MATH93

Terminale Spécialité

Recueil d'exercices – Entraînement – Méthodes

TD – EXERCICES

Chapitre 7 – TD

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Version sujet – Version iPad

Sommaire du TD

I Continuité 2

II Le TVI, c'est ma passion ... Suivez le guide 8

III EPI et exercices plus théoriques 19

IV Points fixes et suites récurrentes 21

V En route vers le bac 29

VI Devoir maison 36

Objectifs

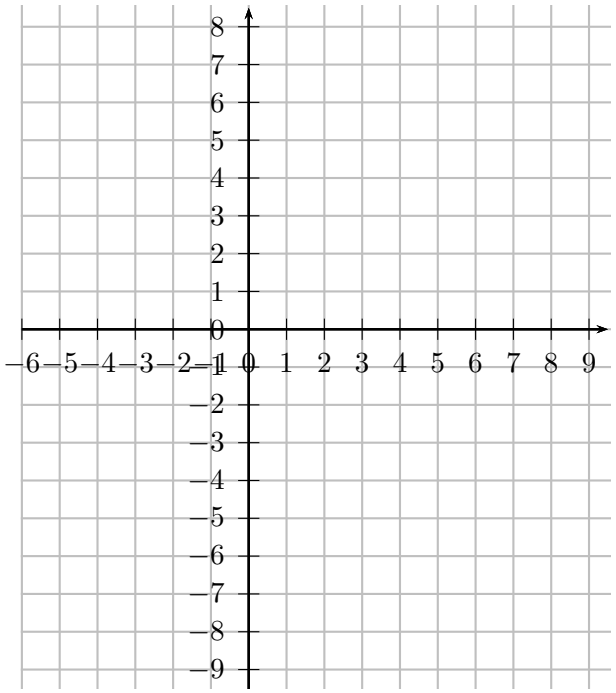
- Étudier la continuité d'une fonction, notamment par morceaux.
- Utiliser le TVI et son corollaire pour dénombrer les solutions.
- Encadrer une solution par balayage et dichotomie avec Python.
- Étudier des fonctions auxiliaires et les applications économiques.
- Résoudre des exercices à prise d'initiative et justifier des affirmations.

Thème I Continuité

Exercice 1 Un peu d'algorithmique (c)

1. Écrire un algorithme qui permet de calculer l'image d'une valeur demandée, par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h : x \longmapsto h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$



2. Tracer $\mathscr{C}_h$ dans le repère ci-contre.

3. La fonction h est-elle continue ? Justifier en utilisant la définition du cours (calculer les limites à droite et à gauche ...).

Exercice 2 Une autre fonction définie par morceaux (c)

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ -\mathrm{e}^{x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 3 [!] Bilan Continuité, représentation et Python

On considère, pour tout réel a, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_a(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0, \\ x^2 + a & \text{si } 0 \leqslant x < 2, \\ 5 - x & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

1. Écrire en Python une fonction `h(x,a)` qui renvoie l'image de x par h_a.
2. Calculer $h_a(0)$ et $h_a(2)$, puis déterminer les limites à gauche et à droite en 0 et en 2.
3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles h_a est continue en 0, puis en 2. Peut-elle être continue sur $\mathbb{R}$?
4. Pour $a = 1$, tracer les trois morceaux de la courbe sur $[-2; 4]$, en distinguant les points inclus et exclus.
5. Pour $a = 1$, déterminer si h_a est dérivable en 0.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 4, page 5.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 5, page 6.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 4 [+] Consolidation Continuité, représentation et Python

On considère, pour tout réel a, la fonction k_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$k_a(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < 0, \\ x^2 + a & \text{si } 0 \leqslant x < 2, \\ 8 - x & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

1. Écrire en Python une fonction `k(x,a)` qui renvoie $k_a(x)$.
2. Calculer $k_a(0)$ et $k_a(2)$, puis les limites à gauche et à droite aux deux points de raccordement.
3. Pour quelles valeurs de a la fonction est-elle continue en 0, puis en 2 ? Est-elle continue sur $\mathbb{R}$ pour l'une de ces valeurs ?
4. Pour $a = 2$, tracer la courbe sur $[-2; 4]$, en distinguant les extrémités incluses et exclues.
5. Pour $a = 2$, étudier la dérivabilité en 0.

Exercice 5 [*] Approfondissement Deux raccordements à imposer

On considère les fonctions $H_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$H_{a,b}(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x < 0, \\ x^2+bx+1 & \text{si } 0 \leqslant x < 2, \\ 3x-1 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

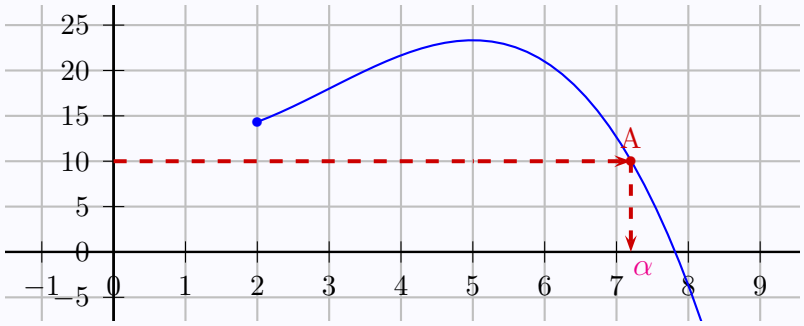
1. Écrire en Python une fonction `H(x,a,b)` renvoyant $H_{a,b}(x)$.
2. Déterminer les réels a et b pour lesquels $H_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0.
3. Pour ces valeurs, étudier la dérivabilité en 2.
4. Tracer l'allure de la courbe sur $[-2;4]$, en justifiant les raccordements.

Thème II

Le TVI, c'est ma passion ... Suivez le guide

Exemple guidé 1 – Résolution de $f(x) = 10$

On considère la fonction f définie sur $[2\,;+\infty[$ par : $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 15$.



1. Donner rapidement la limite de f en $+\infty$.

Pour tout réel x de $[2\,;+\infty[$ on a :

$$f(x) = x^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{15}{x^3}\right)$$

Or d'après les limites des fonctions de références :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{15}{x^3}$$

De ce fait :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{15}{x^3}\right) = -\dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2. Étudier les variations de f sur $[2\,;+\infty[$.

- La fonction f est définie sur $[2\,;+\infty[$ donc continue et dérivable sur cet intervalle car c'est une fonction polynôme.
- Pour tout réel x de $[2\,;+\infty[$ on a $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 15$ donc :

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{3} + 3 \times 2x - 5 = \underline{-x^2 + 6x - 5}$$

- Cas général sur $\mathbb{R}$: étude de $x \longmapsto -x^2 + 6x - 5$ sur $\mathbb{R}$ (on ne la nomme pas).
  La fonction $x \longmapsto -x^2+6x-5$ une fonction polynôme du second degré de la forme ax^2+bx+c avec :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -5 \end{cases} \Longrightarrow \Delta = 16 > 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-6+\sqrt{16}}{-2} = 1 \notin [2\,;+\infty[\\ x_2 = \dfrac{-6-\sqrt{16}}{-2} = 5 \in [2\,;+\infty[\end{cases}$$

  Le discriminant étant positif strictement, le trinôme $(-x^2 + 6x - 5)$ a deux deux racines réelles. Il est du signe de $a = -1 < 0$ soit négatif à l'extérieur des racines et positif ailleurs.

Suite de l'exemple guidé : résolution de $f(x) = 10$.

- Retour sur la dérivée sur $[2\,;+\infty[$. La dérivée f' est donc positive de 2 à 5 et négative ailleurs soit le tableau de variations suivant :

x	2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$f(2)\approx 14.3$	↗	$f(5)\approx 23.3$	↘	$-\infty$

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=10$.

x	2		5		α		$+\infty$
Variations de f	$f(2)\approx 14.3$	↗	$f(5)\approx 23.3$	↘	10	↘	$-\infty$

Méthode 1 (Nombre de solutions d'une équation et TVI)

On va appliquer le corolaire du TVI sur chaque intervalle où la fonction est monotone. On va essayer d'en éliminer certains qui ont un maximum ou un minimum qui permettent d'affirmer la non-existence de solution.

- Sur $[2\,;5]$.
  Sur l'intervalle $[2\,;5]$, la fonction f admet $f(2)\approx 14,3$ comme minimum. De ce fait, l'équation $f(x)=10$ n'admet pas de solution.

- Sur $[5\,;+\infty[$:
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[5\,;+\infty[$;
  - On a $k=10$ compris entre $f(5)\approx 23,3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x)=10$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[5\,;+\infty[$.
- Bilan : sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=10$ admet donc une unique solution α.

3. Déterminer un encadrement et une valeur approchée de α au centième.

Méthode 2 (Encadrement et approximation de la solution d'une équation par balayage)

On cherche à encadrer α. On va utiliser la fonction ***TABLE*** de la calculatrice en partant de la borne inférieure de l'intervalle (ici on part de 5 sur $[5\,;8]$ par exemple). On réglera le ***PAS*** ou ***STEP*** progressivement sur 1, puis sur 0,1 et enfin sur 0,01 à l'aide du ***MENU TABLE SET*** afin d'affiner l'encadrement mais on ne présente sur sa copie que l'encadrement final demandé.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient : $\left\{\begin{array}{|lcl} f(7,20) &\approx& 10,104>10 \\ f(7,21) &\approx& 9,97<10 \end{array}\right.$, donc $\boxed{7,20<\alpha<7,21}$.

Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\alpha\approx 7,20$ (ou $\alpha\approx 7,21$).

Exercice 6 Suivons le guide

On va reprendre les questions de l'exemple 1 avec une autre fonction. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f : \begin{cases} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{3}\,x^3 - 4x^2 + 12x + 1 \end{cases}$$

1. Montrer rapidement que f est continue et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
3. Déterminer sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 40$.

4. Donner une valeur approchée de la (ou des) solution(s) au centième.
5. **Avec une suite**.
   Soit (u_n) la suite définie par :
   $$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
   Démontrer par récurrence que pour n entier, $8 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.
   En déduire que la suite (u_n) est croissante.
6. **Une égalité**.
   On note α la solution de l'équation $f(x) = 40$ de la question (4.).
   Montrer que α vérifie l'égalité :
   $$\alpha^3 = 12\alpha^2 - 36\alpha + 117$$

Exercice 7 Courbe de la dérivée !!

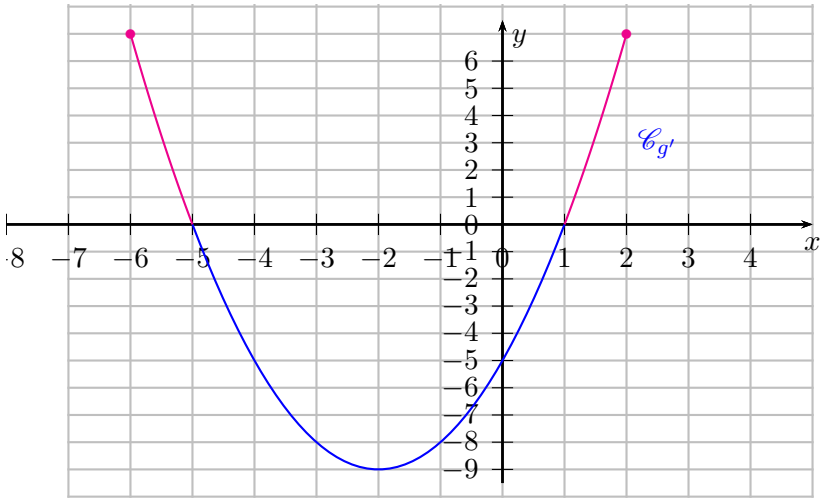
Point Bac : Danger, on donne la courbe de la dérivée, pas de la fonction.
C'est une question classique.

Méthode 3

On donne la courbe de la dérivée et il faut en déduire le tableau de variation de la fonction. Une chose à retenir :

« CE QUI NOUS INTÉRESSE SUR LA DÉRIVÉE C'EST SON **SIGNE** »

On va donc établir un tableau de signe de la fonction tracée, c'est à dire regarder pour quelles valeurs de x sa courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, et en-dessous.



On a ci-dessus construit la courbe représentative de la fonction g', la dérivée d'une fonction g, définie et dérivable sur $[-6\,;\,2]$.

1. D'après le graphique, dresser le tableau de variation de g sur $[-6\,;\,2]$.

2. La fonction g est en fait la fonction :

$$g : \begin{cases} [-6\,;\,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 1 \end{cases}$$

2. a. Déterminer la dérivée de g sur $[-6\,;\,2]$ puis étudier son signe sur cet intervalle.

2. b. En déduire les variations de g sur $[-6\,;\,2]$. On fera clairement figurer les images par g des bornes de l'intervalle d'étude et des racines de g'.

2. c. Vérifiez que ces résultats sont cohérents avec ceux de la question **1.**

3. Approximation de la solution d'une équation.
On cherche à résoudre l'équation $g(x) = 5$. C'est une équation de degré 3 que l'on ne sait pas résoudre à notre niveau.

3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 5$ admet une unique solution α sur $[-6\,;\,2]$. Donner un intervalle comprenant α sur lequel la fonction est monotone.

3. b. Donner une valeur une valeur approchée de α au centième.

Exercice 8 (Spoil Alert !) Une fonction auxiliaire g pour étudier f et des applications (c)

Point Bac : Utilisation d'une fonction auxiliaire.
C'était un grand classique il y a quelques années. On rencontre tout de même encore assez souvent ce genre d'exercice.

Méthode 4

On introduit une fonction g qui va en fait permettre d'étudier le signe de la dérivée de f (la dérivée f' s'exprime en fonction de g et d'un facteurs positif très souvent).
Il faut donc ne pas perdre de vue que l'unique intérêt de g, est son SIGNE. On va donc :

- Étudier les variations de g.
- Résoudre l'équation $g(x) = 0$. Pour cela on utilise le TVI pour dénombrer les solutions puis on trouve des valeurs approchées de ces dernières.
- En déduire le signe de g. On utilisera généralement le tableau de variation de g en plaçant les solutions de l'équation $g(x) = 0$.
- Le signe de g nous donne alors celui de f' et donc les variations de f.

On considère la fonction f définie sur $[0,5\,;\,10]$ par :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,5\,;\,10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2\,x^3 - 3\,x^2 + x + 5}{x} \end{array} \right.$$

1. Calculer la dérivée de f et vérifier que pour tout x de $[0,5\,;\,10]$:

$$f'(x) = \frac{4\,x^3 - 3\,x^2 - 5}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

2. Étude d'une fonction auxiliaire g.
On considère la fonction g définie sur $[0,5\,;\,10]$ par $g(x) = 4\,x^3 - 3\,x^2 - 5$.

2. a. Expliquer rapidement pourquoi f' est du signe de g sur $[0,5\,;\,10]$.

2. b. Étudier les variations de la fonction g sur $[0,5\,;\,10]$.

2. c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0,5\,;\,10]$ et en donner un encadrement au millième.

2. d. En déduire le signe de g sur $[0,5\,;\,10]$.

2. e. En déduire alors les variations de f sur $[0,5\,;\,10]$.

3. Applications économiques.
Le coût moyen de production d'une entreprise est donné par $f(x)$ où x est la quantité produite en milliers d'unités, variant de 0,5 à 10 milliers d'unités de production, et $f(x)$ est exprimée en centaines d'euros.

3. a. Déterminer une valeur approchée à l'unité, du coût moyen minimum de production.

3. b. Déterminer, à partir de quelle production, le coût moyen dépasse les 10 600 euros.

4. Complément (question indépendante de la question 3).

4. a. Montrer que α vérifie l'égalité :

$$f(\alpha) = -\frac{3}{2}\alpha + 1 + \frac{15}{2\alpha}$$

4. b. On suppose que $1 < \alpha < 1,5$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Exercice 9 Encore une fonction auxiliaire

On cherche à étudier la fonction f définie sur $]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^3+2}{x^2-1}$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x-4$.

1. a. Dresser le tableau de variations de g (justifier).

1. b. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution réelle α , et déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x.

1. c. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

2. Justifier que f est dérivable sur $]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ et vérifier que :

$$f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

3. En déduire les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Complément.

4. a. Montrer que α vérifie l'égalité :

$$f(\alpha)=\frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$$

4. b. On suppose que $2<\alpha<3$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Exercice 10 [!] Bilan Fonction auxiliaire, variations et TVI

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{x^3+2x+4}{x}, \qquad \text{et la fonction } g(x)=2x^3-4.$$

1. Calculer les limites de f en 0 (à droite) et en $+\infty$.
2. Justifier que f est continue et dérivable sur $[1;5]$, puis vérifier que
$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}.$$
3. Étudier les variations de g sur $[1;5]$. Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1;2[$.
4. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} et en déduire le signe de g sur $[1;5]$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur $[1;5]$, en exprimant $f(\alpha)$ aussi simplement que possible à l'aide de α.
6. En justifiant le nombre de solutions sur chacun des intervalles de monotonie, déterminer combien de solutions admet l'équation $f(x)=7$ sur $[1;5]$.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 11, page 17.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 12, page 18.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 11 [+] Consolidation Fonction auxiliaire, variations et TVI

On considère la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par

$$F(x)=\frac{x^3+3x+8}{x}, \qquad G(x)=2x^3-8.$$

1. Calculer les limites de F en 0 (à droite) et en $+\infty$.
2. Justifier que F est continue et dérivable sur $[1;5]$ et vérifier que $F'(x)=\dfrac{G(x)}{x^2}$.
3. Étudier les variations de G puis démontrer que $G(x)=0$ possède une unique solution β dans $]1;2[$.
4. Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} puis le signe de G.
5. En déduire le tableau de variations de F et simplifier $F(\beta)$ à l'aide de l'égalité $G(\beta)=0$.
6. Déterminer le nombre de solutions de $F(x)=12$ sur $[1;5]$, en justifiant chaque intervalle étudié.

Exercice 12 [*] Approfondissement Un niveau variable et le nombre de solutions

On considère la fonction f et le réel α du Bilan précédent.

1. Retrouver les variations de f en utilisant la fonction auxiliaire $g(x) = 2x^3 - 4$.
2. On note $m = f(\alpha)$. Pour tout réel k, discuter, selon la valeur de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ dans $[1; 5]$.
3. Montrer que, pour tout k tel que $m < k < \min\{f(1), f(5)\}$, cette équation admet exactement deux solutions, puis proposer un algorithme Python de dichotomie renvoyant un encadrement de l'une d'elles.

Thème III EPI et exercices plus théoriques

Un exercice à prise d'initiative (EPI) est un exercice non guidé. Le candidat devra faire preuve d'initiative, introduire une fonction par exemple permettant de résoudre le problème posé.

Exercice 13 EPI : Résolution d'une équation (c)

Résoudre sur l'intervalle $[1\,;\,9]$ l'équation (E) :

$$2x^3 + 3x^2 - 120x + 1 = 0$$

Exercice 14 Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier avec soin votre raisonnement. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ telle que :

- la fonction g est dérivable et strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$;
- On a : $g(0) = 5$ et $g(1) = 2$.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = \Big(g(x)\Big)^2$$

Alors l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ 1]$.

Affirmation 2

Soit m un réel et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = -x^2 + m & \text{si } \ x \leqslant 3 \\ h(x) = -2x - 1 & \text{si } \ x > 3 \end{cases}$$

La fonction h n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, quelle que soit la valeur de m.

Thème IV Points fixes et suites récurrentes

Exercice 15 EPI : Point fixe (c)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, à valeurs dans $[0\,;\,1]$.
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0\,;\,1]$.

Exercice 16 Bac Amérique du Nord 2025 – Suite de racines carrées

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Amérique du Nord, 22 mai 2025, sujet 2A, exercice 2, partie A (extrait).

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Calculer exactement u_1 et u_2, puis conjecturer le comportement de la suite.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
3. En déduire que (u_n) converge.
4. Résoudre sur $[0; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.
5. Justifier rigoureusement la valeur de la limite de (u_n), en énonçant les hypothèses du théorème utilisé.

Exercice 17 Bac Métropole 2025 – Un modèle de croissance

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Métropole, 17 juin 2025, sujet 1, exercice 4, partie A (extrait adapté).

Une superficie couverte par une plante marine est modélisée, en hectares, par une suite (u_n) vérifiant

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

On note h la fonction définie sur $[0;20]$ par $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$.

1. Calculer u_1 et interpréter la valeur obtenue.
2. Étudier les variations de h sur $[0;20]$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.
4. Justifier la convergence de (u_n) vers une limite ℓ appartenant à $[1;20]$.
5. Démontrer que $\ell = 15$, en appliquant le théorème du point fixe après avoir vérifié ses hypothèses.

Exercice 18 [!] Bilan Points fixes et raisonnement

1. **Point fixe.** On considère $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0;1]$.
   - **1. a.** Montrer que $f([0;1]) \subset [0;1]$.
   - **1. b.** En introduisant une fonction auxiliaire, démontrer que $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0;1]$.
   - **1. c.** Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
2. **Prise d'initiative.** Commencer par déterminer les limites de $x \mapsto x^3+x-3$ aux deux infinis. Démontrer ensuite que l'équation $x^3+x-3=0$ admet une unique solution réelle, puis l'encadrer entre deux entiers consécutifs.
3. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.

Affirmation 1

Toute fonction continue h de $[0;1]$ dans $[0;1]$ possède exactement un point fixe.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 19, page 26.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 20, page 27.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 19 [+] Consolidation Points fixes et raisonnement

1. **Point fixe.** Soit $f(x) = \dfrac{1}{2+x^2}$ sur $[0;1]$.
   - **1. a.** Montrer que $f([0;1]) \subset [0;1]$.
   - **1. b.** En introduisant $g(x) = f(x) - x$, démontrer que $f(x) = x$ possède une unique solution β dans $[0;1]$.
   - **1. c.** Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.
2. **Prise d'initiative.** Déterminer les limites de $x \mapsto x^3 + 2x - 4$ en $-\infty$ et $+\infty$, puis démontrer que l'équation $x^3 + 2x - 4 = 0$ possède une unique solution réelle et la situer entre deux entiers consécutifs.
3. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.

Affirmation 1

Toute fonction continue h de $[0;1]$ dans $[0;1]$ possède au moins un point fixe.

Exercice 20 [*] Approfondissement Points fixes et suites récurrentes

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0;1]$ et (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Justifier l'existence et l'unicité d'un point fixe $\alpha \in [0;1]$ de f.
2. Montrer que tous les termes de (u_n) appartiennent à $[0;1]$.
3. La suite (u_n) est-elle monotone ? Justifier en calculant ses premiers termes.
4. Montrer que si la suite (u_n) converge vers un réel L, alors $L = \alpha$. Cette égalité suffit-elle à prouver la convergence ?
5. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.

Affirmation 1

Une fonction continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$ peut posséder plusieurs points fixes.

Thème V En route vers le bac

Exercice 21 Baccalauréat – Étude d'une fonction et dichotomie

Source : Adapté du baccalauréat spécialité mathématiques, Amérique du Sud, 21 novembre 2024, exercice 1, partie B.

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = (20x+8)\,\mathrm{e}^{\,-x/4}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (20x+8)\,\mathrm{e}^{\,-x/4}$. On justifiera la levée de la forme indéterminée à l'aide des croissances comparées.

2. Justifier que f est continue et dérivable sur $[0;+\infty[$, puis démontrer que

$$f'(x) = (18-5x)\,\mathrm{e}^{\,-x/4}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f, en précisant la valeur exacte de son maximum.

4. On s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

4. a. Montrer que cette équation admet une unique solution α dans l'intervalle $[14;15]$.

4. b. On considère la fonction Python suivante, qui utilise la fonction f définie précédemment :

```
from math import exp

def f(x):
    return (20*x + 8)*exp(-x/4)

def dichotomie():
    a, b = 14, 15
    while b-a > 0.01:
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b
```

3. Expliquer pourquoi la fonction `dichotomie` fournit un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-2}.

4. À l'aide de la calculatrice ou de Python, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

5. **(Question ajoutée – Algorithmique).** Exécuter mentalement les deux premières itérations de la fonction `dichotomie` précédente. Puis déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un intervalle d'amplitude au plus 10^{-2} et les deux valeurs renvoyées par le programme. Justifier les résultats.

Exercice 22 Baccalauréat Polynésie 2023 – Étude d'une fonction

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Polynésie, septembre 2023, sujet 1, exercice 2, partie A.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-x} + x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

2. b. En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

2. c. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

2. d. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2. e. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

2. f. **(Question ajoutée – Balayage Python).** On souhaite encadrer la solution α de l'équation $f(x) = 0$ par balayage au centième sur $[-1;0]$. Compléter les deux instructions manquantes du programme suivant, puis préciser l'encadrement qu'il renvoie.

```
from math import exp

def f(x):
    return (x + 0.5)*exp(-x) + x

def balayage():
    x = -1.0
    while ...:
        x = round(x + 0.01, 2)
    return ...
```

Exercice 23 Bac Asie 2025 – Vrai ou faux ?

Source : Baccalauréat spécialité mathématiques, Asie, 5 septembre 2025, exercice 1, affirmation 4.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{\,-2x}.$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles.
Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis préciser si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1

L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24 Bac 2026 – Intersection d'une droite et d'une courbe sinus

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Centres étrangers, 10 juin 2026, sujet 1, exercice 2, affirmation 2 (extrait).

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et $\mathcal{C}_g$ celle de la fonction g.

Affirmation 1

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un seul point d'intersection.

Dire si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Exercice 25 Bac 2026 – Fonctions sinus et cosinus

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Asie, 9 juin 2026, sujet 1, exercice 4.

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;2\pi]$ par

$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et on note g' sa dérivée.

1. a. Montrer que, pour tout réel x de $[0;2\pi]$, on a $g'(x) = -x\sin(x)$.

1. b. On donne le tableau de variations de g sur $[0;2\pi]$ ci-dessous. Justifier chacun des éléments qui y figurent.

x	0		π		2π
g	0	↘	$-\pi$	↗	2π

1. c. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle α dans $[\pi;2\pi]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

1. d. En déduire le tableau de signes de g sur $[0;2\pi]$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0;2\pi]$ par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

On admet que f est dérivable sur $]0;2\pi]$ et on note f' sa dérivée.

2. a. Montrer que, pour tout réel x de $]0;2\pi]$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

2. b. Étudier le signe de f' sur $]0;2\pi]$.

2. c. En déduire le sens de variation de f sur $]0;2\pi]$.

2. d. Déterminer la limite de f en 0. On pourra utiliser le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient $0 < r < s < \pi$. Montrer que

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}.$$

Exercice 26 Bac Métropole 2025 – Suite récurrente et point fixe

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Métropole, 9 septembre 2025, jour 1, exercice 3, partie A (extrait).

Partie A (extrait du sujet officiel)

On considère la fonction f définie sur $[2;+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
Variations de f	2 ↗	$+\infty$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2.2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel :

$$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6.$$

2. b. En déduire que la suite (u_n) converge.

3. On appelle ℓ la limite de (u_n). On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la valeur de ℓ.

4. On considère la fonction `rang` écrite ci-dessous en langage Python. On rappelle que `sqrt(x)` renvoie la racine carrée du nombre x.

```
1 from math import *
2
3 def rang(a):
4     u = 6
5     n = 0
6     while u >= a:
7         u = sqrt(3*u - 2)
8         n = n + 1
9     return n
```

4.4. a. Pourquoi peut-on affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur ?

4. b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang(a)` renvoie-t-elle un résultat ?

Exercice 27 Bac Métropole 2026 – Exponentielle, variations et TVI

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Métropole–La Réunion, 9 septembre 2026, sujet 2, exercice 2, questions 1 à 4.c (extrait reformulé).

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = (3x - 1)\,\mathrm{e}^{\,-x} + 2.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$ en justifiant la levée de la forme indéterminée. Interpréter graphiquement le résultat.

3. Étude des variations.

3. a. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (4 - 3x)\,\mathrm{e}^{\,-x}.$$

3. b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

4. Étude de l'équation $f(x) = 0$.

4. a. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle α. Préciser à chaque étape les hypothèses du théorème utilisé.

4. b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4. c. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$, en justifiant.

Thème VI Devoir maison

Exercice 28 Une population animale : suite récurrente et point fixe

On étudie l'évolution d'une population animale dans un milieu où l'on introduit 6 000 individus au 1er janvier 2025. On suppose que l'évolution de cette population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = -0{,}05v_n^2 + 1{,}1v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025+n$, exprimée en milliers d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$.

2. Démontrer que f est croissante sur $[0;11]$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

4. En déduire que (v_n) converge vers une limite ℓ.

5. a. Justifier que $f(\ell) = \ell$, puis déterminer ℓ.

5. b. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 29 Un modèle exponentiel : limites, TVI et convergence

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

Partie A – Étude de la fonction et point fixe

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, en justifiant la levée de toute forme indéterminée.

2. Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.

3. On pose $g(x) = f(x) - x$.

3. a. Démontrer que g est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

3. b. Étudier les signes de $g(0)$ et de $g(1)$, puis démontrer que $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0;1[$.

3. c. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B – Une suite qui n'est pas monotone On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) semble-t-elle monotone ?

3. On considère $h(x) = xe^{-x}$ sur $[0;1]$.

3. a. Étudier les variations de h sur $[0;1]$ et en déduire que $0 \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{1}{e}$.

3. b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tous $x, y \in [0;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{e}|x - y|.$$

4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

En déduire la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.

Exercice 30 Un paramètre et le nombre de solutions

Pour tout réel m, on considère l'équation

$$(E_m) : \qquad x^3 - 3x = m.$$

1. Déterminer les limites aux deux infinis de $F(x) = x^3 - 3x$, puis étudier précisément les variations de F sur $\mathbb{R}$.
2. Discuter, suivant la valeur du paramètre réel m, le nombre de solutions réelles de (E_m). Justifier chaque cas par le TVI ou son corollaire et préciser les cas d'égalité.
3. Pour $m = 1$, démontrer que l'équation possède trois solutions réelles distinctes. Donner pour chacune un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
4. On suppose maintenant $-2 < m < 2$. Montrer que la somme des trois solutions distinctes de (E_m) est nulle, sans résoudre explicitement l'équation du troisième degré.

Exercice 31 Point fixe et convergence quantitative

On considère $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ sur $[0;1]$ et la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Montrer que $f([0;1]) \subset [0;1]$, puis que tous les termes de (u_n) appartiennent à $[0;1]$.

2. Prouver que $f(x) = x$ admet un unique point fixe $\ell \in [0;1]$ et déterminer sa valeur exacte.

3. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 ; expliquer pourquoi l'étude directe de la monotonie de (u_n) n'est pas appropriée.

4. Démontrer que, pour tous $x, y \in [0;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{4}|x - y|.$$

5. En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell|.$$

Justifier la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.

6. Déterminer un entier naturel N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on soit certain que $|u_n - \ell| < 10^{-6}$. Justifier rigoureusement, sans utiliser de logarithme.

Exercice 32 Défi théorique – Que garantit la continuité ?

Soit f une fonction continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$.

1. En appliquant le TVI à une fonction auxiliaire soigneusement définie, démontrer qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = c$.
2. Si f est strictement décroissante, prouver que ce point fixe est unique.
3. Construire une fonction continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$ ayant exactement deux points fixes, puis une fonction ayant une infinité de points fixes.
4. On suppose que f est strictement décroissante et que la suite définie par $u_0 \in [0;1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge. Démontrer que sa limite est nécessairement l'unique point fixe de f. Expliquer pourquoi le résultat ne prouve pas, à lui seul, la convergence.

Exercice 33 Défi supplémentaire – Une récurrence d'ordre deux

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = \dfrac{1}{2}, \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n. \end{cases}$$

Partie A – Conjecture

1. Compléter le tableau suivant avec les valeurs exactes des termes.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2. Formuler une conjecture sur la limite éventuelle de (u_n).

Partie B – Suite auxiliaire On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

1. Calculer w_0.
2. Démontrer que (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
3. Exprimer w_n en fonction de n.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n.$$
5. Établir par récurrence que $u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie C – Convergence et passage à la limite

1. Justifier que (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
2. Prouver que (u_n) converge, sans utiliser sa formule explicite.
3. On note ℓ sa limite. En passant à la limite dans la relation de récurrence, déterminer ℓ. Justifier précisément ce passage à la limite.

Fin du TD