MATH93

Terminale Spécialité

Recueil d'exercices – Entraînement – Méthodes

TD – EXERCICES

Chapitre 8 – TD

Compléments de dérivation et convexité

Version corrigée – Version imprimable

Sommaire du TD

I Tangentes et compléments de dérivation 2

II Convexité : premières lectures graphiques 8

III Convexité : étude de la dérivée seconde 11

IV Applications de la convexité : positions relatives 15

V Applications de la convexité : inégalités 18

VI Exercices du baccalauréat – annales antérieures à 2026 26

VII Devoirs à la maison – DM 39

VIII Vers le supérieur – défis facultatifs 40

Objectifs

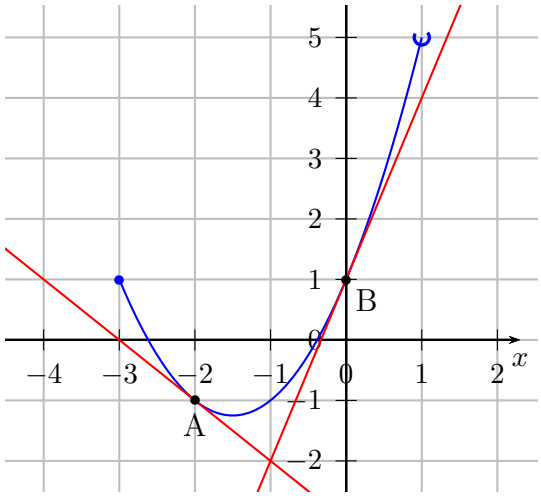
- Lire graphiquement les nombres dérivés et déterminer des tangentes.
- Maîtriser la dérivation des fonctions composées, notamment avec l'exponentielle.
- Découvrir la convexité par les graphiques, puis l'étudier avec la dérivée seconde.
- Utiliser la convexité pour établir des inégalités et résoudre des problèmes.
- S'entraîner sur des exercices de synthèse du baccalauréat, sans logarithme.
- Préparer des devoirs à la maison avec corrigés dans la version dédiée.

Thème I Tangentes et compléments de dérivation

Exercice 1 Lectures graphiques

1.1 Lecture graphique puis calculs (c)

On a tracé $\mathcal{C}_f$, la courbe de f définie et dérivable sur $[-3;1[$ ainsi que la tangente à $\mathcal{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives -2 et 0.



1. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(-2) = \cdots\cdots$$

Corrigé

La tangente en A passe notamment par $(-3;0)$ et $(-2;-1)$: son coefficient directeur est $(-1-0)/(-2+3) = \boxed{-1}$.

2. Équation de T_{-2}, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(-2;-1)$:

$$y = \cdots\cdots$$

Corrigé

$f(-2) = -1$ et $f'(-2) = -1$. Donc $y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$, soit $\boxed{y = -x - 3}$.

3. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(0) = \cdots\cdots$$

Corrigé

Le coefficient directeur de la tangente en B est $\boxed{f'(0) = 3}$.

4. Équation de T_0, la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $B(0;1)$:

$$y = \cdots\cdots$$

Corrigé

$f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$ donnent $\boxed{y = 3x + 1}$.

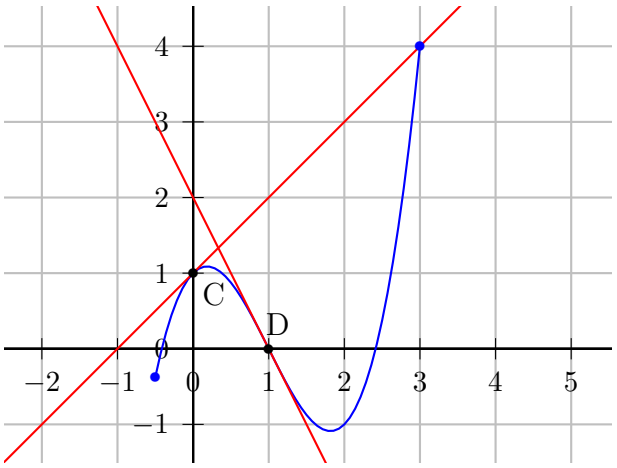
5. f est en fait la fonction définie sur $[-3;1[$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Retrouver les résultats des premières questions.

Corrigé

$f'(x) = 2x + 3$; ainsi $f'(-2) = -1$ et $f'(0) = 3$, ce qui confirme les lectures graphiques et les deux équations de tangentes.

1.2 Lecture graphique puis calculs (c)

On a tracé $\mathcal{C}_g$ la courbe de g définie et dérivable sur $[-0.5;3]$ ainsi que les tangentes à $\mathcal{C}_g$ aux points $C(0;g(0))$ et $D(1;g(1))$.



1. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(0) = \cdots\cdots$$

Corrigé

La tangente en C passe par $(0;1)$ et $(1;2)$; $\boxed{g'(0) = 1}$.

2. Équation de T_0, la tangente à $\mathcal{C}_g$ en $C(0;1)$:

$$y = \cdots\cdots$$

Corrigé

$g(0) = 1$ et $g'(0) = 1$, donc $\boxed{y = x + 1}$.

3. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(1) = \cdots\cdots$$

Corrigé

La tangente en $D(1;0)$ a pour pente $\boxed{g'(1) = -2}$.

4. Équation de T_1, la tangente à $\mathcal{C}_g$ en $D(1;0)$:

$$y = \cdots\cdots$$

Corrigé

On obtient $y = -2(x - 1)$, soit $\boxed{y = -2x + 2}$.

5. g est en fait la fonction définie sur $[-0.5;3]$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Retrouver les résultats des premières questions.

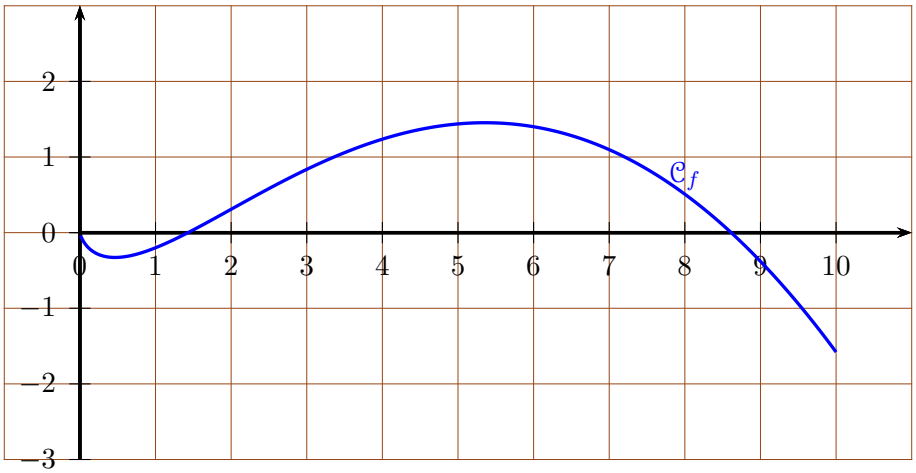
Corrigé

$g'(x) = 3x^2 - 6x + 1$; d'où $g'(0) = 1$ et $g'(1) = -2$, ce qui retrouve les résultats graphiques.

Exercice 2 QCM graphique – D'après le bac ES

Source : Bac ES/L, Pondichery, 26 avril 2017, exercice 1 (questions accessibles).

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O :



On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

a. 1 **b.** 2 **c.** 3

Corrigé

La courbe possède deux tangentes horizontales : une au minimum local et une au maximum local.
Réponse b : 2.

2. Le nombre réel $f'(7)$ est :

a. nul **b.** strictement positif **c.** strictement négatif

Corrigé

Au voisinage de 7, f est décroissante ; ainsi réponse c : $f'(7) < 0$.

3. La fonction f' est :

a. croissante sur $]0\,;\,10]$ **b.** croissante sur $[4\,;\,7]$ **c.** décroissante sur $[4\,;\,7]$

Corrigé

Entre 4 et 7, la pente des tangentes diminue : réponse c : f' décroît sur $[4;7]$.

Exercice 3 Tangentes parallèles et position relative

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe et (d) la droite d'équation $y = 2x + 1$.

1. Déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ où la tangente est parallèle à (d).

Corrigé

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 2.$$

La droite (d) a pour coefficient directeur 2. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est parallèle à (d) si, et seulement si, son coefficient directeur $f'(a)$ vaut 2 :

$$\begin{aligned} f'(a) = 2 &\iff 3a^2 - 10a + 2 = 2 \\ &\iff a(3a - 10) = 0 \\ &\iff a = 0 \quad \text{ou} \quad a = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

On conclut que $\boxed{a \in \left\{0; \frac{10}{3}\right\}}$.

2. Étudier, en justifiant le signe d'une expression factorisée, la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (d).

Corrigé

Pour tout réel x, comparons les ordonnées des deux courbes :

$$\begin{aligned} f(x) - (2x+1) &= x^3 - 5x^2 + 2x + 1 - (2x+1) \\ &= x^3 - 5x^2 \\ &= \boxed{x^2(x-5)}. \end{aligned}$$

On sait que $x^2 \geqslant 0$ pour tout x et que $x^2 = 0$ si, et seulement si, $x = 0$. Si $x \neq 0$, le produit a donc le signe de $x - 5$:

- si $x < 5$ et $x \neq 0$, $f(x) < 2x + 1$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de (d) ;
- si $x > 5$, $f(x) > 2x + 1$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (d) ;
- si $x = 0$ ou $x = 5$, les deux ordonnées sont égales.

Les points d'intersection sont $\boxed{A(0;1) \text{ et } B(5;11)}$. Au point A, la courbe est tangente à (d) puisqu'on a également $f'(0) = 2$.

Exercice 4 Tangentes passant par l'origine

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}$.

1. Déterminer $f'(x)$.

Corrigé

Par produit et composition, $\boxed{f'(x) = (2x - x^2)\mathrm{e}^{-x} = x(2-x)\mathrm{e}^{-x}}$.

2. Donner une équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

Corrigé

En tout réel a, $\boxed{T_a :\ y = a^2\mathrm{e}^{-a} + a(2-a)\mathrm{e}^{-a}(x-a)}$.

3. Déterminer toutes les valeurs de a pour lesquelles T_a passe par l'origine du repère.

Corrigé

La tangente en un réel a a pour équation

$$T_a :\ y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Elle passe par l'origine $O(0;0)$ si, et seulement si, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} 0 &= f'(a)(0-a) + f(a) \\ &= -a\big[a(2-a)\mathrm{e}^{-a}\big] + a^2\mathrm{e}^{-a} \\ &= a^2(a-1)\mathrm{e}^{-a}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{e}^{-a} > 0$ pour tout réel a, cette égalité équivaut à $a^2(a-1) = 0$, d'où

$$\boxed{a = 0 \quad \text{ou} \quad a = 1}.$$

Réciproquement, ces deux valeurs satisfont bien l'équation, donc il n'y en a pas d'autres.

Exercice 5 Règles de dérivation : fonctions composées

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, en précisant son domaine de dérivabilité.

1. $f(x) = (3x-1)^5$.

Corrigé

Sur $\mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = 15(3x-1)^4}$ (dérivation de u^5).

2. $g(x) = \sqrt{2x+5}$.

Corrigé

g est dérivable sur $]-5/2;+\infty[$ et $\boxed{g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}}$; elle n'est pas dérivable en $-5/2$.

3. $h(x) = \mathrm{e}^{2x^2-x}$.

Corrigé

Sur $\mathbb{R}$, avec $u(x) = 2x^2 - x$,

$\boxed{h'(x) = (4x-1)\mathrm{e}^{2x^2-x}}$.

4. $k(x) = \dfrac{1}{(x+2)^3}$.

Corrigé

Sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, $\boxed{k'(x) = -\dfrac{3}{(x+2)^4}}$.

5. $p(x) = \mathrm{e}^{x^2+1}$.

Corrigé

Sur $\mathbb{R}$, $\boxed{p'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2+1}}$.

6. $q(x) = \sqrt{x^2+4}$.

Corrigé

Sur $\mathbb{R}$, $x^2+4>0$ et $\boxed{q'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}}$.

Exercice 6 Deux tangentes et une intersection

On considère $f(x)=x\mathrm{e}^x$ et $g(x)=x\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les variations de f et de g.

Corrigé

Par la formule de dérivation d'un produit, pour tout réel x,

$$f'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=\boxed{(x+1)\mathrm{e}^x},$$
$$g'(x)=\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}=\boxed{(1-x)\mathrm{e}^{-x}}.$$

Les deux exponentielles sont strictement positives sur $\mathbb{R}$. Ainsi f' a le signe de $x+1$, et g' celui de $1-x$. Il en résulte que f est strictement décroissante sur $]-\infty;-1]$, puis strictement croissante sur $[-1;+\infty[$, tandis que g est strictement croissante sur $]-\infty;1]$, puis strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. Les extremums sont $\boxed{f(-1)=-\mathrm{e}^{-1}}$ et $\boxed{g(1)=\mathrm{e}^{-1}}$.

2. Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Corrigé

Un point d'intersection a pour abscisse une solution de $f(x)=g(x)$. Or

$$\begin{aligned} f(x)=g(x) &\iff x\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^{-x}\\ &\iff x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})=0.\end{aligned}$$

Un produit est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs est nul. Ainsi $x=0$ ou $\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{-x}$. Dans le second cas, par injectivité de l'exponentielle, $x=-x$, donc encore $x=0$. Comme $f(0)=g(0)=0$, les courbes ont un seul point commun : $\boxed{O(0;0)}$.

3. Montrer que les deux courbes admettent une tangente commune au point d'abscisse 0.

Corrigé

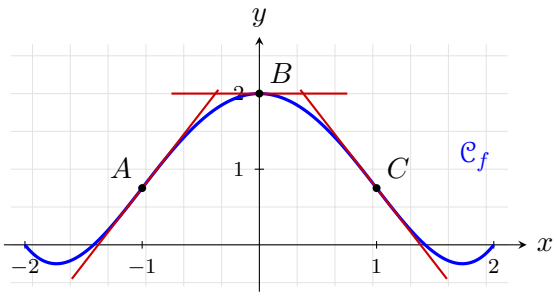
$f(0)=g(0)=0$ et $f'(0)=g'(0)=1$. Les deux courbes ont donc au point O la tangente commune $\boxed{y=x}$.

Thème II Convexité : premières lectures graphiques

Exercice 7 Convexité par lecture de la courbe de f

On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f deux fois dérivable sur $[-2;2]$, ainsi que les tangentes à la courbe aux points A, B et C d'abscisses respectives -1, 0 et 1.

L'expression de f n'est pas donnée. Répondre uniquement par lecture graphique.



1. Observer les tangentes en A et en C. De part et d'autre de chacun de ces points, comment la courbe se situe-t-elle par rapport à la tangente correspondante ?

Corrigé

Au voisinage de A et C, la courbe traverse sa tangente : elle passe d'un côté de celle-ci à l'autre.

2. En déduire les intervalles sur lesquels f semble convexe ou concave.

Corrigé

Par lecture des positions relatives aux tangentes, f semble convexe sur $[-2;-1]$ et $[1;2]$, et concave sur $[-1;1]$.

3. En quels points la convexité semble-t-elle changer ? Donner les abscisses des points d'inflexion conjecturés.

Corrigé

La convexité semble changer en A et C : abscisses conjecturées $\boxed{-1 \text{ et } 1}$.

4. Sur l'intervalle $[-1;1]$, comparer graphiquement $f(x)$ et $f(0)$.

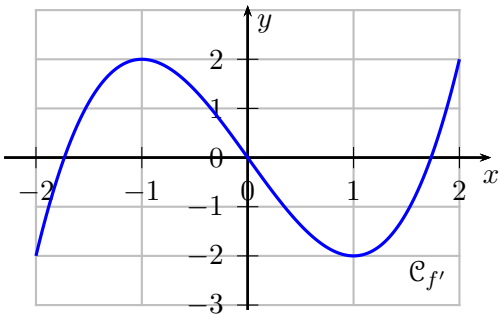
Corrigé

Sur $[-1;1]$, $B(0;2)$ semble être un maximum, donc $\boxed{f(x) \leqslant f(0) = 2}$.

Exercice 8 Convexité par lecture de la courbe de f'

On reprend la fonction f de l'exercice précédent. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{f'}$ de sa dérivée f' sur $[-2;2]$.

Dans les trois premières questions, on utilisera uniquement le graphique.



1. Par lecture graphique, déterminer les intervalles sur lesquels f' semble croissante ou décroissante.

Corrigé

f' semble croissante sur $[-2;-1]$, décroissante sur $[-1;1]$, puis croissante sur $[1;2]$.

2. En déduire les intervalles de convexité et de concavité de f.

Corrigé

Par le lien entre monotonie de f' et convexité de f, f est convexe sur $[-2;-1]$ et $[1;2]$, concave sur $[-1;1]$.

3. Conjecturer le nombre d'abscisses de points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ et les préciser.

Corrigé

Les deux changements de sens de variation de f' donnent deux points d'inflexion, d'abscisses $\boxed{-1 \text{ et } 1}$.

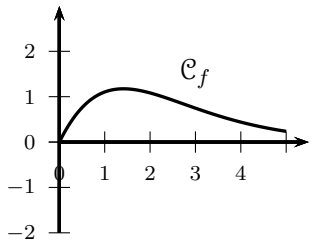
4. Pour vérifier les résultats précédents, on admet désormais que $f'(x) = x^3 - 3x$ pour tout $x \in [-2;2]$. Calculer $f''(x)$, étudier son signe et conclure.

Corrigé

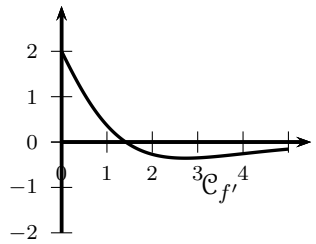
$f''(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Son signe est positif pour $|x| > 1$, négatif pour $|x| < 1$, avec changement de signe en ± 1. Les conjectures sont confirmées.

Exercice 9 Étude graphique puis analytique – Bac ES Antilles-Guyane 2018

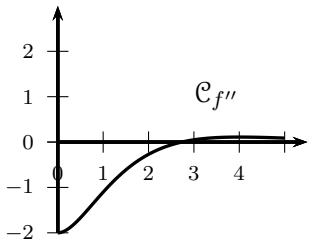
Source : Bac ES/L, Antilles-Guyane, 19 juin 2018, exercice 4 (hors integration).



Courbe $\mathcal{C}_f$



Courbe $\mathcal{C}_{f'}$



Courbe $\mathcal{C}_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathcal{C}_{f'}$ et $\mathcal{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.

Partie A – Lecture graphique

Les réponses seront obtenues à partir des trois courbes précédentes.

1. Encadrer par deux entiers consécutifs l'abscisse à laquelle f semble atteindre son maximum.

Corrigé

La courbe $\mathcal{C}_f$ présente son maximum pour une abscisse entre 1 et 2 : $\boxed{1 < x_{\max} < 2}$.

2. a) Donner un intervalle à bornes entières sur lequel f semble convexe.
b) À l'aide du graphique de f'', expliquer pourquoi on peut conjecturer l'existence d'un point d'inflexion. Encadrer son abscisse par deux entiers consécutifs.

Corrigé

a) f semble convexe sur $[3;5]$. b) f'' change de signe entre 2 et 3 ; un point d'inflexion est conjecturé, d'abscisse comprise entre ces deux entiers.

3. Parmi les équations ci-dessous, choisir celle de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 :

$y = x$ $\quad$ $y = 2x + 1$ $\quad$ $y = 2x$ $\quad$ $y = \frac{3}{4}x$

Corrigé

La tangente en 0 passe par l'origine et a pour coefficient directeur 2 : $\boxed{y = 2x}$.

Partie B – Étude de la fonction

On admet que, sur $[0;5]$, la fonction représentée est définie par

$$f(x) = (x^2 + 2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [0;5]$, on a $f'(x) = (2 - x^2)\mathrm{e}^{-x}$.

Corrigé

$f'(x) = (2x + 2)\mathrm{e}^{-x} - (x^2 + 2x)\mathrm{e}^{-x} = \boxed{(2 - x^2)\mathrm{e}^{-x}}$.

2. En déduire les variations de f sur $[0;5]$ et l'abscisse du maximum.

Corrigé

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, f' est positive sur $[0;\sqrt{2}[$, nulle en $\sqrt{2}$, négative ensuite. f croît sur $[0;\sqrt{2}]$, puis décroît sur $[\sqrt{2};5]$; son maximum est atteint en $\boxed{x = \sqrt{2}}$.

3. Donner la valeur approchée de ce maximum, arrondie au millième.

Corrigé

Le maximum est $f(\sqrt{2}) = (2+2\sqrt{2})\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx \boxed{1{,}174}$ (au millième).

Thème III Convexité : étude de la dérivée seconde

Exercice 10 Dérivée seconde et variations de la dérivée

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

Corrigé

$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 12x + 9}$ puis $\boxed{f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)}$.

2. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les variations de f'.

Corrigé

- **Étude du signe.** $f''(x) = 6(x-2)$; comme $6 > 0$, la dérivée seconde est du signe de $x - 2$.
- **Tableau de signe, de convexité et de variations de f'.**

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		f concave		f convexe	

Comme f'' est la dérivée de f', f' est strictement décroissante sur $]-\infty;2]$, puis strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

3. Déterminer les intervalles de convexité et de concavité de f.

Corrigé

$\boxed{f \text{ concave sur }]-\infty;2]}$ et $\boxed{f \text{ convexe sur } [2;+\infty[}$.

4. Justifier que $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

Corrigé

f'' change de signe en 2 et $f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3$: $\boxed{I(2;3)}$ est un point d'inflexion.

Exercice 11 Convexité d'une fonction exponentielle

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Corrigé

$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+1)\mathrm{e}^{-x} = \boxed{-x\mathrm{e}^{-x}}$; puis $\boxed{f''(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}}$.

2. Étudier le signe de $f''(x)$, puis la convexité de f.

Corrigé

- **Dérivée seconde.** Pour tout réel x, $f''(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$. Or $\mathrm{e}^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$; f'' a donc le signe de $x - 1$.
- **Tableau de signe et de convexité.**

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de f	f concave			f convexe	

- **Conclusion.** La fonction f est concave sur $]-\infty;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$. Puisque f'' change de signe en 1, la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse 1.

3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Corrigé

Le signe de f'' change en 1 ; $f(1) = 2/\mathrm{e}$. D'où le point $\boxed{I(1;2\mathrm{e}^{-1})}$.

Exercice 12 De l'intérêt de la dérivée seconde

Soit f la fonction définie sur $[-5;5]$ par

$$f(x) = x - \frac{2}{x^2+1}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

Corrigé

$f'(x) = 1 + \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ et $\boxed{f''(x) = \dfrac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}}$; le dénominateur est strictement positif.

2. Étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-5;5]$.

Corrigé

f'' a le signe de $1-3x^2$: négatif si $|x| > 1/\sqrt{3}$, positif si $|x| < 1/\sqrt{3}$, et nul aux bornes.

3. En déduire les variations de f' sur $[-5;5]$.

Corrigé

f' décroît sur $[-5;-1/\sqrt{3}]$, croît sur $[-1/\sqrt{3};1/\sqrt{3}]$, puis décroît sur $[1/\sqrt{3};5]$.

4. Vérifier que $f'(-1) = 0$. Montrer que f' s'annule une deuxième fois sur $[-5;5]$, en un unique réel α, dont on donnera un encadrement d'amplitude 0,1.

Corrigé

- **Première solution.** On a $f'(x) = 1 + \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$, donc $f'(-1) = 1 - \dfrac{4}{(1+1)^2} = 0$.
- **Seconde solution.** D'après le tableau de variations de f', la fonction f' est continue et strictement croissante sur $[-1/\sqrt{3};1/\sqrt{3}]$. En effet,

$$f'\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4} < 0,$$
$$f'(0) = 1 > 0.$$

  D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, il existe exactement un réel $\alpha \in]-1/\sqrt{3};0[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
- **Encadrement.** Un calcul numérique donne $f'(-0{,}3) < 0$ et $f'(-0{,}2) > 0$; la stricte croissance sur cet intervalle entraîne $\boxed{-0{,}3 < \alpha < -0{,}2}$. Sur $[-5;-1/\sqrt{3}]$, la stricte décroissance de f' et le zéro déjà trouvé en -1 excluent toute autre solution ; pour $x \geqslant 0$, $f'(x) = 1 + \frac{4x}{(x^2+1)^2} \geqslant 1 > 0$. Ce sont donc bien les deux seuls zéros de f' sur $[-5;5]$.

5. Dresser le tableau de signes de f', puis le tableau de variations de f sur $[-5;5]$.

Corrigé

- **Signe de f'.** La continuité de f', ses variations et l'unicité des deux zéros -1 et α donnent le tableau suivant.

x	-5		-1		α		5
Signe de f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$f(-5)$	↗	$f(-1)$	↘	$f(\alpha)$	↗	$f(5)$

- **Conclusion.** f est strictement croissante sur $[-5;-1]$, strictement décroissante sur $[-1;\alpha]$, puis strictement croissante sur $[\alpha;5]$. En particulier, f admet un maximum local en -1 et un minimum local en α.

Exercice 13 Point d'inflexion et changement de convexité

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2$.

1. Déterminer $f''(x)$ et factoriser son expression.

Corrigé

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, donc $\boxed{f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)}$.

2. Étudier la convexité de f et préciser les points d'inflexion de sa courbe.

Corrigé

- **Signe de la dérivée seconde.** Comme $12 > 0$, on étudie le signe de $x(x-2)$: il est positif lorsque les deux facteurs ont le même signe et négatif dans le cas contraire.
- **Tableau de signe et de convexité.**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Convexité de f	f convexe		f concave		f convexe		

- **Points d'inflexion.** La dérivée seconde change de signe aux deux valeurs 0 et 2. Les points correspondants sont donc des points d'inflexion. En calculant les ordonnées :

$$f(0) = 2,$$
$$f(2) = 2^4 - 4 \times 2^3 + 2 = 16 - 32 + 2 = -14.$$

La courbe possède exactement deux points d'inflexion : $\boxed{I(0;2) \quad \text{et} \quad J(2;-14)}$.

3. Déterminer l'équation de la tangente au point d'inflexion d'abscisse 0 et étudier la position de la courbe à proximité de ce point.

Corrigé

$f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$, donc $T : y = 2$. Or $f(x) - 2 = x^3(x-4)$: près de 0, cette différence est positive pour $x < 0$ et négative pour $x > 0$. La courbe traverse donc sa tangente.

Thème IV Applications de la convexité : positions relatives

Exercice 14 Position relative de deux courbes : méthode classique

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^2 - x + 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un même repère.

1. Calculer $f(x) - g(x)$ et factoriser cette expression.

Corrigé

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 - 2x^2 + x + 1 - (x^2 - x + 1) \\ &= x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= \boxed{x(x-1)(x-2)}. \end{aligned}$$

2. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Pour tout réel x, $f(x) - g(x) = x(x-1)(x-2)$. Les trois facteurs s'annulent respectivement en 0, 1 et 2. On étudie le signe de chacun d'eux, puis celui du produit :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On lit dans le tableau que :

- $f(x) - g(x) < 0$ pour $x \in]-\infty; 0[\cup]1; 2[$;
- $f(x) - g(x) > 0$ pour $x \in]0; 1[\cup]2; +\infty[$;
- $f(x) - g(x) = 0$ exactement pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.

3. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$, puis déterminer leurs points d'intersection.

Corrigé

La position relative des courbes découle directement du signe de $f-g$.

Intervalle	$]-\infty;0[$	$]0;1[$	$]1;2[$	$]2;+\infty[$
Signe de $f-g$	$-$	$+$	$-$	$+$
Position de $\mathcal{C}_f$	au-dessous	au-dessus	au-dessous	au-dessus

- Les courbes se coupent si et seulement si $f(x)=g(x)$, soit pour $x\in\{0;1;2\}$.
- On calcule $g(0)=1$, $g(1)=1$ et $g(2)=3$.

Ainsi, leurs trois points d'intersection sont

$$\boxed{A(0;1),\quad B(1;1),\quad C(2;3)}.$$

Exercice 15 Position relative à une tangente : méthode par convexité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\mathrm{e}^x+x^2.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et (T) sa tangente au point d'abscisse 0.

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer une équation de (T).

Corrigé

Pour tout réel x, $f'(x)=\mathrm{e}^x+2x$, d'où $f(0)=1$ et $f'(0)=1$. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est

$$y=f'(0)(x-0)+f(0),\quad \text{soit}\quad \boxed{(T):y=x+1}.$$

2. Calculer $f''(x)$ et démontrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Pour tout réel x,

$$\boxed{f''(x)=\mathrm{e}^x+2>0},$$

car $\mathrm{e}^x>0$ et $2>0$. La fonction f est donc strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire, sans étudier le signe de $f(x)-(x+1)$, la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (T) sur $\mathbb{R}$. Préciser le cas d'égalité.

Corrigé

On a montré que $f''(x)=\mathrm{e}^x+2>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Ainsi f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$. **Or une fonction convexe est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur l'intervalle de convexité.** En utilisant la tangente en 0, d'équation $y=x+1$, il vient, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant f(0)+f'(0)(x-0)\\ \mathrm{e}^x+x^2 &\geqslant x+1. \end{aligned}$$

On en déduit $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x + x^2 \geqslant x + 1}$. La convexité étant stricte, l'égalité n'est possible qu'au point de tangence, donc seulement pour $x = 0$. Par conséquent, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (T) sur $\mathbb{R}$ et admet exactement le point commun $A(0;1)$ avec cette droite.

Exercice 16 Position relative à une tangente : la fonction racine carrée

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Calculer $f''(x)$ pour tout $x > 0$ et en déduire la concavité de f sur $]0;+\infty[$.

Corrigé

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2}$, donc

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\frac{1}{4}x^{-3/2} \\ &= \boxed{-\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0}. \end{aligned}$$

La fonction f est donc strictement concave sur $]0;+\infty[$. Comme elle est continue en 0, sa concavité s'étend à $[0;+\infty[$.

2. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.

Corrigé

$f(1) = 1$ et $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. Une équation de la tangente en 1 est donc

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= \frac{1}{2}(x-1) + 1 \\ &= \boxed{\frac{x+1}{2}}. \end{aligned}$$

3. En déduire la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (T) sur $[0;+\infty[$, puis démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}.$$

Préciser le cas d'égalité.

Corrigé

La courbe d'une fonction concave est située au-dessous de chacune de ses tangentes sur son intervalle de concavité. Par conséquent, pour tout $x > 0$,

$$f(x) \leqslant \frac{x+1}{2}.$$

L'inégalité vaut aussi pour $x = 0$, car $0 \leqslant \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\boxed{\forall x \geqslant 0, \quad \sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}}.$$

La concavité est stricte sur $]0;+\infty[$: il y a égalité uniquement au point de tangence, c'est-à-dire pour $\boxed{x = 1}$.

4. En déduire un majorant simple de $\sqrt{2}$.

Corrigé

En appliquant le résultat précédent à $x = 2$, on obtient

$$\boxed{\sqrt{2} \leqslant \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}}.$$

L'inégalité est stricte puisque $2 \neq 1$.

Thème V Applications de la convexité : inégalités

Exercice 17 Convexité et position relative à une corde

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative, et A et B ses points d'abscisses respectives -1 et 2.

1. Démontrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$f'(x) = 2x \qquad \text{et} \qquad f''(x) = 2 > 0.$$

Par conséquent, f est **strictement convexe** sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation de la droite (AB).

Corrigé

On a $A(-1;1)$ et $B(2;4)$. Le coefficient directeur de (AB) vaut

$$m = \frac{4-1}{2-(-1)} = 1.$$

Une équation de (AB) est $y = x + b$. Comme $A \in (AB)$, $1 = -1 + b$, soit $b = 2$. Ainsi $\boxed{(AB) : y = x + 2}$.

3. Sans étudier le signe de $f(x) - (x+2)$, justifier que, pour tout $x \in [-1;2]$, $x^2 \leqslant x + 2$. Préciser les cas d'égalité.

Corrigé

- La fonction f est convexe sur $[-1;2]$.
- D'après la propriété des cordes, sur cet intervalle, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessous du segment $[AB]$.
- La droite (AB) a pour équation $y = x+2$; on en déduit donc

$$\boxed{\forall x \in [-1;2], \quad x^2 \leqslant x+2}.$$

- Comme f est strictement convexe, l'égalité a lieu uniquement aux extrémités. Les cas d'égalité sont donc $\boxed{x=-1 \text{ ou } x=2}$.

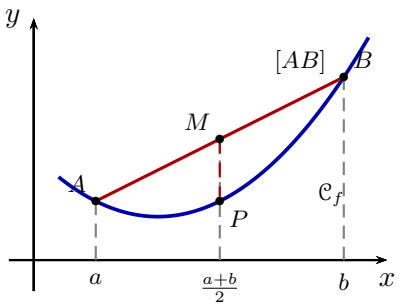
Rappel de cours : convexité et milieu d'une corde

Conséquence utile de la définition géométrique de la convexité

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I. On note $A\big(a;f(a)\big)$ et $B\big(b;f(b)\big)$ deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ est situé au-dessous de la corde $[AB]$. Or, sur cette corde, le point d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ est le milieu de $[AB]$, donc son ordonnée vaut $\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
On en déduit :

$$\boxed{f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}}.$$

Si f est strictement convexe et si $a \neq b$, alors l'inégalité est stricte.



Le point M est le milieu de la corde $[AB]$; P est le point de $\mathcal{C}_f$ de même abscisse.

Exercice 18 [*] Approfondissement Inégalité des moyennes : une première application

Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. Étudier la convexité de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

Corrigé

Pour $x>0$, $f'(x) = -x^{-2}$ et $f''(x) = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3} > 0$. Donc f est strictement convexe sur $]0;+\infty[$.

2. En utilisant le rappel de cours précédent, démontrer que

$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}}.$$

Préciser le cas d'égalité.

Corrigé

Le milieu de a et b est $m = \dfrac{a+b}{2} > 0$. D'après le rappel de cours sur le milieu d'une corde, la convexité de f entraîne

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2},$$
$$\frac{2}{a+b} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

En multipliant par $2 > 0$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}}.$$

Comme f est strictement convexe, il y a égalité si et seulement si $\boxed{a=b}$.

Exercice 19 [*] Approfondissement Concavité et inégalité à trois variables

Soient a, b, c trois réels positifs tels que $a+b+c=3$.

1. À l'aide de la concavité de la fonction racine carrée, montrer que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$\sqrt{t} \leqslant \frac{t+1}{2}.$$

Corrigé

Sur $]0;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ vérifie $f''(x) = -1/(4x^{3/2}) < 0$: elle est strictement concave. Sa tangente en 1 a pour équation $y = (x+1)/2$. La courbe étant au-dessous de ses tangentes, $\sqrt{t} \leqslant (t+1)/2$ pour tout $t > 0$; l'inégalité reste vraie pour $t = 0$. L'égalité a lieu exactement pour $t = 1$.

2. En déduire que

$$\boxed{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leqslant 3}.$$

Déterminer tous les cas d'égalité.

Corrigé

En appliquant l'inégalité précédente à a, b et c, puis en additionnant, on obtient

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leqslant \frac{a+1}{2}+\frac{b+1}{2}+\frac{c+1}{2}$$
$$= \frac{a+b+c+3}{2} = \boxed{3}.$$

Chaque écart $(t+1)/2 - \sqrt{t}$ est positif ou nul. L'égalité dans la somme exige donc $a=b=c=1$, ce qui satisfait bien $a+b+c=3$.

Exercice 20 Inégalités classiques par convexité

1. Montrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Pour $u(x) = \mathrm{e}^x$, on a $u''(x) = \mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$; u est strictement convexe.

2. En utilisant l'equation de sa tangente au point d'abscisse 0, etablir que, pour tout reel x, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$.

Corrigé

Pour $u(x) = \mathrm{e}^x$, on a $u(0) = 1$ et $u'(0) = 1$. Une équation de la tangente en 0 est donc

$$\begin{aligned} y &= u'(0)(x - 0) + u(0) \\ &= x + 1. \end{aligned}$$

Puisque $u''(x) = \mathrm{e}^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, u est strictement convexe et sa courbe se situe au-dessus de cette tangente :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x}.$$

L'égalité est réalisée si et seulement si $x = 0$.

3. Etablir de meme, pour tout $x \geqslant 0$, l'inegalite $\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x$.

Corrigé

Appliquons l'inégalité précédente à $-x$ (elle vaut même pour tout réel x) : $\boxed{\mathrm{e}^{-x} \geqslant 1 - x}$.

4. En deduire que, pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2$.

Corrigé

Pour tout $x \geqslant 0$, appliquons les deux inégalités établies :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &\geqslant 1 + x, \\ \mathrm{e}^{-x} &\geqslant 1 - x. \end{aligned}$$

En les additionnant membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} &\geqslant (1 + x) + (1 - x) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{\forall x \geqslant 0, \quad \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \geqslant 2}$. Les deux inégalités initiales sont simultanément des égalités uniquement en $x = 0$; c'est donc le seul cas d'égalité.

Exercice 21 [!] Bilan Étude complète de la convexité

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $f'(x)$ et déterminer les variations de f.

Corrigé

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit d'un polynôme par une fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+2)\mathrm{e}^{-x} + (x^2+2x+2)(-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (2x+2-x^2-2x-2)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \boxed{-x^2\mathrm{e}^{-x}}. \end{aligned}$$

Pour tout réel x, $x^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f'(x) \leqslant 0$, avec égalité uniquement en $x = 0$. Ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}$ et même **strictement décroissante**, car f' est strictement négative de part et d'autre de 0. En outre $f(0) = 2$.

2. Calculer $f''(x)$ et étudier son signe.

Corrigé

- **Signe de la dérivée seconde.** Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, $f''(x)$ a le signe de $x(x-2)$.
- **Tableau récapitulatif.**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Convexité de f		f convexe		f concave		f convexe	

- **Conclusion.** f'' s'annule et change de signe en 0 et en 2. Ce sont donc les deux abscisses des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

3. Déterminer les intervalles de convexité et les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Corrigé

D'après le signe de f'' établi à la question précédente, f est convexe sur $]-\infty;0]$ et $[2;+\infty[$, puis concave sur $[0;2]$. La dérivée seconde **change de signe** en 0 (de + vers −) et en 2 (de − vers +) : $\mathcal{C}_f$ admet donc deux points d'inflexion. Leurs ordonnées sont

$$\begin{aligned} f(0) &= 2, \\ f(2) &= (2^2+2\times 2+2)\mathrm{e}^{-2} = 10\mathrm{e}^{-2}. \end{aligned}$$

D'où $\boxed{I(0;2) \quad \text{et} \quad J(2;10\mathrm{e}^{-2})}$.

4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 et préciser localement la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Corrigé

On sait que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$. La tangente en 0 a donc pour équation

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= \boxed{2}. \end{aligned}$$

Sur $]-\infty;0]$, f est convexe : sa courbe est **au-dessus** de la tangente $y = 2$ pour $x \leqslant 0$. Sur $[0;2]$, f est concave : sa courbe est **au-dessous** de la même tangente pour $0 \leqslant x \leqslant 2$. Les inégalités sont strictes de part et d'autre de 0 au voisinage du point d'inflexion. Ainsi la courbe traverse sa tangente en $I(0;2)$.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 22, page 23.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 23, page 24.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 22 [+] Consolidation Étude complète de la convexité

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x^2 + 4x + 5)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Calculer $g'(x)$ et déterminer les variations de g.

Corrigé

- **Dérivation.** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Avec $u(x) = x^2 + 4x + 5$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$, on a $u'(x) = 2x + 4$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} g'(x) &= (2x+4)\mathrm{e}^{-x} - (x^2+4x+5)\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-x^2 - 2x - 1)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \boxed{-(x+1)^2\mathrm{e}^{-x}}. \end{aligned}$$

- **Signe.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Par conséquent, $g'(x) \leqslant 0$, avec $g'(x) = 0$ si et seulement si $x = -1$.
- **Variations.** La dérivée est strictement négative sur $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$. Donc g est **strictement décroissante sur** $\mathbb{R}$. Le fait que la dérivée s'annule en un point isolé ne change pas cette conclusion.

2. Calculer $g''(x)$ et étudier son signe.

Corrigé

- **Calcul.** En dérivant $g'(x) = -(x+1)^2\mathrm{e}^{-x}$, on obtient

$$\begin{aligned} g''(x) &= -2(x+1)\mathrm{e}^{-x} + (x+1)^2\mathrm{e}^{-x} \\ &= \boxed{(x+1)(x-1)\mathrm{e}^{-x}}. \end{aligned}$$

- **Signe de la dérivée seconde.** Puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$ sur $\mathbb{R}$, $g''(x)$ a le signe du produit $(x+1)(x-1)$.
- **Tableau de signe et de convexité.**

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $g''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Convexite de g		g convexe		g concave		g convexe	

- **Conclusion.** g'' change de signe en -1 et en 1. Par conséquent g est convexe sur $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$, concave sur $[-1;1]$; la courbe admet deux points d'inflexion d'abscisses -1 et 1.

3. Déterminer les intervalles de convexité et les éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_g$.

Corrigé

- **Convexité.** D'après le signe de g'', la fonction g est convexe sur $]-\infty;-1]$ et $[1;+\infty[$ et concave sur $[-1;1]$.
- **Points d'inflexion.** La dérivée seconde change de signe en -1 et en 1. La courbe $\mathcal{C}_g$ possède donc exactement deux points d'inflexion. Calculons leurs ordonnées :

$$\begin{aligned} g(-1) &= (1-4+5)\mathrm{e} = 2\mathrm{e}, \\ g(1) &= (1+4+5)\mathrm{e}^{-1} = 10\mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{I(-1;2\mathrm{e}) \quad \text{et} \quad J(1;10\mathrm{e}^{-1})}.$$

4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0 et préciser localement la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Corrigé

- **Équation de la tangente.** On a $g(0) = 5$ et, d'après la question 1, $g'(0) = -(0+1)^2\mathrm{e}^0 = -1$. Donc

$$\begin{aligned} y &= g'(0)(x-0) + g(0) \\ &= \boxed{-x+5}. \end{aligned}$$

- **Position relative locale.** Puisque $0 \in]-1;1[$ et que $g''(x) < 0$ sur cet intervalle, g y est strictement concave. Sa courbe est donc située **au-dessous de sa tangente en 0** pour tout $x \in [-1;1]$, avec égalité uniquement pour $x = 0$.

Exercice 23 [*] Approfondissement Une fonction avec parametre

Pour tout reel a, on considere f_a definie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = x^4 - ax^2.$$

1. Calculer $f_a''(x)$.

Corrigé

- **Première dérivation.** Le paramètre a est fixé. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = 4x^3 - 2ax$.
- **Seconde dérivation.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_a''(x) &= 12x^2 - 2a \\ &= \boxed{2(6x^2 - a)}. \end{aligned}$$

2. Selon les valeurs de a, determiner les intervalles de convexite et de concavite de f_a.

Corrigé

- **Cas $a \leqslant 0$.** Pour tout réel x, $f_a''(x) = 2(6x^2 - a) \geqslant 0$, car $6x^2 \geqslant 0$ et $-a \geqslant 0$. Ainsi $\boxed{f_a \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}$. En particulier, si $a = 0$, l'annulation en $x = 0$ ne correspond pas à un changement de signe.
- **Cas $a > 0$.** On pose $r = \sqrt{a/6} > 0$. Alors $f_a''(x) = 12(x - r)(x + r)$ et le signe s'étudie comme celui d'un trinôme de coefficient dominant positif.

x	$-\infty$		$-r$		r		$+\infty$
Signe de $f_a''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Convexité de f_a		f_a convexe		f_a concave		f_a convexe	

On conclut que $\boxed{f_a \text{ est convexe sur }]-\infty; -r] \text{ et } [r; +\infty[}$, et concave sur $[-r; r]$.

3. Etudier le nombre et les coordonnees des points d'inflexion de $\mathcal{C}_{f_a}$ selon les valeurs de a.

Corrigé

- **Si $a < 0$.** On a $f_a''(x) = 12x^2 - 2a > 0$ pour tout réel x. Il n'existe donc aucun point d'inflexion.
- **Si $a = 0$.** On a $f_0''(x) = 12x^2 \geqslant 0$. Bien que $f_0''(0) = 0$, la dérivée seconde **ne change pas de signe** en 0 : il n'y a pas de point d'inflexion.
- **Si $a > 0$.** En posant $r = \sqrt{a/6}$, les signes de f_a'' changent en $-r$ puis en r. Il y a exactement deux points d'inflexion. Or, puisque $r^2 = a/6$,

$$\begin{aligned} f_a(r) &= r^4 - ar^2 \\ &= \frac{a^2}{36} - \frac{a^2}{6} \\ &= -\frac{5a^2}{36}, \end{aligned}$$

et $f_a(-r) = f_a(r)$ puisque f_a est paire.

Ainsi, pour $a > 0$, les points d'inflexion sont

$$\boxed{I\left(-\sqrt{\frac{a}{6}}; -\frac{5a^2}{36}\right) \quad \text{et} \quad J\left(\sqrt{\frac{a}{6}}; -\frac{5a^2}{36}\right)}.$$

Thème VI Exercices du baccalauréat – annales antérieures à 2026

Exercice 24 Exponentielle, tangente et inegalite – Bac 2025

Source : Bac specialite mathematiques, Amerique du Nord, 22 mai 2025, sujet 2, exercice 4, partie A.

On etudie la fonction f definie sur $[0;\pi]$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sin(x).$$

Sa courbe representative dans un repere est notee $\mathcal{C}_f$.

1. a) Etablir que, pour tout $x \in [0;\pi]$,

$$f'(x) = \mathrm{e}^x\big(\sin(x) + \cos(x)\big).$$

b) En deduire que f est strictement croissante sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Corrigé

- **1.a) Calcul de la dérivée.** Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \sin x$ sont dérivables sur $[0;\pi]$. Pour tout $x \in [0;\pi]$, par la formule de dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\mathrm{e}^x)' \sin x + \mathrm{e}^x (\sin x)' \\ &= \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x \\ &= \boxed{\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x)}. \end{aligned}$$

- **1.b) Signe de f'.** Pour tout $x \in [0;\pi/2]$, $\sin x \geqslant 0$ et $\cos x \geqslant 0$. Ils ne s'annulent pas simultanément, donc $\sin x + \cos x > 0$. Comme $\mathrm{e}^x > 0$, on obtient $f'(x) > 0$ sur $[0;\pi/2]$. Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0;\pi/2]}$.

2. a) Determiner une equation de la tangente (T) a $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

b) Justifier que f est convexe sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) En deduire que, pour tout $x \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\mathrm{e}^x \sin(x) \geqslant x.$$

Corrigé

- **2.a) Tangente au point d'abscisse 0.** On calcule $f(0) = \mathrm{e}^0 \sin 0 = 0$ et $f'(0) = \mathrm{e}^0(\sin 0 + \cos 0) = 1$. Une équation de la tangente est

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= \boxed{x}. \end{aligned}$$

- **2.b) Convexité.** Pour tout $x \in [0;\pi]$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x) \\ &= 2\mathrm{e}^x \cos x. \end{aligned}$$

Sur $[0;\pi/2]$, $\mathrm{e}^x > 0$ et $\cos x \geqslant 0$, donc $f''(x) \geqslant 0$. Ainsi f est convexe sur $[0;\pi/2]$.

- **2.c) Application de la propriété des tangentes.** La courbe d'une fonction convexe est au-dessus de chacune de ses tangentes sur son intervalle de convexité. Pour tout $x \in [0;\pi/2]$,

$$f(x) \geqslant f(0) + f'(0)x$$
$$\mathrm{e}^x \sin x \geqslant x.$$

D'où $\boxed{\forall x \in [0;\pi/2], \quad \mathrm{e}^x \sin x \geqslant x}$.

3. Demontrer que le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$ est un point d'inflexion.

Corrigé

- **Signe.** Pour tout $x \in [0;\pi]$, $f''(x) = 2\mathrm{e}^x \cos x$. Puisque $2\mathrm{e}^x > 0$, le signe de f'' est celui de $\cos x$.
- **Tableau récapitulatif.**

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	
Convexité de f		f convexe		f concave	

- **Conclusion.** f est convexe sur $[0;\pi/2]$ et concave sur $[\pi/2;\pi]$. Le signe de f'' change en $\pi/2$, donc $A\big(\pi/2; f(\pi/2)\big)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 25 Exercice de type bac – Exponentielle et point d'inflexion

On considere la fonction f definie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2 - 6x + 10)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe representative dans un repere orthonorme.

1. Montrer que, pour tout reel x, $f'(x) = (x-2)^2\mathrm{e}^x$. En deduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

- **Dérivation.** En appliquant la formule du produit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-6)\mathrm{e}^x + (x^2-6x+10)\mathrm{e}^x \\ &= (x^2-4x+4)\mathrm{e}^x \\ &= \boxed{(x-2)^2\mathrm{e}^x}. \end{aligned}$$

- **Signe.** Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$. Donc $f'(x) \geqslant 0$ avec égalité seulement pour $x = 2$.
- **Variations.** La dérivée est strictement positive sur $]-\infty;2[$ et sur $]2;+\infty[$. On en conclut que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$. Son unique point stationnaire en 2 n'est pas un extremum.

2. Montrer que $f''(x) = x(x-2)\mathrm{e}^x$ pour tout reel x.

Corrigé

- On dérive $f'(x) = (x-2)^2\mathrm{e}^x$ en utilisant la formule du produit :

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(x-2)\mathrm{e}^x + (x-2)^2\mathrm{e}^x \\ &= (x-2)\big[2+(x-2)\big]\mathrm{e}^x \\ &= \boxed{x(x-2)\mathrm{e}^x}. \end{aligned}$$

3. Etudier la convexite de f et determiner les coordonnees des points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

Corrigé

- **Signe.** L'exponentielle est strictement positive, donc $f''(x) = x(x-2)\mathrm{e}^x$ a le signe de $x(x-2)$.
- **Tableau de convexité.**

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Convexite de f		f convexe		f concave		f convexe	

- **Points d'inflexion.** Le signe de f'' change en 0 et en 2. Or

$$\begin{aligned} f(0) &= 10, \\ f(2) &= (4-12+10)\mathrm{e}^2 = 2\mathrm{e}^2. \end{aligned}$$

On conclut que $\boxed{I(0;10) \text{ et } J(2;2\mathrm{e}^2)}$ sont les deux points d'inflexion.

4. Determiner l'equation de la tangente (T) a $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3, puis justifier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et (T) sur $[2;+\infty[$.

Corrigé

- **Tangente.** On a

$$\begin{aligned} f(3) &= (9-18+10)\mathrm{e}^3 = \mathrm{e}^3, \\ f'(3) &= (3-2)^2\mathrm{e}^3 = \mathrm{e}^3. \end{aligned}$$

La tangente au point d'abscisse 3 est donc

$$\begin{aligned} y &= f'(3)(x-3) + f(3) \\ &= \mathrm{e}^3(x-3) + \mathrm{e}^3 \\ &= \boxed{\mathrm{e}^3(x-2)}. \end{aligned}$$

- **Position relative.** D'après la question précédente, $f''(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 2$. La fonction est convexe sur $[2;+\infty[$: sa courbe est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur cet intervalle. Puisque $3 \in [2;+\infty[$, on a

$$\boxed{\forall x \geqslant 2, \quad f(x) \geqslant \mathrm{e}^3(x-2)}.$$

L'égalité est réalisée au point de tangence $x = 3$; elle est stricte pour $x \neq 3$ puisque f est strictement convexe sur $]2;+\infty[$.

Exercice 26 Convexité, variations et fonction auxiliaire – Bac 2025

Source : Bac specialite, Amerique du Nord, 22 mai 2025, sujet 2 de secours, exercice 1, partie A.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Corrigé

En $+\infty$, par croissance comparée,

$$x\mathrm{e}^{-x} = \frac{x}{\mathrm{e}^x} \longrightarrow 0.$$

De plus $2x - 1 \longrightarrow +\infty$. Par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}.$$

En $-\infty$, on a $-x \to +\infty$ et $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$, donc $x\mathrm{e}^{-x} \to -\infty$. De plus, $2x - 1 \to -\infty$. Par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}.$$

2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.

Corrigé

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables.
- En appliquant la formule du produit à $x\mathrm{e}^{-x}$, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) + 2 \\ &= (1-x)\mathrm{e}^{-x} + 2. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x} + 2}$.

3. Montrer que, pour tout réel x, on a $f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.

Corrigé

- En dérivant $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x} + 2$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-1)\mathrm{e}^{-x} + (1-x)(-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= (-1-1+x)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \boxed{(x-2)\mathrm{e}^{-x}}. \end{aligned}$$

4. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer les coordonnées de son point d'inflexion.

Corrigé

- **Signe de f''.** Pour tout réel x, on a $f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$. Puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$, la dérivée seconde a le signe de $x - 2$.
- **Tableau de signe et de convexité.**

x	$-\infty$		2		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		f concave		f convexe	

- **Point d'inflexion.** La dérivée seconde s'annule **en changeant de signe** en 2. La courbe de f admet donc un unique point d'inflexion $I(2; f(2))$, avec

$$\begin{aligned} f(2) &= 2\mathrm{e}^{-2} + 2 \times 2 - 1 \\ &= 3 + 2\mathrm{e}^{-2}. \end{aligned}$$

D'où $\boxed{I(2; 3 + 2\mathrm{e}^{-2})}$.

5. En déduire les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et déterminer son minimum.

Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Par conséquent,

- sur $]-\infty; 2[$, $f''(x) < 0$, donc f' est strictement décroissante ;
- en $x = 2$, $f''(2) = 0$;
- sur $]2; +\infty[$, $f''(x) > 0$, donc f' est strictement croissante.

Le tableau de variations de f' est donc :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2 - \mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	2

La fonction f' admet donc un minimum global en $x = 2$:

$$\begin{aligned} f'(2) &= (1-2)\mathrm{e}^{-2} + 2 \\ &= \boxed{2 - \mathrm{e}^{-2}}. \end{aligned}$$

Les limites figurant aux extrémités du tableau se déduisent de l'expression $f'(x) = (1-x)\mathrm{e}^{-x} + 2$ et des croissances comparées.

6. Justifier que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Le minimum de f' sur $\mathbb{R}$ vaut $2-\mathrm{e}^{-2}$. Puisque $-2<0$ et que l'exponentielle est croissante,

$$0<\mathrm{e}^{-2}<\mathrm{e}^{0}=1, \qquad \text{donc} \qquad 2-\mathrm{e}^{-2}>1>0.$$

Il en résulte que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)\geqslant 2-\mathrm{e}^{-2}>0.$$

Par le théorème de monotonie, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

7. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$; en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Corrigé

- **Continuité.** La fonction $f : x\mapsto x\mathrm{e}^{-x}+2x-1$ est continue sur $\mathbb{R}$, car elle est somme et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
- **Stricte monotonie.** D'après la question précédente, $f'(x)>0$ pour tout réel x. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- **Valeurs aux bornes.** Les limites calculées à la première question sont :

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty<0<+\infty=\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

  Le tableau récapitulatif est donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$+\infty$

- **Application du corollaire du TVI.** La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et 0 est strictement compris entre ses limites aux bornes. D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x)=0$ admet **exactement une solution** $\alpha\in\mathbb{R}$.
- **Encadrement.** Les calculs donnent

  $$f(0{,}37)\approx -0{,}00443<0,$$
  $$f(0{,}38)\approx 0{,}01987>0.$$

  La stricte croissance de f entraîne alors $\boxed{0{,}37<\alpha<0{,}38}$, encadrement d'amplitude $0{,}01=10^{-2}$.

8. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y=2x-1$.

Corrigé

- **Différence des ordonnées.** Posons $d(x) = 2x - 1$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) - d(x) &= x\mathrm{e}^{-x} + 2x - 1 - (2x - 1) \\ &= x\mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

- **Signe.** Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, le signe de $f(x) - d(x)$ est celui de x : négatif si $x < 0$, nul si $x = 0$, positif si $x > 0$.
- **Interprétation graphique.** La courbe $\mathcal{C}_f$ est strictement au-dessous de la droite $y = 2x-1$ sur $]-\infty;0[$, elle la coupe en $A(0;-1)$ et elle est strictement au-dessus sur $]0;+\infty[$.

Exercice 27 Fonction auxiliaire et maximum – Bac S Nouvelle-Calédonie 2019

Source : Bac S, Nouvelle-Calédonie, mars 2019, exercice 2 (hors calcul d'aire).

Partie A – Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-4} - 2.$$

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Corrigé

- Lorsque $x \to +\infty$, on a $x+2 \to +\infty$ et $\mathrm{e}^{x-4} \to +\infty$; ces deux facteurs sont positifs à partir d'un certain rang.
- Leur produit tend donc vers $+\infty$. En retranchant la constante 2, on conclut

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}.$$

2. Justifier que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -2$.

Corrigé

- On écrit

$$(x+2)\mathrm{e}^{x-4} = \mathrm{e}^{-4}(x\mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{x}).$$

- Par croissance comparée, $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$, et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$. Le facteur constant e^{-4} ne change pas la limite : $(x+2)\mathrm{e}^{x-4} \to 0$.
- Par différence,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} g(x) = -2}.$$

3. Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variations de g.

Corrigé

Pour tout réel x, en utilisant la dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \mathrm{e}^{x-4} + (x+2)\mathrm{e}^{x-4} \\ &= \boxed{(x+3)\mathrm{e}^{x-4}}. \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{e}^{x-4} > 0$ sur $\mathbb{R}$, g' est du signe de $x+3$: elle est négative si $x < -3$, nulle pour $x = -3$ et positive si $x > -3$. Ainsi g décroît sur $]-\infty;-3]$, puis croît sur $[-3;+\infty[$.

$$\begin{aligned} g(-3) &= (-1)\mathrm{e}^{-7} - 2 \\ &= \boxed{-2 - \mathrm{e}^{-7} < 0}. \end{aligned}$$

En tenant compte des limites et de la valeur en -3, le tableau de variations complet est :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-2	↘	$-2-\mathrm{e}^{-7}$	↗	$+\infty$

Ce tableau met en évidence un minimum strictement négatif et une unique branche croissante susceptible de couper l'axe des abscisses.

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

- **Continuité.** La fonction $g : x \mapsto (x+2)\mathrm{e}^{x-4} - 2$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme somme et produit de fonctions continues.
- **Recherche des solutions sur $]-\infty;-3]$.** D'après le tableau de variations, g est strictement décroissante sur cet intervalle, avec $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -2$ et $g(-3) = -2 - \mathrm{e}^{-7}$. Par conséquent $g(x) < -2 < 0$ pour tout $x \leqslant -3$: **aucune solution** de $g(x) = 0$ sur cet intervalle.
- **Sur $[-3;+\infty[$.** La fonction g est continue et strictement croissante sur $[-3;+\infty[$. De plus :

  $$g(-3) = -2 - \mathrm{e}^{-7} < 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty > 0.$$

  D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x) = 0$ admet **exactement une solution** $\alpha \in]-3;+\infty[$.
- **Conclusion.** Aucune solution n'existe sur $]-\infty;-3]$ et une seule existe sur $]-3;+\infty[$. Donc $\boxed{g(x) = 0 \text{ admet une unique solution réelle } \alpha}$.

5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Compte tenu du tableau de variations et de l'unique zéro :

$$\boxed{\begin{cases} g(x) < 0 & \text{si } x < \alpha, \\ g(\alpha) = 0, & \\ g(x) > 0 & \text{si } x > \alpha. \end{cases}}$$

.

6. À la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-3} de α.

Corrigé

À la calculatrice, $g(3{,}069) \approx -0{,}002006 < 0$ et $g(3{,}070) \approx 0{,}000387 > 0$. Par continuité et stricte croissance de g sur $[-3;+\infty[$, $\boxed{3{,}069 < \alpha < 3{,}070}$, encadrement d'amplitude 10^{-3}.

Partie B – Étude d'une deuxième fonction

On définit f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4}.$$

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.

Corrigé

- **Factorisation.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2(1 - \mathrm{e}^{x-4})$.
- **Produit nul.** On a

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x^2 = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - \mathrm{e}^{x-4} = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^{x-4} = 1 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 4 = 0. \end{aligned}$$

  La dernière équivalence utilise la stricte croissance de l'exponentielle et $\mathrm{e}^0 = 1$.

D'où $\boxed{S = \{0;4\}}$.

2. On admet que, pour tout réel x, $f'(x) = -xg(x)$, où g est la fonction de la partie A. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

- **Résultats antérieurs.** La partie A a montré qu'il existe une unique racine α de g, avec $\alpha > 0$, telle que $g(x) < 0$ si $x < \alpha$ et $g(x) > 0$ si $x > \alpha$.
- **Signe de $f'(x) = -xg(x)$.** On étudie séparément les deux facteurs :
  - si $x < 0$, $-x > 0$ et $g(x) < 0$, donc $f'(x) < 0$;
  - si $0 < x < \alpha$, $-x < 0$ et $g(x) < 0$, donc $f'(x) > 0$;
  - si $x > \alpha$, $-x < 0$ et $g(x) > 0$, donc $f'(x) < 0$.

  La dérivée s'annule en 0 et en α.

- **Variations.** On en déduit que f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, strictement croissante sur $[0;\alpha]$, puis strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$. En particulier, $f(0)=0$, et f atteint un maximum sur $[0;+\infty[$ en α.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3. Montrer que le maximum de f sur $[0;+\infty[$ est égal à $\dfrac{\alpha^3}{\alpha+2}$.

Corrigé

D'après la question précédente, f est croissante sur $[0;\alpha]$, puis décroissante sur $[\alpha;+\infty[$. Elle atteint donc son maximum sur $[0;+\infty[$ en $x=\alpha$. Comme $g(\alpha)=0$,

$$\begin{aligned}(\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-4}-2&=0\\ \mathrm{e}^{\alpha-4}&=\frac{2}{\alpha+2}.\end{aligned}$$

Ce quotient est défini et strictement positif puisque $\alpha>-3$ et, d'après son encadrement numérique, $\alpha>0$. D'où

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\alpha^2(1-\mathrm{e}^{\alpha-4})\\ &=\alpha^2\left(1-\frac{2}{\alpha+2}\right)\\ &=\boxed{\frac{\alpha^3}{\alpha+2}}.\end{aligned}$$

Partie C – Position relative à une parabole

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y=x^2$ dans un repère orthonormé. Déterminer leur position relative sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

- **Différence des ordonnées.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f(x)-x^2&=x^2-x^2\mathrm{e}^{x-4}-x^2\\ &=-x^2\mathrm{e}^{x-4}.\end{aligned}$$

- **Signe.** Comme $x^2\geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{x-4}>0$, on a $-x^2\mathrm{e}^{x-4}\leqslant 0$ pour tout réel x. L'égalité a lieu si et seulement si $x=0$.
- **Conclusion.** La courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessous de la parabole $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{R}$ et elles possèdent pour unique point commun $O(0;0)$.

Exercice 28 Le logo d'un T-shirt – Bac S Antilles-Guyane 2018

Source : Bac S, Antilles-Guyane, 19 juin 2018, exercice 3 (énoncé complet).

Un publicitaire souhaite imprimer le logo ci-dessous sur un T-shirt :



Il dessine ce logo à l'aide des courbes de deux fonctions

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \quad \text{et} \quad g(x) = -\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

Partie A – Étude de f

1. Justifier que, pour tout réel x, $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}$.

Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, comme $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} -1 &\leqslant -\cos x \leqslant 1, \\ -1 &\leqslant \sin x \leqslant 1. \end{aligned}$$

En additionnant ces deux inégalités et 1, on obtient

$$-1 \leqslant -\cos x + \sin x + 1 \leqslant 3.$$

Or $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout réel x : multiplier par ce facteur conserve l'ordre, et donc

$$\boxed{-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}}.$$

2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Corrigé

- On sait que, pour tout réel x, $-\mathrm{e}^{-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-x}$.
- Or $\mathrm{e}^{-x} = 1/\mathrm{e}^{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty}(-\mathrm{e}^{-x}) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

- D'après le **théorème des gendarmes**,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}.$$

3. Démontrer que $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)$ pour tout réel x.

Corrigé

Par la règle du produit,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) \\ &\quad + \mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x) \\ &= \boxed{\mathrm{e}^{-x}(2\cos x - 1)}. \end{aligned}$$

4. Sur $[-\pi;\pi]$:

a) déterminer le signe de $f'(x)$;

b) dresser le tableau de variations de f.

Corrigé

a) Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, f' a le signe de $2\cos x - 1$. Sur $[-\pi;\pi]$, il est positif sur $]-\pi/3;\pi/3[$, nul aux bornes, négatif sur $[-\pi;-\pi/3[$ et $]\pi/3;\pi]$. b) La fonction f décroît sur $[-\pi;-\pi/3]$, croît sur $[-\pi/3;\pi/3]$, puis décroît sur $[\pi/3;\pi]$. Les valeurs utiles sont

$$\begin{aligned} f(-\pi) &= 2\mathrm{e}^{\pi}, \\ f(-\pi/3) &= \frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\pi/3}, \\ f(\pi/3) &= \frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\pi/3}, \\ f(\pi) &= 2\mathrm{e}^{-\pi}. \end{aligned}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2\mathrm{e}^{\pi}$	↘	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\pi/3}$	↗	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\pi/3}$	↘	$2\mathrm{e}^{-\pi}$

Partie B – Position relative des deux courbes

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes de f et de g dans un repère orthonormé, avec une unité graphique de 2 cm. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= \mathrm{e}^{-x}(-\cos x + \sin x + 1) + \mathrm{e}^{-x}\cos x \\ &= \boxed{\mathrm{e}^{-x}(1+\sin x)}. \end{aligned}$$

Or $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $1 + \sin x \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $f(x) - g(x) \geqslant 0$. On conclut que, sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_g$. L'égalité est réalisée lorsque $\sin x = -1$, soit

$$\boxed{x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}}.$$

Question facultative – NON À FAIRE dans ce TD : nécessite l'intégration.
Cette partie est conservée pour respecter l'énoncé du Bac ; elle pourra être reprise après le chapitre sur les intégrales.
Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(x) = \left(-\frac{\cos x}{2} - \frac{\sin x}{2} - 1\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que H est une primitive de la fonction $x \mapsto (\sin x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$.

a) Hachurer le domaine $\mathcal{D}$ sur le graphique en annexe à rendre avec la copie.

Corrigé

Le domaine $\mathcal{D}$ est compris entre $\mathcal{C}_f$ (au-dessus) et $\mathcal{C}_g$ (au-dessous), pour $-\pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$: hachurer la bande comprise entre les deux courbes.

b) Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$, puis en donner une valeur approchée à 10^{-2} près en cm^2.

Corrigé

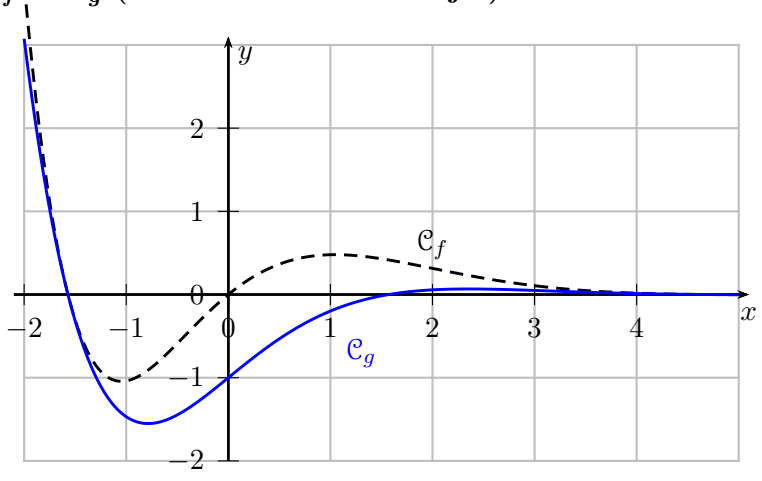
La courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle considéré. L'aire en unités d'aire vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\ &= H\left(\frac{3\pi}{2}\right) - H\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\pi/2} - \mathrm{e}^{-3\pi/2}\right)}.\end{aligned}$$

L'unité graphique est de 2 cm, donc une unité d'aire correspond à $4\,\mathrm{cm}^2$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{A} \approx 9{,}60\,\mathrm{cm}^2}.$$

Annexe – Courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ (à conserver dans le sujet)



Thème VII Devoirs à la maison – DM

Exercice 29 DM 1 – Variations, convexité et tangente

On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par

$$f(x) = (x^2 + 4x)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f sur $[0;5]$.
2. Calculer $f''(x)$ et en déduire les intervalles de convexité de f sur $[0;5]$. Déterminer les coordonnées de son éventuel point d'inflexion.
3. Donner une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessous de (T) sur $[0;5]$.

Exercice 30 DM 2 – Convexité et tangentes : deux points d'inflexion

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

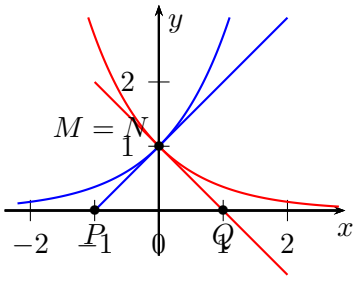
$$g(x) = (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^{x}.$$

On note $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Montrer que $g'(x) = x^2\mathrm{e}^x$ et étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $g''(x)$ et déterminer les intervalles de convexité et les points d'inflexion de $\mathcal{C}_g$.
3. Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0.
4. En utilisant la convexité et la concavité de g, comparer $g(x)$ et 2 sur chacun des intervalles $[-2;0]$ et $[0;+\infty[$. Préciser les cas d'égalité.

Exercice 31 DM 3 – Deux tangentes perpendiculaires – Bac S 2017

On considère, sur $\mathbb{R}$, les fonctions $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes respectives dans un repère orthonormé. Pour chaque réel a, M est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a et N celui de $\mathcal{C}_g$ de même abscisse. La tangente en M à $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en P ; la tangente en N à $\mathcal{C}_g$ coupe cet axe en Q.



Un logiciel de géométrie et un tableur ont permis de relever les longueurs suivantes :

a	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$
PQ	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Démontrer que les tangentes en M et N sont perpendiculaires.
2. a) Émettre une conjecture sur la longueur PQ.
   b) Démontrer cette conjecture pour tout réel a.

Thème VIII Vers le supérieur – défis facultatifs

Exercice 32 [*] Approfondissement DM 4 – Une inégalité exponentielle renforcée

Soit h définie sur $[0;+\infty[$ par

$$h(x) = \mathrm{e}^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

1. Calculer $h''(x)$ et démontrer que h est convexe sur $[0;+\infty[$.
2. Déterminer la tangente à la courbe de h en 0 et en déduire que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\boxed{\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}}.$$

Exercice 33 [*] Approfondissement DM 5 – Des cordes à l'inégalité de Jensen

Partie A – Paramétrer une corde et démontrer une inégalité

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. On considère deux réels x et y de I tels que $x < y$. On note $A\big(x;f(x)\big)$ et $B\big(y;f(y)\big)$ les points correspondants de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Soit M un point quelconque du segment $[AB]$.

1. Justifier qu'il existe un réel $t \in [0;1]$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}.$$

Interpréter géométriquement les valeurs $t = 0$, $t = \dfrac{1}{2}$ et $t = 1$.

2. En notant $(x_M;y_M)$ les coordonnées de M, exprimer $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ à l'aide des coordonnées de A, B et M. En déduire que

$$\boxed{M\Big((1-t)x + ty \ ; \ (1-t)f(x) + tf(y)\Big)}.$$

3. On note P le point de $\mathcal{C}_f$ ayant la même abscisse que M. En utilisant uniquement la définition géométrique de la convexité, démontrer que

$$\boxed{\forall t \in [0;1], \quad f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y)}.$$

En déduire, en remplaçant t par $1-t$, que

$$\boxed{f\big(tx + (1-t)y\big) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y)}.$$

4. Quelle valeur de t permet de retrouver l'inégalité au milieu d'une corde ? Que devient l'inégalité lorsque $x = y$?

Partie B – Appliquer une forme de l'inégalité de Jensen

On admet la généralisation suivante, dite inégalité de Jensen : pour tout entier $n \geqslant 2$ et tous $x_1, \ldots, x_n \in I$,

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

1. Appliquer cette propriété à $f(x) = 1/x$ sur $]0;+\infty[$ et démontrer que, pour tous réels $a_1, \ldots, a_n > 0$,

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}\right) \geqslant n^2}.$$

2. Appliquer Jensen à la fonction exponentielle et établir, pour tous réels $x_1, \dots, x_n$,

$$\boxed{\mathrm{e}^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{x_1}+\cdots+\mathrm{e}^{x_n}}{n}}.$$

Fin du TD