MATH93

Terminale Spécialité Mathématiques

Recueil d'exercices – Entraînement – Méthodes

TD – EXERCICES

TD 6

Limites de fonctions

Sommaire du TD

I Limites usuelles, asymptotes et formes indéterminées 2

II Composition, comparaison et encadrement 14

III Fonction exponentielle et croissances comparées 17

IV Extraits du Bac 25

Thème I Limites usuelles, asymptotes et formes indéterminées

Rappel – asymptotes

- Si $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $\boxed{x = a}$ est une asymptote verticale à la courbe de f.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, alors la droite d'équation $\boxed{y = \ell}$ est une asymptote horizontale à la courbe de f.

Exercice 1 Lire des asymptotes dans un tableau de variations

On donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{5\}$. Déterminer les équations des asymptotes.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
Variations de f	3	↘	0	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	10

Corrigé

D'après le tableau :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3, \qquad \lim_{\substack{x\to5\\x<5}} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to5\\x>5}} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 10.$$

Ainsi, la courbe de f admet :

- une asymptote horizontale d'équation $\boxed{y = 3}$ en $-\infty$;
- une asymptote verticale d'équation $\boxed{x = 5}$;
- une asymptote horizontale d'équation $\boxed{y = 10}$ en $+\infty$.

Exercice 2 Calculer des limites classiques et déterminer les asymptotes

Dans cet exercice, on précisera les éventuelles asymptotes aux courbes représentatives.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{5\}$ par

$$f(x) = \frac{6-x}{x-5}.$$

Étudier les limites de f en 5 à gauche et à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Corrigé

Au voisinage de 5, le numérateur tend vers $1 > 0$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5} (6-x) = 1 > 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 5 \\ x<5}} (x-5) = 0^- \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 5 \\ x<5}} f(x) = -\infty}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5} (6-x) = 1 > 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 5 \\ x>5}} (x-5) = 0^+ \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 5 \\ x>5}} f(x) = +\infty}$$

Donc $\boxed{x=5}$ est une asymptote verticale.
Pour $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{-1+\dfrac{6}{x}}{1-\dfrac{5}{x}}.$$

Ainsi, aussi bien en $+\infty$ qu'en $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(-1+\dfrac{6}{x}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1-\dfrac{5}{x}\right) = 1 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -1}$$

Donc $\boxed{y=-1}$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Soit g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par

$$g(x) = x^2 - x + \frac{1}{x-1}.$$

Étudier les limites de g en 1 à gauche et à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Corrigé

On a $\lim\limits_{x\to 1} (x^2-x) = 0$.

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} (x-1) = 0^- \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \frac{1}{x-1} = -\infty.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} g(x) = -\infty}.$$

De même :

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} (x-1) = 0^+ \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} \frac{1}{x-1} = +\infty,$$

d'où

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1 \\ x>1}} g(x) = +\infty}.$$

Ainsi, $\boxed{x=1}$ est une asymptote verticale.
Pour les limites à l'infini :

$$x^2 - x = x^2\left(1-\frac{1}{x}\right).$$

Alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 1 > 0 \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\pm\infty} (x^2-x) = +\infty.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}.$$

Il n'y a pas d'asymptote horizontale.

3. Soit h définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par

$$h(x) = \frac{2x+1}{(x-1)^2}.$$

Étudier les limites de h en 1 à gauche et à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Corrigé

Au voisinage de 1 :

$$\lim_{x\to1} (2x+1) = 3 > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to1} (x-1)^2 = 0^+.$$

Le numérateur tend vers $3>0$ et le dénominateur vers 0 par valeurs strictement positives, à gauche comme à droite.
Le théorème sur les limites d'un quotient donne donc :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} h(x) = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} h(x) = +\infty}.$$

La droite $\boxed{x=1}$ est donc une asymptote verticale.
Pour $x\neq0$:

$$h(x) = \frac{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2} = \frac{2+\dfrac{1}{x}}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2}.$$

En $+\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2+\dfrac{1}{x}\right) = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2 = +\infty \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0}.$$

En $-\infty$, le dénominateur tend vers $-\infty$, donc de même :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0}.$$

La droite $\boxed{y=0}$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. Soit k définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\ ;\ 2\}$ par

$$k(x) = \frac{x-2}{x^2-3x+2}.$$

Étudier les limites de k en 1 à gauche et à droite, en $+\infty$ et en $-\infty$.

Corrigé

On factorise le dénominateur :

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2).$$

Ainsi, pour tout $x\in D_k$:

$$k(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1}.$$

On en déduit :

$$\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} (x-1) = 0^- \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} k(x) = -\infty},$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x-1) = 0^+ \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} k(x) = +\infty}.$$

Donc $\boxed{x=1}$ est une asymptote verticale.
Enfin :

$$\lim_{x\to\pm\infty} (x-1) = \pm\infty \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = 0}.$$

La droite $\boxed{y=0}$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.
Remarque : en $x=2$, l'expression initiale n'est pas définie mais, après simplification,

$$\lim_{x\to 2} k(x) = 1.$$

Il ne s'agit donc pas d'une asymptote verticale en 2.

Exercice 3 Lever une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ par factorisation

Méthode

Quand une fraction rationnelle conduit à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en a, on cherche à factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$, puis on simplifie avant de reprendre le calcul de la limite.

1. Soit f définie sur D_f par

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}.$$

1. a. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.

Corrigé

Le dénominateur s'annule lorsque

$$x^2-3x+2=0.$$

Or :

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2).$$

Ainsi :

$$\boxed{D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\ ;\ 2\}.}$$

1. b. Étudier la limite de f en 1.

Aide

Factoriser x^2-3x+2 puis simplifier l'expression de f.

Corrigé

Avec l'expression initiale :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1} & (x-1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1} & (x^2-3x+2)=0 \end{cases}$$

on obtient la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.
Pour tout $x \in D_f$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{1}{x-2}. \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{1-2} = -1.}$$

1. c. Étudier les limites de f aux autres bornes de son ensemble de définition.

Corrigé

Pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty}\ (x-2)=+\infty \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty}\ f(x)=0},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\ (x-2)=-\infty \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to-\infty}\ f(x)=0}.$$

Donc $\boxed{y=0}$ est une asymptote horizontale aux deux infinis.
Au voisinage de 2 :

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\ (x-2)=0^- \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\ f(x)=-\infty},$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\ (x-2)=0^+ \underset{\text{par inverse}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\ f(x)=+\infty}.$$

Donc $\boxed{x=2}$ est une asymptote verticale.

2. Soit g définie sur D_g par

$$g(x)=\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}.$$

2. a. Déterminer D_g, l'ensemble de définition de g.

Corrigé

On factorise le dénominateur :

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5).$$

Il s'annule pour $x=3$ et $x=5$. Ainsi :

$$\boxed{D_g=\mathbb{R}\setminus\{3\ ;\ 5\}.}$$

2. b. Étudier la limite de g en 3.

Aide

Factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier l'expression de g.

Corrigé

Avec l'expression initiale, le numérateur et le dénominateur tendent vers 0 : on obtient la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.
On factorise :

$$x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$$

et

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5).$$

Ainsi, pour tout $x\in D_g$:

$$\begin{aligned}g(x)&=\frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-5)}\\&=\frac{x-4}{x-5}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to3}\ g(x)=\frac{3-4}{3-5}=\frac{1}{2}.}$$

2. c. Étudier les limites de g aux autres bornes de son ensemble de définition.

Corrigé

Pour tout $x \in D_g$:

$$g(x) = \frac{x-4}{x-5}.$$

Pour $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{1-\dfrac{4}{x}}{1-\dfrac{5}{x}}.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1-\dfrac{4}{x}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1-\dfrac{5}{x}\right) = 1 \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 1}.$$

La droite $\boxed{y=1}$ est une asymptote horizontale aux deux infinis.
Au voisinage de 5, le numérateur tend vers $1 > 0$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5} (x-4) = 1 > 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 5 \\ x<5}} (x-5) = 0^- \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{\substack{x\to 5 \\ x<5}} g(x) = -\infty},$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5} (x-4) = 1 > 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 5 \\ x>5}} (x-5) = 0^+ \end{cases} \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{\substack{x\to 5 \\ x>5}} g(x) = +\infty}.$$

Donc $\boxed{x=5}$ est une asymptote verticale.

Exercice 4 Lever une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en transformant l'expression

Méthode

On cherche une transformation adaptée : factorisation remarquable, identité algébrique ou quantité conjuguée. L'objectif est de faire apparaître puis de simplifier le facteur responsable de la forme $\frac{0}{0}$.

1. 1. a. Montrer que, pour tout réel $x \neq 1$,

$$1 + x + x^2 + x^3 = \frac{x^4 - 1}{x - 1}.$$

Corrigé

On développe :

$$\begin{aligned}(x-1)(1+x+x^2+x^3) &= x + x^2 + x^3 + x^4 - (1 + x + x^2 + x^3) \\ &= x^4 - 1.\end{aligned}$$

Pour $x \neq 1$, on peut diviser par $x - 1$:

$$\boxed{1 + x + x^2 + x^3 = \frac{x^4 - 1}{x - 1}.}$$

1. b. Déterminer

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

Corrigé

L'expression conduit à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.
Or :

$$x^4 - 1 = (x-1)(1+x+x^2+x^3)$$

et

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$$

Pour $x \neq 1$ et $x \neq 2$:

$$\frac{x^4-1}{x^2-3x+2} = \frac{1+x+x^2+x^3}{x-2}.$$

Par conséquent :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x^2-3x+2} = \frac{1+1+1+1}{1-2}$$
$$\boxed{= -4}$$

2. Déterminer

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4}.$$

Corrigé

L'expression conduit à la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.
On écrit :

$$x - 2\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-2)$$

et

$$x - 4 = (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2).$$

Ainsi, pour $x \neq 4$ et $x \geqslant 0$:

$$\frac{x-2\sqrt{x}}{x-4} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 4} \frac{x-2\sqrt{x}}{x-4} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}.}$$

Exercice 5 Reconnaître un nombre dérivé

Méthode

Lorsque x tend vers a et qu'une expression contient $f(x)-f(a)$ et $x-a$, penser au taux d'accroissement :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\ \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, et soit a un réel. On suppose que $g'(a)\neq 0$.

1. Déterminer

$$\lim_{x\to a}\ \frac{xf(a)-af(x)}{x-a}.$$

Aide

Poser $h(x)=xf(a)-af(x)$ et calculer $h(a)$.

Corrigé

Posons

$$h(x)=xf(a)-af(x).$$

Alors :

$$h(a)=af(a)-af(a)=0.$$

Par conséquent :

$$\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=\frac{h(x)-h(a)}{x-a}.$$

Comme h est dérivable en a :

$$\lim_{x\to a}\ \frac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(a).$$

Or :

$$h'(x)=f(a)-af'(x),$$

donc

$$h'(a)=f(a)-af'(a).$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to a}\ \frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a).}$$

2. Déterminer

$$\lim_{x\to a}\ \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}.$$

Corrigé

Domaine de définition au voisinage de a. La fonction g est dérivable en a et $g'(a)\neq 0$. Par définition du nombre dérivé :

$$\lim_{x\to a}\ \frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)\neq 0.$$

Il existe donc $\delta>0$ tel que, pour $0<|x-a|<\delta$,

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\neq 0.$$

Comme $x\neq a$, il en résulte $g(x)-g(a)\neq 0$: le quotient étudié est bien défini au voisinage épointé de a.

Calcul de la limite. Pour $0 < |x-a| < \delta$, on peut écrire :

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}.$$

D'après la dérivabilité de f et de g en a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \\ \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a) \neq 0 \end{cases}$$

Le dénominateur admet une limite réelle non nulle. Le théorème sur la limite d'un quotient donne donc :

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.}$$

Exercice 6 Lever une indétermination avec la quantité conjuguée

Méthode

Lorsqu'une expression contient une racine carrée et conduit à une forme indéterminée, penser à multiplier par la quantité conjuguée afin de faire apparaître une identité remarquable.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+5}.$$

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Corrigé

On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+5} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}.$$

1. b. Montrer que, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}.$$

Corrigé

On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2+5} &= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+5}\right)\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)}{\sqrt{x^2+5}-x} \\ &= \frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}-x} \\ &\boxed{= \frac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}} \end{aligned}$$

1. c. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Corrigé

On utilise l'expression obtenue précédemment :

$$f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2+5}-x}.$$

Quand $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2+5) = +\infty \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+5} = +\infty.$$

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$. Par somme :

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+5}-x\right) = +\infty.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.}$$

2. Soit f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(h) = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h}.$$

Démontrer que

$$\lim_{h\to0^+} f(h) = \frac{1}{4}.$$

Corrigé

Avec l'expression initiale, on obtient la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.
On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned} f(h) &= \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \times \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2} \\ &= \frac{4+h-4}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{h\to0^+} f(h) = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}.}$$

Exercice 7 Traiter une valeur absolue

Méthode

Pour calculer une limite contenant $|x|$, distinguer les zones où x est positif ou négatif :

$$|x| = x \text{ si } x \geqslant 0, \qquad |x| = -x \text{ si } x < 0.$$

Soit f définie sur son ensemble de définition par

$$f(x) = \frac{3x + |x|}{7x - 5|x|}.$$

Déterminer :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; **3.** $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$; **4.** $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$; **5.** $\lim\limits_{x\to0} f(x)$.

Corrigé

Pour $x > 0$, on a $|x| = x$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x + x}{7x - 5x} \\ &= \frac{4x}{2x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = 2}.$$

Pour $x < 0$, on a $|x| = -x$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3x - x}{7x + 5x} \\ &= \frac{2x}{12x} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{1}{6}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{1}{6}}.$$

Comme

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \frac{1}{6} \neq 2 = \lim_{x\to0^+} f(x),$$

la fonction f n'admet pas de limite en 0 :

$$\boxed{\lim_{x\to0} f(x) \text{ n'existe pas.}}$$

Thème II Composition, comparaison et encadrement

Exercice 8 Utiliser une composition de limites

Rappel – fonction exponentielle

$$\boxed{\lim_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty}.$$

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{3x+2}$ en utilisant une composition.

Corrigé

On pose $X = 3x + 2$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (3x+2) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x+2} = +\infty}.$$

2. Calculer de la même façon les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

2. a. $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x-1}$;

Corrigé

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^{X} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x-1} = +\infty}.$$

2. b. $x \longmapsto \dfrac{5}{\mathrm{e}^{5x-3}}$;

Corrigé

On écrit :

$$\frac{5}{\mathrm{e}^{5x-3}} = 5\,\mathrm{e}^{-5x+3}.$$

Puis :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (-5x+3) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-5x+3} = 0.$$

Par produit par 5 :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\mathrm{e}^{5x-3}} = 0}.$$

2. c. $x \longmapsto \mathrm{e}^{-4x-1}$.

Corrigé

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (-4x-1) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-4x-1} = 0}.$$

Exercice 9 Utiliser un théorème de comparaison

Méthode

Pour montrer qu'une fonction tend vers $+\infty$, on peut la minorer par une fonction qui tend vers $+\infty$. Pour montrer qu'elle tend vers $-\infty$, on peut la majorer par une fonction qui tend vers $-\infty$.

1. Retrouver par comparaison la limite en $+\infty$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{3x+2}$.

Corrigé

Rappel du théorème de comparaison. Si $u(x) \leqslant v(x)$ pour tout x suffisamment grand et si $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$.

Vérification des hypothèses.

- Pour tout $x > 0$, on a $3x + 2 > x$. Comme l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{3x+2} > \mathrm{e}^{x}.$$

- Par la limite usuelle de la fonction exponentielle :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty.$$

Application. D'après le théorème de comparaison :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x+2} = +\infty}.$$

2. Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes par comparaison.

2. a. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

Corrigé

Pour tout $x \geqslant 0$:

$$x^2 + 1 \geqslant x^2.$$

La fonction racine carrée étant croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\sqrt{x^2+1} \geqslant \sqrt{x^2} = x.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty}.$$

2. b. $g(x) = x^5 + 10x + 3$.

Corrigé

Pour tout $x \geqslant 0$:

$$x^5 + 10x + 3 \geqslant x^5.$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} x^5 = +\infty.$$

Par comparaison :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} (x^5 + 10x + 3) = +\infty}.$$

Exercice 10 Utiliser le théorème des gendarmes

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \sqrt{1+\frac{1}{x}}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$1 \leqslant 1+\frac{1}{x} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^2.$$

Corrigé

Pour $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x} > 0$, donc :

$$1 \leqslant 1+\frac{1}{x}.$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 - \left(1+\frac{1}{x}\right) &= \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} \\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{1 \leqslant 1+\frac{1}{x} \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^2.}$$

2. En déduire un encadrement de $f(x)$.

Corrigé

Tous les termes étant positifs, on peut appliquer la fonction racine carrée, croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$1 \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{x}} \leqslant 1+\frac{1}{x}.$$

Donc :

$$\boxed{1 \leqslant f(x) \leqslant 1+\frac{1}{x}.}$$

3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Corrigé

Rappel du théorème des gendarmes. Si, au voisinage de $+\infty$, trois fonctions u, f et v vérifient $u(x) \leqslant f(x) \leqslant v(x)$ et si u et v ont une même limite réelle ℓ en $+\infty$, alors f admet également la limite ℓ en $+\infty$.
Vérification des hypothèses.

- Les trois fonctions sont définies au voisinage de $+\infty$: ici, pour tout $x > 0$.
- Pour tout $x > 0$, la question précédente a établi :

$$1 \leqslant f(x) \leqslant 1+\frac{1}{x}.$$

- Les deux fonctions qui encadrent f ont la même limite :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} & 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} & \left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1.\end{cases}$$

Application. Toutes les hypothèses du théorème des gendarmes sont vérifiées. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.}$$

Exercice 11 Comparer avec la partie entière

Rappel – partie entière

Pour tout réel x :

$$\boxed{\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1}.$$

Ainsi :

$$x - 1 < \lfloor x\rfloor \leqslant x.$$

On note $E(x) = \lfloor x\rfloor$.

1. Comparer les fonctions f et g définies par

$$f(x) = x \qquad \text{et} \qquad g(x) = E(x).$$

Corrigé

Par définition de la partie entière :

$$E(x) \leqslant x < E(x) + 1.$$

La seconde inégalité donne :

$$x - 1 < E(x).$$

Ainsi, pour tout réel x :

$$\boxed{x - 1 < E(x) \leqslant x.}$$

2. En déduire les limites de g en $+\infty$ puis en $-\infty$.

Corrigé

En $+\infty$:

$$x - 1 < E(x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} (x-1) = +\infty.$$

Par comparaison :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} E(x) = +\infty}.$$

En $-\infty$:

$$E(x) \leqslant x \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$

Par comparaison :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} E(x) = -\infty}.$$

Thème III Fonction exponentielle et croissances comparées

Propriété 1 (Limites liées à la fonction exponentielle)

- **Limites usuelles.**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\,x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\,x} = 0 \end{cases}$$

- **Conséquence du nombre dérivé en 0.**

À savoir redémontrer.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\,x}-1}{x} = 1$$

- **Croissances comparées.**

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\,x}}{x^n} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,\mathrm{e}^{\,x} = 0 \end{cases}$$

Exercice 12 Combiner composition et croissance comparée

On ne peut utiliser que les limites du rappel ci-dessus.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,2x}}{x}.$$

1. Déterminer la limite de g en $-\infty$.

Corrigé

On a :

$$\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\,2x} = 0.$$

De plus :

$$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$$

Par quotient :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,2x}}{x} = 0.}$$

2. a. Vérifier que, pour tout réel $x \neq 0$,

$$g(x) = 2\frac{\mathrm{e}^{\,2x}}{2x}.$$

Corrigé

Pour tout $x \neq 0$:

$$2\frac{\mathrm{e}^{\,2x}}{2x} = \frac{\mathrm{e}^{\,2x}}{x} = g(x).$$

Donc :

$$\boxed{g(x) = 2\frac{\mathrm{e}^{\,2x}}{2x}.}$$

2. b. En déduire la limite de g en $+\infty$ en utilisant une composition.

Corrigé

On pose $X = 2x$. Alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\,X}}{X} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,2x}}{2x} = +\infty.$$

Comme $g(x) = 2\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2x}$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

3. Sur le même modèle, déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ des fonctions suivantes :

3. a. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{4x}}{5x}$;

Corrigé

En $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} 4x = -\infty \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{4x} = 0,$$

et $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x = -\infty$. Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.}$$

En $+\infty$, on écrit :

$$f(x) = \frac{4}{5}\frac{\mathrm{e}^{4x}}{4x}.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 4x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{4x}}{4x} = +\infty.$$

Comme $\dfrac{4}{5} > 0$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

3. b. $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-5x}}{x}$;

Corrigé

En $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} (-5x) = -\infty \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-5x} = 0.$$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$

En $-\infty$, on écrit :

$$g(x) = -5\frac{\mathrm{e}^{-5x}}{-5x}.$$

On effectue le changement de variable $X = -5x$. On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (-5x) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{-5x}}{-5x} = +\infty.$$

Comme $-5 < 0$, la multiplication par cette constante négative donne :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty.}$$

3. c. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}$;

Corrigé

Pour $x \neq 0$:

$$h(x) = x\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}.$$

On effectue le changement de variable $X = x^2$. D'après les limites usuelles et les croissances comparées :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x^2} = +\infty.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty}.$$

3. d. $k(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+1}}{x}$.

Corrigé

On utilise :

$$\mathrm{e}^{x^2+1} = \mathrm{e}\ \mathrm{e}^{x^2}.$$

Ainsi :

$$k(x) = \mathrm{e}\ \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}.$$

Comme $\mathrm{e} > 0$ et d'après la question précédente :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} k(x) = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} k(x) = -\infty}.$$

Exercice 13 Utiliser directement les croissances comparées

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x} + x - 1, \qquad g(x) = \mathrm{e}^{-x} + x^2 - x, \qquad h(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - x^{10}}{\mathrm{e}^{x} - x^{100}}.$$

1. Étudier les limites de f.

Corrigé

En $+\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{x} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{x} = +\infty.$$

De plus, $x - 1 \to +\infty$. Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

En $-\infty$, on effectue le changement de variable $X = -x$. On écrit :

$$x^2\,\mathrm{e}^{x} = X^2\,\mathrm{e}^{-X} = \frac{X^2}{\mathrm{e}^{X}}.$$

D'après les croissances comparées :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X^2}{\mathrm{e}^X} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^x = 0}.$$

Or $x - 1 \to -\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$$

2. Étudier les limites de g.

Corrigé

En $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$$

et

$$x^2 - x = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right) \longrightarrow +\infty.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

En $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} (-x) = +\infty \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty.$$

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 - x) = +\infty$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.}$$

3. Étudier les limites de h.

Corrigé

En $+\infty$, comme $\mathrm{e}^x > 0$, on divise le numérateur et le dénominateur par e^x :

$$h(x) = \frac{1 - \dfrac{x^{10}}{\mathrm{e}^x}}{1 - \dfrac{x^{100}}{\mathrm{e}^x}}$$

pour tout x appartenant au domaine de définition de h. D'après les croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{10}}{\mathrm{e}^x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{100}}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x) = 1.}$$

En $-\infty$, on divise par x^{100} :

$$h(x) = \frac{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^{100}} - \dfrac{1}{x^{90}}}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^{100}} - 1}.$$

Or :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^{100}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^{90}} = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} h(x) = 0.}$$

Exercice 14 Transformer avant d'utiliser une croissance comparée

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions

$$f(x) = \frac{1 - 3\,\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,2x}}{\mathrm{e}^{\,x} + 1} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,x}\,(x - \mathrm{e}^{\,-x})}{1 - x + \mathrm{e}^{\,x}}.$$

1. Étudier les limites de f.

Corrigé

En $-\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\,x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\,2x} = 0.$$

Par quotient :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1.}$$

En $+\infty$, on divise numérateur et dénominateur par $\mathrm{e}^{\,x}$:

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,-x} - 3 + \mathrm{e}^{\,x}}{1 + \mathrm{e}^{\,-x}}.$$

Or :

$$\lim_{x \to +\infty} (\mathrm{e}^{\,-x} - 3 + \mathrm{e}^{\,x}) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to +\infty} (1 + \mathrm{e}^{\,-x}) = 1 > 0.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

2. Étudier les limites de g.

Corrigé

On simplifie d'abord le numérateur :

$$\mathrm{e}^{\,x}\left(x - \mathrm{e}^{\,-x}\right) = x\,\mathrm{e}^{\,x} - 1.$$

En $-\infty$, on effectue le changement de variable $X = -x$. On écrit :

$$x\,\mathrm{e}^{\,x} = -X\,\mathrm{e}^{\,-X} = -\frac{X}{\mathrm{e}^{\,X}}.$$

Par croissance comparée et composition :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{\mathrm{e}^{\,X}} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^{\,x} = 0}.$$

Ainsi, le numérateur tend vers -1. De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} (1 - x + \mathrm{e}^{\,x}) = +\infty.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0.}$$

En $+\infty$, on divise numérateur et dénominateur par $\mathrm{e}^{\,x}$:

$$g(x) = \frac{x - \mathrm{e}^{\,-x}}{\mathrm{e}^{\,-x} - x\,\mathrm{e}^{\,-x} + 1}.$$

Or :

$$\lim_{x \to +\infty} (x - \mathrm{e}^{\,-x}) = +\infty.$$

D'après les croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x} = 0,$$

et $\mathrm{e}^{-x} \to 0$. Ainsi :

$$\lim_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x} + 1) = 1 > 0.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.}$$

Exercice 15 Avec un paramètre : discuter selon les valeurs de k

Soit k un réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{k\}$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-kx}}{k-x}.$$

1. Étudier, selon les valeurs de k, les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Corrigé

Limite en $+\infty$.

- **Si $k > 0$.** On a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (-kx) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^{X} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-kx} = 0^+.$$

  De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} (k-x) = -\infty$. Par quotient,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

- **Si $k = 0$.** Pour $x \neq 0$, $f(x) = -\dfrac{1}{x}$. Donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

- **Si $k < 0$.** Posons $a = -k > 0$. Pour $x \neq -a$,

$$f(x) = -\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a+x} = -\frac{1}{\dfrac{a}{\mathrm{e}^{ax}} + \dfrac{x}{\mathrm{e}^{ax}}}.$$

  La première expression présente une forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$ lorsque $x \to +\infty$.

  – Puisque $a > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{ax} = +\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a}{\mathrm{e}^{ax}} = 0.$$

  – **Application des croissances comparées.** On effectue le changement de variable $X = ax$. Comme $a > 0$, on a :

$$\begin{cases} X = ax \\ \lim\limits_{x\to+\infty} X = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{\mathrm{e}^{X}} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{\mathrm{e}^{ax}} = 0.$$

  Or, pour tout réel x,

$$\frac{x}{\mathrm{e}^{ax}} = \frac{1}{a}\,\frac{ax}{\mathrm{e}^{ax}}.$$

  Comme $\dfrac{1}{a}$ est une constante strictement positive, par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{ax}} = 0.}$$

Par somme, $\dfrac{a}{\mathrm{e}^{\,ax}} + \dfrac{x}{\mathrm{e}^{\,ax}} \to 0^+$: pour $x > 0$, les deux termes sont strictement positifs. Par quotient,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \; f(x) = -\infty.}$$

Limite en $-\infty$.

- **Si $k > 0$.** Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \; (-kx) = +\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} \; \mathrm{e}^{\,-kx} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \; (k-x) = +\infty.$$

Il s'agit donc d'une forme indéterminée. Pour $x \neq k$, écrivons

$$f(x) = \frac{1}{\dfrac{k}{\mathrm{e}^{\,-kx}} + \dfrac{-x}{\mathrm{e}^{\,-kx}}}.$$

  - Par quotient, puisque k est constant et $\mathrm{e}^{\,-kx} \to +\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty} \; \frac{k}{\mathrm{e}^{\,-kx}} = 0.$$

  - **Application des croissances comparées.** On effectue le changement de variable $X = -kx$. Puisque $k > 0$ et que $x \to -\infty$, on a :

$$\begin{cases} X = -kx \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \; X = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \; \dfrac{X}{\mathrm{e}^{\,X}} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \; \frac{-kx}{\mathrm{e}^{\,-kx}} = 0.$$

Or, pour tout réel x,

$$\frac{-x}{\mathrm{e}^{\,-kx}} = \frac{1}{k}\,\frac{-kx}{\mathrm{e}^{\,-kx}}.$$

Comme $\dfrac{1}{k}$ est une constante strictement positive, par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \; \frac{-x}{\mathrm{e}^{\,-kx}} = 0.}$$

Par somme, le dénominateur de la dernière expression de $f(x)$ tend vers 0^+ : pour $x < 0$, ses deux termes sont strictement positifs puisque $k > 0$. Par quotient,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \; f(x) = +\infty.}$$

- **Si $k = 0$.** Pour $x \neq 0$, $f(x) = -\dfrac{1}{x}$, donc

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \; f(x) = 0.}$$

- **Si $k < 0$.** On a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \; (-kx) = -\infty \\ \lim\limits_{X\to-\infty} \; \mathrm{e}^{\,X} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \; \mathrm{e}^{\,-kx} = 0^+.$$

De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} \; (k-x) = +\infty$. Par quotient,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \; f(x) = 0.}$$

Bilan.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \; f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geqslant 0, \\ -\infty & \text{si } k < 0, \end{cases}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \; f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } k > 0, \\ 0 & \text{si } k \leqslant 0. \end{cases}}$$

2. Étudier les limites de f en k^- et en k^+.

Corrigé

La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$. Par composition,

$$\lim_{x\to k} \ \mathrm{e}^{-kx} = \mathrm{e}^{-k^2} > 0.$$

- **À gauche de k.** Lorsque $x \to k^-$, on a $k - x \to 0^+$. Ainsi,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to k} \ \mathrm{e}^{-kx} = \mathrm{e}^{-k^2} > 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to k \\ x<k}} \ (k-x) = 0^+ \end{cases} \quad \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\lim_{\substack{x\to k \\ x<k}} \ f(x) = +\infty.}$$

- **À droite de k.** Lorsque $x \to k^+$, on a $k - x \to 0^-$. Ainsi,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to k} \ \mathrm{e}^{-kx} = \mathrm{e}^{-k^2} > 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to k \\ x>k}} \ (k-x) = 0^- \end{cases} \quad \underset{\text{par quotient}}{\Longrightarrow} \quad \boxed{\lim_{\substack{x\to k \\ x>k}} \ f(x) = -\infty.}$$

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $\boxed{x = k}$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

Thème IV Extraits du Bac

Exercice 16 [BAC] D'après Bac 2020 Polynésie – fonction exponentielle et croissance comparée

Source bac : Bac S 2020 – Polynésie – 2 septembre 2020.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{\,-x^2+1}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.

1. 1. a. Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$,

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\,x^2}}.$$

Corrigé

Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x\,\mathrm{e}^{\,-x^2+1} \\ &= x\,\mathrm{e}\ \ \mathrm{e}^{\,-x^2} \\ &= \mathrm{e}\ \frac{x}{\mathrm{e}^{\,x^2}} \\ &= \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\,x^2}}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\,x^2}} \quad \text{pour } x \neq 0.}$$

1. b. En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Corrigé

On utilise l'écriture précédente :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}}{x} \times \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\,x^2}}.$$

D'une part :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}}{x} = 0.}$$

D'autre part, on pose $X = x^2$. Alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{\mathrm{e}^{\,X}} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\,x^2}} = 0}.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{\,x^2}} = 0 \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}.$$

La droite d'équation

$$\boxed{y = 0}$$

est donc une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

2. Pour tout réel x, on considère les points M et N de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives x et $-x$.

2. a. Montrer que le point O est le milieu du segment $[MN]$.

Corrigé

Les coordonnées des points M et N sont :

$$M\big(x\ ;\ f(x)\big) \qquad \text{et} \qquad N\big(-x\ ;\ f(-x)\big).$$

Or :

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)\,\mathrm{e}^{\,-(-x)^2+1} \\ &= -x\,\mathrm{e}^{\,-x^2+1} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Le milieu du segment $[MN]$ a donc pour coordonnées :

$$\left(\frac{x+(-x)}{2}\ ;\ \frac{f(x)+f(-x)}{2}\right) = (0\ ;\ 0)\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{O \text{ est le milieu du segment } [MN].}$$

2. b. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_f$?

Corrigé

Pour tout réel x, les points de la courbe d'abscisses x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'origine.
On en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet le point } O \text{ comme centre de symétrie.}}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Corrigé

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1\times\,\mathrm{e}^{\,-x^2+1} + x\times(-2x)\,\mathrm{e}^{\,-x^2+1} \\ &= \left(1-2x^2\right)\,\mathrm{e}^{\,-x^2+1}. \end{aligned}$$

Pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^{\,-x^2+1} > 0.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $1-2x^2$.
Sur $[0\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{aligned} 1-2x^2 = 0 &\iff x^2 = \frac{1}{2} \\ &\iff x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } 0 \leqslant x < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ f'(x) = 0 & \text{si } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

De plus :

$$f(0) = 0,$$

et

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}+1} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{e}^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}. \end{aligned}$$

Enfin, d'après la question 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Ainsi, f est croissante sur

$$\left[0\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

puis décroissante sur

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ +\infty\right[.$$

Le signe de f' et les valeurs calculées donnent le tableau de variations :

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	↗	$\sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}$	↘	0

Son maximum sur $[0\ ;\ +\infty[$ est :

$$\boxed{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{2}}.}$$

Exercice 17 [BAC] D'après Bac 2018 Nouvelle-Calédonie – exponentielle, encadrement et variations

Source bac : Bac S 2018 – Nouvelle-Calédonie – février 2018.

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. 1. a. Étudier les variations de la fonction g.

Corrigé

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{aligned} g'(x) &= -6x^2 + 2x \\ &= 2x(1-3x). \end{aligned}$$

Les deux facteurs s'annulent pour :

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = \frac{1}{3}.$$

On étudie le signe de g' :

- si $x < 0$, alors $2x < 0$ et $1 - 3x > 0$, donc $g'(x) < 0$;
- si $0 < x < \dfrac{1}{3}$, les deux facteurs sont positifs, donc $g'(x) > 0$;
- si $x > \dfrac{1}{3}$, alors $2x > 0$ et $1 - 3x < 0$, donc $g'(x) < 0$.

Ainsi, g est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$, croissante sur $[0\ ;\ \frac{1}{3}]$, puis décroissante sur $[\frac{1}{3}\ ;\ +\infty[$.
On calcule :

$$g(0) = -1$$

et

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{3}\right) &= -2 \times \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - 1 \\ &= -\frac{2}{27} + \frac{3}{27} - 1 \\ &= \frac{1}{27} - 1 \\ &= -\frac{26}{27}. \end{aligned}$$

Pour compléter le tableau, on utilise le terme dominant du polynôme :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} & (-2x^3) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} & (-2x^3) = -\infty \end{cases}$$

Ainsi, par la propriété de la limite d'un polynôme en l'infini, les deux limites de g sont celles de $-2x^3$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de g	$+\infty$	↘	-1	↗	$-\frac{26}{27}$	↘	$-\infty$

1. b. Déterminer les limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

Corrigé

On factorise par le terme dominant x^3 :

$$g(x) = x^3\left(-2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right).$$

En $+\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} & x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} & \left(-2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right) = -2 < 0 \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty}.$$

En $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} & x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} & \left(-2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right) = -2 < 0 \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty}.$$

2. On admet que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$, notée α, et que $\alpha \in [-1\ ;\ 0]$. En déduire le signe

de g sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

On sait que :

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$$

et que g est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$. De plus, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [-1\ ;\ 0]$. Ainsi :

$$\boxed{\begin{cases} g(x) > 0 & \text{si } x < \alpha, \\ g(\alpha) = 0, & \\ g(x) < 0 & \text{si } x > \alpha. \end{cases}}$$

En effet, les deux extrema locaux calculés précédemment sont négatifs :

$$g(0) = -1 < 0 \qquad \text{et} \qquad g\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{26}{27} < 0,$$

donc g reste négative après avoir franchi son unique zéro α.

Partie B – Étude de la fonction principale

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \mathrm{e}^{\,-2x+1}.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Corrigé

On factorise le polynôme par x^3 :

$$1 + x + x^2 + x^3 = x^3\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right).$$

Lorsque $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) = 1 > 0.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \left(1 + x + x^2 + x^3\right) = -\infty}.$$

Par ailleurs :

$$\lim_{x\to-\infty} (-2x+1) = +\infty \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\,-2x+1} = +\infty.$$

Le facteur exponentiel est strictement positif. Ainsi :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 + x + x^2 + x^3\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\,-2x+1} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}.$$

2. a. Démontrer que, pour tout $x > 1$,

$$1 < x < x^2 < x^3.$$

Corrigé

Soit $x > 1$. Comme $x > 0$, on peut multiplier une inégalité par x sans changer son sens.
À partir de $1 < x$:

$$x < x^2.$$

Puis, à partir de $x < x^2$:

$$x^2 < x^3.$$

Ainsi :

$$\boxed{1 < x < x^2 < x^3.}$$

2. b. En déduire que, pour $x > 1$,

$$0 < f(x) < 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

Corrigé

Pour $x > 1$, d'après la question précédente :

$$0 < 1 < x^3, \qquad 0 < x < x^3, \qquad 0 < x^2 < x^3.$$

En additionnant :

$$0 < 1 + x + x^2 + x^3 < 4x^3.$$

Or :

$$\mathrm{e}^{-2x+1} > 0.$$

On peut donc multiplier l'encadrement par ce nombre positif :

$$0 < \left(1 + x + x^2 + x^3\right)\mathrm{e}^{-2x+1} < 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{0 < f(x) < 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1}.}$$

2. c. On admet que, pour tout entier naturel n,

$$\lim_{x\to+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Vérifier que, pour tout réel x,

$$4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1} = \frac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\,\mathrm{e}^{-2x},$$

puis montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1} = 0.$$

Corrigé

On a :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\,\mathrm{e}^{-2x} &= \frac{\mathrm{e}}{2} \times 8x^3\,\mathrm{e}^{-2x}\\ &= 4\,\mathrm{e}\,x^3\,\mathrm{e}^{-2x}\\ &= 4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{4x^3\,\mathrm{e}^{-2x+1} = \frac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\,\mathrm{e}^{-2x}.}$$

On effectue le changement de variable $X = 2x$. D'après la croissance comparée admise avec $n = 3$:

$$\lim_{X\to+\infty} X^3\,\mathrm{e}^{-X} = 0.$$

Donc :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} & 2x = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} & X^3\,\mathrm{e}^{\,-X} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} \quad (2x)^3\,\mathrm{e}^{\,-2x} = 0.$$

En multipliant par la constante $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \quad 4x^3\,\mathrm{e}^{\,-2x+1} = 0.}$$

2. d. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en donner une interprétation graphique.

Corrigé

Pour tout $x > 1$:

$$0 < f(x) < 4x^3\,\mathrm{e}^{\,-2x+1}.$$

Or :

$$\lim_{x\to+\infty} \quad 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \quad 4x^3\,\mathrm{e}^{\,-2x+1} = 0.$$

D'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \quad f(x) = 0.}$$

Ainsi, la droite d'équation

$$\boxed{y = 0}$$

est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

3. Démontrer que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(-2x^3 + x^2 - 1\right)\,\mathrm{e}^{\,-2x+1}.$$

Corrigé

Posons :

$$u(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \qquad \text{et} \qquad v(x) = \mathrm{e}^{\,-2x+1}.$$

Alors :

$$u'(x) = 1 + 2x + 3x^2$$

et

$$v'(x) = -2\,\mathrm{e}^{\,-2x+1}.$$

Par la formule du produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (1 + 2x + 3x^2)\,\mathrm{e}^{\,-2x+1} - 2(1 + x + x^2 + x^3)\,\mathrm{e}^{\,-2x+1} \\ &= \left(1 + 2x + 3x^2 - 2 - 2x - 2x^2 - 2x^3\right)\mathrm{e}^{\,-2x+1} \\ &= \left(-2x^3 + x^2 - 1\right)\,\mathrm{e}^{\,-2x+1}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{f'(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{\,-2x+1}.}$$

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^{\,-2x+1} > 0.$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
D'après la partie A :

$$\begin{cases} g(x) > 0 & \text{si } x < \alpha, \\ g(\alpha) = 0, & \\ g(x) < 0 & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } x < \alpha, \\ f'(\alpha) = 0, & \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

Par conséquent :

f est croissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$.

En utilisant les limites précédentes :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

La fonction f admet donc un maximum en $x = \alpha$.
Le tableau de variations complet est donc :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

Le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est $f(\alpha)$.

Exercice 18 [BAC] D'après Bac 2026 Métropole J2 – croissance comparée et étude d'une fonction

Source bac : Bac Terminale Spécialité Mathématiques 2026 – Métropole, La Réunion, Mayotte – sujet 2, exercice 4. Questions 1 et 2 de la partie consacrée à l'étude de la fonction.

Dans le cadre de la construction d'un logo, on considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+3}.$$

1. 1. a. Vérifier que, pour tout réel $x \in [0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) = \mathrm{e}^{2} \times \frac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}}.$$

Corrigé

Pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x-1)\,\mathrm{e}^{-2x+3} \\ &= (2x-1)\,\mathrm{e}^{2-(2x-1)} \\ &= (2x-1)\,\mathrm{e}^{2}\,\mathrm{e}^{-(2x-1)} \\ &= \mathrm{e}^{2} \times \frac{2x-1}{\mathrm{e}^{2x-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{f(x) = \mathrm{e}^{\,2} \times \frac{2x-1}{\mathrm{e}^{\,2x-1}}.}$$

1. b. En déduire la limite de f en $+\infty$. On pourra poser $X = 2x - 1$.

Corrigé

Posons

$$X = 2x - 1.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$:

$$X = 2x - 1 \longrightarrow +\infty.$$

D'après les croissances comparées :

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,X}}{X} = +\infty,$$

donc, par passage à l'inverse :

$$\lim_{X \to +\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^{\,X}} = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x-1) = +\infty \\ \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{\mathrm{e}^{\,X}} = 0 \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{\mathrm{e}^{\,2x-1}} = 0.$$

Comme $\mathrm{e}^{\,2}$ est une constante :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

La droite d'équation

$$\boxed{y = 0}$$

est donc une asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

2. 2. a. Montrer que, pour tout réel $x \in [0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = (-4x+4)\,\mathrm{e}^{\,-2x+3}.$$

Corrigé

On pose

$$u(x) = 2x - 1 \qquad \text{et} \qquad v(x) = \mathrm{e}^{\,-2x+3}.$$

Alors :

$$u'(x) = 2$$

et, par dérivation d'une fonction composée :

$$v'(x) = -2\,\mathrm{e}^{\,-2x+3}.$$

Comme $f = uv$, pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 2\,\mathrm{e}^{\,-2x+3} + (2x-1)(-2)\,\mathrm{e}^{\,-2x+3} \\ &= (2 - 4x + 2)\ \mathrm{e}^{\,-2x+3} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = (-4x+4)\,\mathrm{e}^{\,-2x+3}}$$

2. b. Construire le tableau complet des variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Corrigé

Pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$\mathrm{e}^{-2x+3} > 0.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $-4x+4$.
Or :

$$-4x+4 = 0 \iff x = 1.$$

Donc :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } 0 \leqslant x < 1, \\ f'(1) = 0, & \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On calcule :

$$f(0) = -\mathrm{e}^{3} \qquad \text{et} \qquad f(1) = \mathrm{e}\,.$$

D'après la question précédente :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Ainsi, f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$, puis strictement décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$, avec un maximum égal à e atteint en $x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\mathrm{e}^{3}$	↗	e	↘	0

Exercice 19 [BAC] D'après Bac 2025 Amérique du Nord J1 – une partie presque complète

Source bac : Bac Terminale Spécialité Mathématiques 2025 – Amérique du Nord – sujet 1, exercice 4, partie C. La dernière question sur les primitives et les aires n'est pas reprise ici.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

1. Démontrer que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

On admet par ailleurs que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Corrigé

Pour tout réel $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 + 3x + 2\right) \mathrm{e}^{-x} \\ &= x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \mathrm{e}^{-x} \\ &= \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) x^2 \mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 1.$$

D'autre part, d'après les croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

2. a. Vérifier que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \left(-x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

Corrigé

On pose

$$u(x) = x^2 + 3x + 2 \qquad \text{et} \qquad v(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Alors :

$$u'(x) = 2x + 3 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}.$$

Par produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)\,\mathrm{e}^{-x} - (x^2+3x+2)\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= \left(2x + 3 - x^2 - 3x - 2\right)\mathrm{e}^{-x} \\ \boxed{f'(x) &= \left(-x^2 - x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}} \end{aligned}$$

2. b. Déterminer le signe de f' sur $\mathbb{R}$, puis en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^{-x} > 0.$$

La fonction f' est donc du signe du polynôme

$$P(x) = -x^2 - x + 1.$$

Calculons son discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 1 \\ &= 1 + 4 \\ \boxed{\Delta &= 5} \end{aligned}$$

Les deux racines sont :

$$\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

avec $\alpha < \beta$.
Comme le coefficient de x^2 est négatif, P est positif entre ses racines et négatif à l'extérieur. Ainsi :

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{sur }]-\infty\ ;\ \alpha[, \\ f'(x) > 0 & \text{sur }]\alpha\ ;\ \beta[, \\ f'(x) < 0 & \text{sur }]\beta\ ;\ +\infty[. \end{cases}$$

On sait que :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Par conséquent :

- f est décroissante sur $]-\infty\ ;\ \alpha]$;
- f est croissante sur $[\alpha\ ;\ \beta]$;
- f est décroissante sur $[\beta\ ;\ +\infty[$.

Les nombres α et β sont les racines de $x^2+x-1=0$. Pour $r\in\{\alpha,\beta\}$, on a donc $r^2=1-r$, d'où :

$$f(r)=(r^2+3r+2)\,\mathrm{e}^{\,-r}=(3+2r)\,\mathrm{e}^{\,-r}.$$

Ainsi :

$$\begin{cases} f(\alpha)=(2-\sqrt{5})\,\mathrm{e}^{\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ f(\beta)=(2+\sqrt{5})\,\mathrm{e}^{\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$$

Le tableau complet des variations est :

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(\beta)$	↘	0

3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Corrigé

Pour tout réel $x\geqslant 0$:

$$x+1>0 \qquad \text{et} \qquad x+2>0.$$

Or :

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2).$$

Ainsi :

$$x^2+3x+2>0.$$

D'autre part :

$$\mathrm{e}^{\,-x}>0.$$

Par produit :

$$\boxed{f(x)>0 \quad \text{pour tout } x\in[0\ ;\ +\infty[.}$$

Fin du TD