MATH93

Terminale Spécialité

Recueil d'exercices – Entraînement – Méthodes

TD – EXERCICES

Chapitre 8 – TD

Compléments de dérivation et convexité

Version sujet – Version imprimable

Sommaire du TD

I Tangentes et compléments de dérivation 2

II Convexité : premières lectures graphiques 4

III Convexité : étude de la dérivée seconde 5

IV Applications de la convexité : positions relatives 6

V Applications de la convexité : inégalités 7

VI Exercices du baccalauréat – annales antérieures à 2026 9

VII Devoirs à la maison – DM 12

VIII Vers le supérieur – défis facultatifs 13

Objectifs

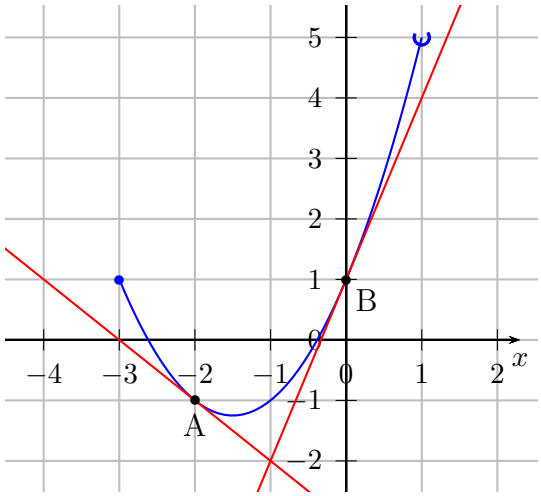
- Lire graphiquement les nombres dérivés et déterminer des tangentes.
- Maîtriser la dérivation des fonctions composées, notamment avec l'exponentielle.
- Découvrir la convexité par les graphiques, puis l'étudier avec la dérivée seconde.
- Utiliser la convexité pour établir des inégalités et résoudre des problèmes.
- S'entraîner sur des exercices de synthèse du baccalauréat, sans logarithme.
- Préparer des devoirs à la maison avec corrigés dans la version dédiée.

Thème I Tangentes et compléments de dérivation

Exercice 1 Lectures graphiques

1.1 Lecture graphique puis calculs (c)

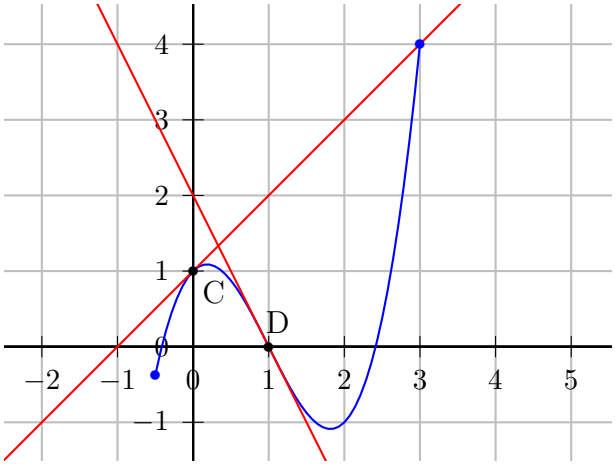
On a tracé $\mathcal{C}_f$, la courbe de f définie et dérivable sur $[-3;1[$ ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives -2 et 0.



1. Lecture du nombre dérivé :
$$f'(-2) = \cdots\cdots$$
2. Équation de T_{-2}, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(-2;-1)$:
$$y = \cdots\cdots$$
3. Lecture du nombre dérivé :
$$f'(0) = \cdots\cdots$$
4. Équation de T_0, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $B(0;1)$:
$$y = \cdots\cdots$$
5. f est en fait la fonction définie sur $[-3;1[$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Retrouver les résultats des premières questions.

1.2 Lecture graphique puis calculs (c)

On a tracé $\mathcal{C}_g$ la courbe de g définie et dérivable sur $[-0.5;3]$ ainsi que les tangentes à $\mathcal{C}_g$ aux points $C(0;g(0))$ et $D(1;g(1))$.

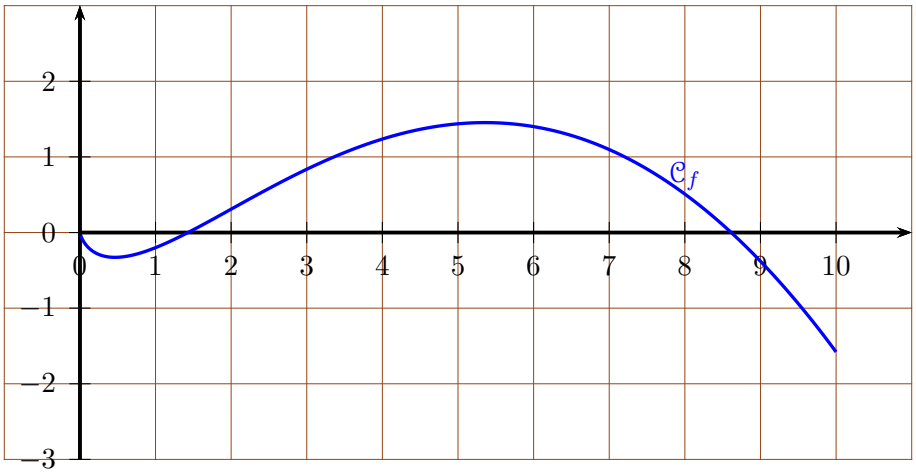


1. Lecture du nombre dérivé :
$$g'(0) = \cdots\cdots$$
2. Équation de T_0, la tangente à $\mathcal{C}_g$ en $C(0;1)$:
$$y = \cdots\cdots$$
3. Lecture du nombre dérivé :
$$g'(1) = \cdots\cdots$$
4. Équation de T_1, la tangente à $\mathcal{C}_g$ en $D(1;0)$:
$$y = \cdots\cdots$$
5. g est en fait la fonction définie sur $[-0.5;3]$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Retrouver les résultats des premières questions.

Exercice 2 QCM graphique – D'après le bac ES

Source : Bac ES/L, Pondichery, 26 avril 2017, exercice 1 (questions accessibles).

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O :



On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

a. 1 **b.** 2 **c.** 3

2. Le nombre réel $f'(7)$ est :

a. nul **b.** strictement positif **c.** strictement négatif

3. La fonction f' est :

a. croissante sur $]0\,;\,10]$ **b.** croissante sur $[4\,;\,7]$ **c.** décroissante sur $[4\,;\,7]$

Exercice 3 Tangentes parallèles et position relative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe et (d) la droite d'équation $y = 2x + 1$.

1. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à (d).

2. Étudier, en justifiant le signe d'une expression factorisée, la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (d).

Exercice 4 Tangentes passant par l'origine

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer $f'(x)$.

2. Donner une équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

3. Déterminer toutes les valeurs de a pour lesquelles T_a passe par l'origine du repère.

Exercice 5 Règles de dérivation : fonctions composées

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, en précisant son domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = (3x-1)^5$.

2. $g(x) = \sqrt{2x+5}$.

3. $h(x) = \mathrm{e}^{2x^2-x}$.

4. $k(x) = \dfrac{1}{(x+2)^3}$.

5. $p(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$.

6. $q(x) = \sqrt{x^2+4}$.

Exercice 6 Deux tangentes et une intersection

On considère $f(x) = xe^x$ et $g(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

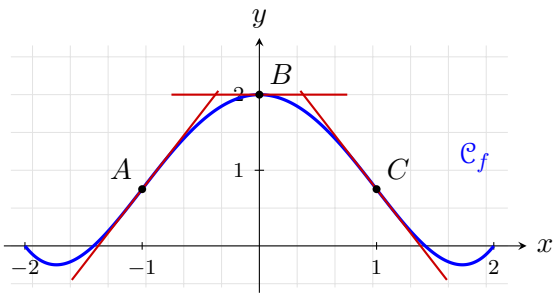
1. Déterminer les variations de f et de g.
2. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
3. Montrer que les deux courbes admettent une tangente commune au point d'abscisse 0.

Thème II Convexité : premières lectures graphiques

Exercice 7 Convexité par lecture de la courbe de f

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-2;2]$, ainsi que les tangentes à la courbe aux points A, B et C d'abscisses respectives -1, 0 et 1.

L'expression de f n'est pas donnée. Répondre uniquement par lecture graphique.

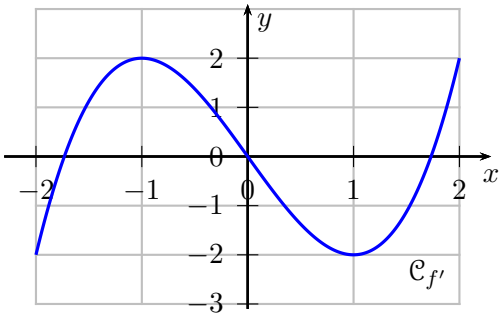


1. Observer les tangentes en A et en C. De part et d'autre de chacun de ces points, comment la courbe se situe-t-elle par rapport à la tangente correspondante ?
2. En déduire les intervalles sur lesquels f semble convexe ou concave.
3. En quels points la convexité semble-t-elle changer ? Donner les abscisses des points d'inflexion conjecturés.
4. Sur l'intervalle $[-1;1]$, comparer graphiquement $f(x)$ et $f(0)$.

Exercice 8 Convexité par lecture de la courbe de f'

On reprend la fonction f de l'exercice précédent. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{f'}$ de sa dérivée f' sur $[-2;2]$.

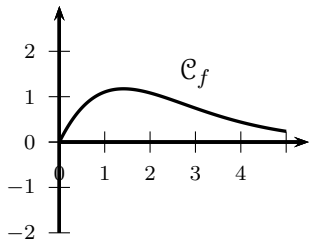
Dans les trois premières questions, on utilisera uniquement le graphique.



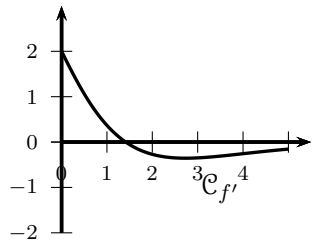
1. Par lecture graphique, déterminer les intervalles sur lesquels f' semble croissante ou décroissante.
2. En déduire les intervalles de convexité et de concavité de f.
3. Conjecturer le nombre d'abscisses de points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ et les préciser.
4. Pour vérifier les résultats précédents, on admet désormais que $f'(x) = x^3 - 3x$ pour tout $x \in [-2;2]$. Calculer $f''(x)$, étudier son signe et conclure.

Exercice 9 Étude graphique puis analytique – Bac ES Antilles-Guyane 2018

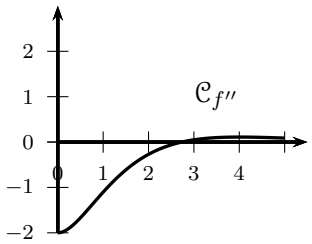
Source : Bac ES/L, Antilles-Guyane, 19 juin 2018, exercice 4 (hors integration).



Courbe $\mathcal{C}_f$



Courbe $\mathcal{C}_{f'}$



Courbe $\mathcal{C}_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathcal{C}_{f'}$ et $\mathcal{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.

Partie A – Lecture graphique

Les réponses seront obtenues à partir des trois courbes précédentes.

1. Encadrer par deux entiers consécutifs l'abscisse à laquelle f semble atteindre son maximum.
2. a) Donner un intervalle à bornes entières sur lequel f semble convexe.
   b) À l'aide du graphique de f'', expliquer pourquoi on peut conjecturer l'existence d'un point d'inflexion. Encadrer son abscisse par deux entiers consécutifs.
3. Parmi les équations ci-dessous, choisir celle de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 :

$$y = x \qquad y = 2x + 1 \qquad y = 2x \qquad y = \tfrac{3}{4}x$$

Partie B – Étude de la fonction

On admet que, sur $[0;5]$, la fonction représentée est définie par

$$f(x) = (x^2 + 2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [0;5]$, on a $f'(x) = (2 - x^2)\mathrm{e}^{-x}$.
2. En déduire les variations de f sur $[0;5]$ et l'abscisse du maximum.
3. Donner la valeur approchée de ce maximum, arrondie au millième.

Thème III Convexité : étude de la dérivée seconde

Exercice 10 Dérivée seconde et variations de la dérivée

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.
2. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les variations de f'.
3. Déterminer les intervalles de convexité et de concavité de f.
4. Justifier que $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

Exercice 11 Convexité d'une fonction exponentielle

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Étudier le signe de $f''(x)$, puis la convexité de f.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 12 De l'intérêt de la dérivée seconde

Soit f la fonction définie sur $[-5;5]$ par

$$f(x) = x - \frac{2}{x^2+1}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-5;5]$.
3. En déduire les variations de f' sur $[-5;5]$.
4. Vérifier que $f'(-1) = 0$. Montrer que f' s'annule une deuxième fois sur $[-5;5]$, en un unique réel α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.
5. Dresser le tableau de signes de f', puis le tableau de variations de f sur $[-5;5]$.

Exercice 13 Point d'inflexion et changement de convexité

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$.

1. Déterminer $f''(x)$ et factoriser son expression.
2. Étudier la convexité de f et préciser les points d'inflexion de sa courbe.
3. Déterminer l'équation de la tangente au point d'inflexion d'abscisse 0 et étudier la position de la courbe à proximité de ce point.

Thème IV Applications de la convexité : positions relatives

Exercice 14 Position relative de deux courbes : méthode classique

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 - x + 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un même repère.

1. Calculer $f(x) - g(x)$ et factoriser cette expression.
2. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$, puis déterminer leurs points d'intersection.

Exercice 15 Position relative à une tangente : méthode par convexité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + x^2.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et (T) sa tangente au point d'abscisse 0.

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer une équation de (T).
2. Calculer $f''(x)$ et démontrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire, sans étudier le signe de $f(x) - (x+1)$, la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (T) sur $\mathbb{R}$. Préciser le cas d'égalité.

Exercice 16 Position relative à une tangente : la fonction racine carrée

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer $f''(x)$ pour tout $x > 0$ et en déduire la concavité de f sur $]0;+\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
3. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (T) sur $[0;+\infty[$, puis démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}.$$

Préciser le cas d'égalité.

4. En déduire un majorant simple de $\sqrt{2}$.

Thème V Applications de la convexité : inégalités

Exercice 17 Convexité et position relative à une corde

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, et A et B ses points d'abscisses respectives -1 et 2.

1. Démontrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation de la droite (AB).
3. Sans étudier le signe de $f(x) - (x+2)$, justifier que, pour tout $x \in [-1;2]$, $x^2 \leqslant x+2$. Préciser les cas d'égalité.

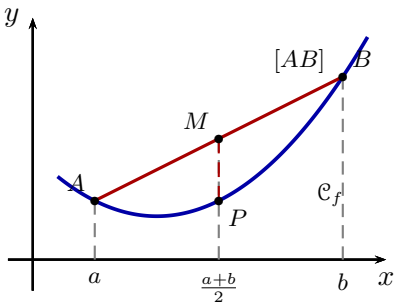
Rappel de cours : convexité et milieu d'une corde

Conséquence utile de la définition géométrique de la convexité

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I. On note $A\big(a;f(a)\big)$ et $B\big(b;f(b)\big)$ deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ est situé au-dessous de la corde $[AB]$. Or, sur cette corde, le point d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ est le milieu de $[AB]$, donc son ordonnée vaut $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
On en déduit :

$$\boxed{f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}}.$$

Si f est strictement convexe et si $a \neq b$, alors l'inégalité est stricte.



Le point M est le milieu de la corde $[AB]$; P est le point de $\mathcal{C}_f$ de même abscisse.

Exercice 18 [*] Approfondissement Inégalité des moyennes : une première application

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Étudier la convexité de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.
2. En utilisant le rappel de cours précédent, démontrer que

$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}}.$$

Préciser le cas d'égalité.

Exercice 19 [*] Approfondissement Concavité et inégalité à trois variables

Soient a, b, c trois réels positifs tels que $a+b+c=3$.

1. À l'aide de la concavité de la fonction racine carrée, montrer que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\sqrt{t} \leqslant \frac{t+1}{2}.$$

2. En déduire que

$$\boxed{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant 3}.$$

Déterminer tous les cas d'égalité.

Exercice 20 Inégalités classiques par convexité

1. Montrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. En utilisant l'equation de sa tangente au point d'abscisse 0, etablir que, pour tout reel x, $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x$.
3. Etablir de meme, pour tout $x \geqslant 0$, l'inegalite $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1-x$.
4. En deduire que, pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2$.

Exercice 21 [!] Bilan Étude complète de la convexité

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f.
2. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.
3. Déterminer les intervalles de convexité et les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 et préciser localement la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 22, page 8.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 23, page 8.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 22 [+] Consolidation Étude complète de la convexité

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x^2+4x+5)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $g'(x)$ et déterminer les variations de g.
2. Calculer $g''(x)$ et étudier son signe.
3. Déterminer les intervalles de convexité et les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_g$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0 et préciser localement la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 23 [*] Approfondissement Une fonction avec parametre

Pour tout reel a, on considere f_a definie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = x^4 - ax^2.$$

1. Calculer $f_a''(x)$.
2. Selon les valeurs de a, determiner les intervalles de convexite et de concavite de f_a.
3. Etudier le nombre et les coordonnees des points d'inflexion de $\mathcal{C}_{f_a}$ selon les valeurs de a.

Thème VI Exercices du baccalauréat – annales antérieures à 2026

Exercice 24 Exponentielle, tangente et inegalite – Bac 2025

Source : Bac specialite mathematiques, Amerique du Nord, 22 mai 2025, sujet 2, exercice 4, partie A.

On etudie la fonction f definie sur $[0;\pi]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x).$$

Sa courbe representative dans un repere est notee $\mathcal{C}_f$.

1. a) Etablir que, pour tout $x \in [0;\pi]$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x\big(\sin(x) + \cos(x)\big).$$

b) En deduire que f est strictement croissante sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2. a) Determiner une equation de la tangente (T) a $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b) Justifier que f est convexe sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) En deduire que, pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\mathrm{e}^x \sin(x) \geqslant x.$$

3. Demontrer que le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ est un point d'inflexion.

Exercice 25 Exercice de type bac – Exponentielle et point d'inflexion

On considere la fonction f definie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 - 6x + 10)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe representative dans un repere orthonorme.

1. Montrer que, pour tout reel x, $f'(x) = (x-2)^2\mathrm{e}^x$. En deduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f''(x) = x(x-2)\mathrm{e}^x$ pour tout reel x.

3. Etudier la convexite de f et determiner les coordonnees des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

4. Determiner l'equation de la tangente (T) a $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3, puis justifier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et (T) sur $[2;+\infty[$.

Exercice 26 Convexité, variations et fonction auxiliaire – Bac 2025

Source : Bac specialite, Amerique du Nord, 22 mai 2025, sujet 2 de secours, exercice 1, partie A.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. Montrer que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
4. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer les coordonnées de son point d'inflexion.
5. En déduire les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et déterminer son minimum.
6. Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
7. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$; en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
8. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 2x - 1$.

Exercice 27 Fonction auxiliaire et maximum – Bac S Nouvelle-Calédonie 2019

Source : Bac S, Nouvelle-Calédonie, mars 2019, exercice 2 (hors calcul d'aire).

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-4} - 2.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2$.
3. Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
6. À la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Partie B – Étude d'une deuxième fonction

On définit f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4}.$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. On admet que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$, où g est la fonction de la partie A. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que le maximum de f sur $[0;+\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Partie C – Position relative à une parabole

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé. Déterminer leur position relative sur $\mathbb{R}$.

Exercice 28 Le logo d'un T-shirt – Bac S Antilles-Guyane 2018

Source : Bac S, Antilles-Guyane, 19 juin 2018, exercice 3 (énoncé complet).

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

Partie A – Étude de f

1. Justifier que, pour tout réel x, $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.
3. Démontrer que $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ pour tout réel x.
4. Sur $[-\pi;\pi]$:
   a) déterminer le signe de $f'(x)$;
   b) dresser le tableau de variations de f.

Partie B – Position relative des deux courbes

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes de f et de g dans un repère orthonormé, avec une unité graphique de 2 cm. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

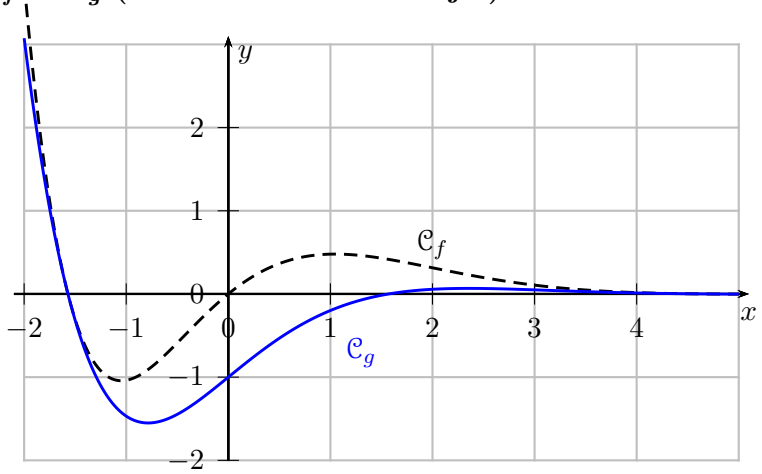
Question facultative – NON À FAIRE dans ce TD : nécessite l'intégration.
Cette partie est conservée pour respecter l'énoncé du Bac ; elle pourra être reprise après le chapitre sur les intégrales.
Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.
b) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2.

Annexe – Courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ (à conserver dans le sujet)



Thème VII Devoirs à la maison – DM

Exercice 29 DM 1 – Variations, convexité et tangente

On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par

$$f(x) = (x^2 + 4x)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0;5]$.
2. Calculer $f''(x)$ et en déduire les intervalles de convexité de f sur $[0;5]$. Déterminer les coordonnées de son éventuel point d'inflexion.
3. Donner une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessous de (T) sur $[0;5]$.

Exercice 30 DM 2 – Convexité et tangentes : deux points d'inflexion

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

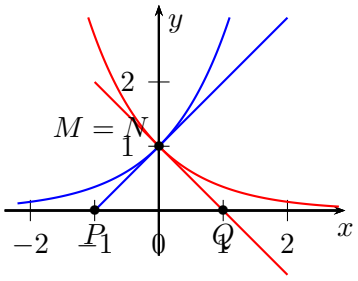
$$g(x) = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^{x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Montrer que $g'(x) = x^2\mathrm{e}^x$ et étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $g''(x)$ et déterminer les intervalles de convexité et les points d'inflexion de $\mathcal{C}_g$.
3. Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0.
4. En utilisant la convexité et la concavité de g, comparer $g(x)$ et 2 sur chacun des intervalles $[-2;0]$ et $[0;+\infty[$. Préciser les cas d'égalité.

Exercice 31 DM 3 – Deux tangentes perpendiculaires – Bac S 2017

On considère, sur $\mathbb{R}$, les fonctions $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes respectives dans un repère orthonormé. Pour chaque réel a, M est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a et N celui de $\mathcal{C}_g$ de même abscisse. La tangente en M à $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P ; la tangente en N à $\mathcal{C}_g$ coupe cet axe en Q.



Un logiciel de géométrie et un tableur ont permis de relever les longueurs suivantes :

a	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$
PQ	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Démontrer que les tangentes en M et N sont perpendiculaires.
2. a) Émettre une conjecture sur la longueur PQ.
   b) Démontrer cette conjecture pour tout réel a.

Thème VIII Vers le supérieur – défis facultatifs

Exercice 32 [*] Approfondissement DM 4 – Une inégalité exponentielle renforcée

Soit h définie sur $[0;+\infty[$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

1. Calculer $h''(x)$ et démontrer que h est convexe sur $[0;+\infty[$.
2. Déterminer la tangente à la courbe de h en 0 et en déduire que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\boxed{\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}}.$$

Exercice 33 [*] Approfondissement DM 5 – Des cordes à l'inégalité de Jensen

Partie A – Paramétrer une corde et démontrer une inégalité

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. On considère deux réels x et y de I tels que $x < y$. On note $A\big(x;f(x)\big)$ et $B\big(y;f(y)\big)$ les points correspondants de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Soit M un point quelconque du segment $[AB]$.

1. Justifier qu'il existe un réel $t \in [0;1]$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}.$$

Interpréter géométriquement les valeurs $t = 0$, $t = \dfrac{1}{2}$ et $t = 1$.

2. En notant $(x_M;y_M)$ les coordonnées de M, exprimer $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ à l'aide des coordonnées de A, B et M. En déduire que

$$\boxed{M\Big((1-t)x + ty \ ; \ (1-t)f(x) + tf(y)\Big)}.$$

3. On note P le point de $\mathcal{C}_f$ ayant la même abscisse que M. En utilisant uniquement la définition géométrique de la convexité, démontrer que

$$\boxed{\forall t \in [0;1], \quad f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)}.$$

En déduire, en remplaçant t par $1-t$, que

$$\boxed{f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)}.$$

4. Quelle valeur de t permet de retrouver l'inégalité au milieu d'une corde ? Que devient l'inégalité lorsque $x = y$?

Partie B – Appliquer une forme de l'inégalité de Jensen

On admet la généralisation suivante, dite inégalité de Jensen : pour tout entier $n \geqslant 2$ et tous $x_1, \ldots, x_n \in I$,

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

1. Appliquer cette propriété à $f(x) = 1/x$ sur $]0;+\infty[$ et démontrer que, pour tous réels $a_1, \ldots, a_n > 0$,

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2}.$$

2. Appliquer Jensen à la fonction exponentielle et établir, pour tous réels $x_1, \dots, x_n$,

$$\boxed{\mathrm{e}^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{x_1}+\cdots+\mathrm{e}^{x_n}}{n}}.$$

Fin du TD