La Réunion, Mayotte – sujet 2, exercice 4. Questions 1 et 2 de la partie consacrée à l'étude de la fonction.

Dans le cadre de la construction d'un logo, on considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+3}.$$

1. 1. a. Vérifier que, pour tout réel $x \in [0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{\,2} \times \frac{2x-1}{\mathrm{e}^{\,2x-1}}.$$

1. b. En déduire la limite de f en $+\infty$. On pourra poser $X = 2x-1$.

2. 2. a. Montrer que, pour tout réel $x \in [0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = (-4x+4)\,\mathrm{e}^{-2x+3}.$$

2. b. Construire le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 19 [BAC] D'après Bac 2025 Amérique du Nord J1 – une partie presque complète

Source bac : Bac Terminale Spécialité Mathématiques 2025 – Amérique du Nord – sujet 1, exercice 4, partie C. La dernière question sur les primitives et les aires n'est pas reprise ici.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

On admet par ailleurs que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

2. a. Vérifier que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(-x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

2. b. Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$, puis en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Fin du TD