MATH93

Terminale Spécialité

Recueil d'exercices – Entraînement – Méthodes

TD – EXERCICES

Chapitre 7 – TD

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Version corrigée – Version imprimable

Sommaire du TD

I Continuité 2

II Le TVI, c'est ma passion ... Suivez le guide 10

III EPI et exercices plus théoriques 31

IV Points fixes et suites récurrentes 33

V En route vers le bac 44

VI Devoir maison 58

Objectifs

- Étudier la continuité d'une fonction, notamment par morceaux.
- Utiliser le TVI et son corollaire pour dénombrer les solutions.
- Encadrer une solution par balayage et dichotomie avec Python.
- Étudier des fonctions auxiliaires et les applications économiques.
- Résoudre des exercices à prise d'initiative et justifier des affirmations.

Thème I Continuité

Exercice 1 Un peu d'algorithmique (c)

1. Écrire un algorithme qui permet de calculer l'image d'une valeur demandée, par la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

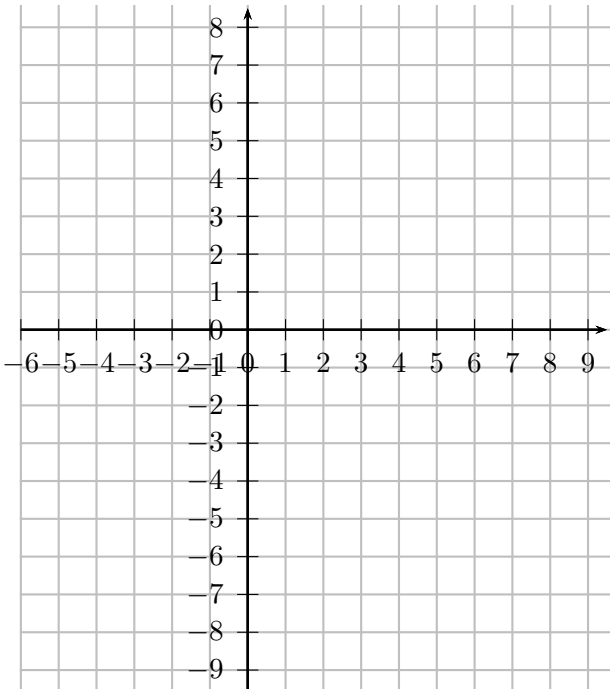
$$h : x \longmapsto h(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2 & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Corrigé

Une fonction Python utilisant les trois cas est :

```
def h(x):
    if x < 0:
        return x + 1
    elif x < 3:
        return x**2 - 2
    else:
        return 5 - x
```

2. Tracer $\mathscr{C}_h$ dans le repère ci-contre.



Corrigé

Sur $]-\infty;0[$, la courbe est la droite $y = x + 1$; sur $[0;3[$, c'est la parabole $y = x^2 - 2$; sur $[3;+\infty[$, c'est la droite $y = 5 - x$. En 0, on place le point plein $(0;-2)$ et un point non inclus $(0;1)$. En 3, on place le point plein $(3;2)$ et un point non inclus $(3;7)$.

3. La fonction h est-elle continue ? Justifier en utilisant la définition du cours (calculer les limites à droite et à gauche ...).

Corrigé

Les trois expressions sont continues sur chacun de leurs intervalles de définition. On étudie donc les deux points de raccordement.

- **En 0.** On a $h(0) = 0^2 - 2 = -2$ et

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - 2) = -2. \end{cases}$$

Les limites unilatérales étant différentes, h n'est pas continue en 0.

- **En 3.** On a $h(3) = 5 - 3 = 2$ et

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (x^2 - 2) = 7 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (5 - x) = 2. \end{cases}$$

Les limites unilatérales étant différentes, h n'est pas continue en 3.

- **Conclusion.** La fonction h n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Une autre fonction définie par morceaux (c)

Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ -\mathrm{e}^{x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Corrigé

Les fonctions $x \mapsto x^2 - 1$ et $x \mapsto -\mathrm{e}^{x^2}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ comme composées ou sommes de fonctions usuelles continues. Il suffit de vérifier la continuité au point de raccordement 0.

- **Valeur en 0.** Puisque $0 \geqslant 0$, on a $f(0) = -\mathrm{e}^{0} = -1$.
- **Limite à gauche.** Pour $x < 0$, $f(x) = x^2 - 1$, donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 - 1) = -1.}$$

- **Limite à droite.** Pour $x \geqslant 0$, $f(x) = -\mathrm{e}^{x^2}$, donc, par continuité de l'exponentielle et composition,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-\mathrm{e}^{x^2}) = -1.}$$

- **Conclusion.** Les limites à gauche et à droite sont égales à $f(0) = -1$. La fonction f est donc continue en 0 puis, par morceaux, $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R}}$.

Exercice 3 [!] Bilan Continuité, représentation et Python

On considère, pour tout réel a, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_a(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0, \\ x^2 + a & \text{si } 0 \leqslant x < 2, \\ 5 - x & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

1. Écrire en Python une fonction `h(x,a)` qui renvoie l'image de x par h_a.

Corrigé

- **Choix du morceau.** Les conditions sont testées dans l'ordre $x < 0$, puis $x < 2$, puis $x \geq 2$.
- **Programme Python.** Le programme renvoie la valeur de $h_a(x)$ dans chacun des trois cas :

```
def h(x, a):
    if x < 0:
        return x + 1
    elif x < 2:
        return x*x + a
    else:
        return 5 - x
```

2. Calculer $h_a(0)$ et $h_a(2)$, puis déterminer les limites à gauche et à droite en 0 et en 2.

Corrigé

Les expressions de h_a sont polynomiales sur chaque morceau. On distingue les deux points de raccordement.

- **En 0.** Comme $0 \leq 0 < 2$, on obtient $h_a(0) = a$. De plus,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} h_a(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} h_a(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+a) = a. \end{cases}$$

- **En 2.** Comme $2 \geq 2$, on obtient $h_a(2) = 5 - 2 = 3$. De plus,

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} h_a(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2+a) = 4 + a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} h_a(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (5-x) = 3. \end{cases}$$

3. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles h_a est continue en 0, puis en 2. Peut-elle être continue sur $\mathbb{R}$?

Corrigé

Chaque expression polynomiale étant continue sur son intervalle, il suffit d'examiner les points de raccordement.

- **Continuité en 0.** D'après la question précédente,

$$\lim_{x\to 0^-} h_a(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} h_a(x) = h_a(0) = a.$$

  La fonction h_a est donc continue en 0 si et seulement si $\boxed{a = 1}$.

- **Continuité en 2.** De même,

$$\lim_{x\to 2^-} h_a(x) = 4 + a, \qquad \lim_{x\to 2^+} h_a(x) = h_a(2) = 3.$$

  Elle est donc continue en 2 si et seulement si $4 + a = 3$, soit $\boxed{a = -1}$.

- **Conclusion.** Les conditions $a = 1$ et $a = -1$ sont incompatibles. Il n'existe donc **aucun réel a** pour lequel h_a soit continue sur $\mathbb{R}$.

4. Pour $a = 1$, tracer les trois morceaux de la courbe sur $[-2; 4]$, en distinguant les points inclus et exclus.

Corrigé

On utilise les trois équations suivantes :

- **Pour $-2 \leq x < 0$:** la droite d'équation $y = x + 1$, dont le point $(0; 1)$ est exclu pour ce premier morceau.
- **Pour $0 \leq x < 2$:** la parabole d'équation $y = x^2 + 1$, avec le point $(0; 1)$ inclus et le point $(2; 5)$ exclu.
- **Pour $2 \leq x \leq 4$:** la droite d'équation $y = 5 - x$, avec le point $(2; 3)$ inclus.

Ainsi, la courbe présente un saut en $x = 2$.

5. Pour $a = 1$, déterminer si h_a est dérivable en 0.

Corrigé

On a $h_1(0) = 1$. Pour étudier la dérivabilité en 0, on calcule les limites des taux d'accroissement à gauche et à droite.

- **À gauche de 0.** Pour $x < 0$, $h_1(x) = x + 1$, donc

$$\frac{h_1(x) - h_1(0)}{x - 0} = \frac{x + 1 - 1}{x} = 1.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^-} \frac{h_1(x) - h_1(0)}{x - 0} = 1.}$$

- **À droite de 0.** Pour $0 < x < 2$, $h_1(x) = x^2 + 1$, donc

$$\frac{h_1(x) - h_1(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = x.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{h_1(x) - h_1(0)}{x - 0} = 0.}$$

- **Conclusion.** Les deux limites des taux d'accroissement existent mais sont différentes ($1 \neq 0$). La limite du taux d'accroissement en 0 n'existe donc pas :

$$\boxed{h_1 \text{ n'est pas dérivable en } 0}.$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 4, page 6.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 5, page 8.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 4 [+] Consolidation Continuité, représentation et Python

On considère, pour tout réel a, la fonction k_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$k_a(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x < 0, \\ x^2 + a & \text{si } 0 \leqslant x < 2, \\ 8 - x & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

1. Écrire en Python une fonction `k(x,a)` qui renvoie $k_a(x)$.

Corrigé

- **Choix des conditions.** Le premier test porte sur $x < 0$, le second sur $x < 2$; le dernier cas correspond à $x \geqslant 2$.
- **Fonction Python.**

```
def k(x, a):
    if x < 0:
        return 2*x + 2
    elif x < 2:
        return x*x + a
    else:
        return 8 - x
```

2. Calculer $k_a(0)$ et $k_a(2)$, puis les limites à gauche et à droite aux deux points de raccordement.

Corrigé

Les trois expressions sont polynomiales, donc continues sur leurs intervalles respectifs.

- **En 0.** Puisque $0 \leqslant 0 < 2$, $k_a(0) = a$. D'une part, pour $x < 0$, $k_a(x) = 2x + 2$; d'autre part, pour $0 \leqslant x < 2$, $k_a(x) = x^2 + a$. Ainsi :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} k_a(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2x+2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} k_a(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + a) = a. \end{cases}$$

- **En 2.** Comme $2 \geqslant 2$, $k_a(2) = 8 - 2 = 6$. Ainsi :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} k_a(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 + a) = 4 + a \\ \lim\limits_{x \to 2^+} k_a(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (8 - x) = 6. \end{cases}$$

3. Pour quelles valeurs de a la fonction est-elle continue en 0, puis en 2 ? Est-elle continue sur $\mathbb{R}$ pour l'une de ces valeurs ?

Corrigé

Les trois fonctions définissant les morceaux de k_a sont continues. Il suffit donc de vérifier la continuité aux deux raccordements.

- **En 0.** On a

$$\lim_{x \to 0^-} k_a(x) = 2, \qquad \lim_{x \to 0^+} k_a(x) = k_a(0) = a.$$

Les limites unilatérales coïncident avec la valeur en 0 si et seulement si $\boxed{a = 2}$.

- **En 2.** On a
$$\lim_{x\to 2^-} k_a(x) = 4+a, \qquad \lim_{x\to 2^+} k_a(x) = k_a(2) = 6.$$
La continuité en 2 équivaut à $4+a=6$, soit $\boxed{a=2}$.
- **Conclusion.** Les deux conditions sont compatibles. Ainsi :
$$\boxed{k_a \text{ est continue sur } \mathbb{R} \iff a=2.}$$

4. Pour $a=2$, tracer la courbe sur $[-2;4]$, en distinguant les extrémités incluses et exclues.

Corrigé

Pour $a=2$, on trace successivement :

- la droite $y=2x+2$ pour $-2 \leqslant x < 0$, avec l'extrémité $(0;2)$ exclue de ce morceau ;
- la parabole $y=x^2+2$ pour $0 \leqslant x < 2$, avec $(0;2)$ inclus et $(2;6)$ exclu ;
- la droite $y=8-x$ pour $2 \leqslant x \leqslant 4$, avec $(2;6)$ inclus.

La courbe se raccorde sans saut aux deux abscisses 0 et 2.

5. Pour $a=2$, étudier la dérivabilité en 0.

Corrigé

La fonction k_2 est continue en 0 et $k_2(0)=2$. On étudie les limites du taux d'accroissement.

- **À gauche de 0.** Pour $x<0$:
$$\frac{k_2(x)-k_2(0)}{x-0} = \frac{2x+2-2}{x} = 2.$$
D'où :
$$\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{k_2(x)-k_2(0)}{x-0} = 2.}$$
- **À droite de 0.** Pour $0<x<2$:
$$\frac{k_2(x)-k_2(0)}{x-0} = \frac{x^2+2-2}{x} = x.$$
D'où :
$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{k_2(x)-k_2(0)}{x-0} = 0.}$$
- **Conclusion.** Ces deux limites sont différentes. Le taux d'accroissement n'admet donc pas de limite en 0 : $\boxed{k_2 \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$

Exercice 5 [*] Approfondissement Deux raccordements à imposer

On considère les fonctions $H_{a,b}$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$H_{a,b}(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x < 0, \\ x^2+bx+1 & \text{si } 0 \leqslant x < 2, \\ 3x-1 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$

1. Écrire en Python une fonction `H(x,a,b)` renvoyant $H_{a,b}(x)$.

Corrigé

1. En Python :

```
def H(x, a, b):
    if x < 0:
        return a*x + 1
    elif x < 2:
        return x*x + b*x + 1
    else:
        return 3*x - 1
```

2. Déterminer les réels a et b pour lesquels $H_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0.

Corrigé

On doit étudier la continuité aux deux points de raccordement, puis la dérivabilité en 0.

- **Continuité en 0.** Puisque $H_{a,b}(0) = 1$, on a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} H_{a,b}(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (ax+1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} H_{a,b}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2+bx+1) = 1. \end{cases}$$

  Ces limites sont égales à $H_{a,b}(0)$; la fonction est donc continue en 0 quels que soient a, b.

- **Continuité en 2.** On a $H_{a,b}(2) = 3\times 2 - 1 = 5$ et :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} H_{a,b}(x) = 4+2b+1 = 5+2b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} H_{a,b}(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (3x-1) = 5. \end{cases}$$

  La continuité en 2 équivaut donc à $5+2b=5$, soit $\boxed{b=0}$.

- **Dérivabilité en 0.** La fonction est continue en 0. On étudie les deux limites du taux d'accroissement :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{H_{a,b}(x)-H_{a,b}(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{ax}{x} = a \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{H_{a,b}(x)-H_{a,b}(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+bx}{x} = b. \end{cases}$$

  Elles sont égales si et seulement si $a=b$.

Conclusion. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0 si et seulement si $\boxed{a=b=0}$.

3. Pour ces valeurs, étudier la dérivabilité en 2.

Corrigé

Pour $a = b = 0$, on a $H_{0,0}(2) = 5$ et la fonction est continue en 2.

- **Taux d'accroissement à gauche :**

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{H_{0,0}(x) - H_{0,0}(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+1-5}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 4.$$

- **Taux d'accroissement à droite :**

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{H_{0,0}(x) - H_{0,0}(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{3x-1-5}{x-2} = 3.$$

Ces deux limites sont différentes. Le taux d'accroissement n'admet donc pas de limite en 2, et $H_{0,0}$ n'est pas dérivable en 2.

4. Tracer l'allure de la courbe sur $[-2; 4]$, en justifiant les raccordements.

Corrigé

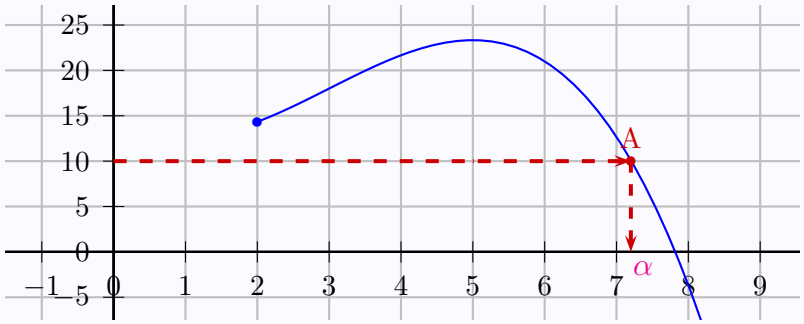
4. Pour ces paramètres, la courbe comprend $y = 1$ à gauche de 0, $y = x^2+1$ de 0 à 2, puis $y = 3x-1$ après 2. Elle est continue aux deux raccords ; celui en 0 est également dérivable, contrairement à celui en 2.

Thème II

Le TVI, c'est ma passion ... Suivez le guide

Exemple guidé 1 – Résolution de $f(x) = 10$

On considère la fonction f définie sur $[2\,;+\infty[$ par : $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 15$.



1. Donner rapidement la limite de f en $+\infty$.
Pour tout réel x de $[2\,;+\infty[$ on a :

$$f(x) = x^3\left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{15}{x^3}\right)$$

Or d'après les limites des fonctions de références :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{15}{x^3}$$

De ce fait :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{x^2} + \dfrac{15}{x^3}\right) = -\dfrac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

2. Étudier les variations de f sur $[2\,;+\infty[$.

- La fonction f est définie sur $[2\,;+\infty[$ donc continue et dérivable sur cet intervalle car c'est une fonction polynôme.
- Pour tout réel x de $[2\,;+\infty[$ on a $f(x) = -\dfrac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x + 15$ donc :

$$f'(x) = -\frac{3x^2}{3} + 3 \times 2x - 5 = \underline{-x^2 + 6x - 5}$$

- Cas général sur $\mathbb{R}$: étude de $x \longmapsto -x^2 + 6x - 5$ sur $\mathbb{R}$ (on ne la nomme pas).
La fonction $x \longmapsto -x^2+6x-5$ une fonction polynôme du second degré de la forme ax^2+bx+c avec :

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -5 \end{cases} \Longrightarrow \Delta = 16 > 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-6+\sqrt{16}}{-2} = 1 \notin [2\,;+\infty[\\ x_2 = \dfrac{-6-\sqrt{16}}{-2} = 5 \in [2\,;+\infty[\end{cases}$$

Le discriminant étant positif strictement, le trinôme $(-x^2 + 6x - 5)$ a deux deux racines réelles. Il est du signe de $a = -1 < 0$ soit négatif à l'extérieur des racines et positif ailleurs.

Suite de l'exemple guidé : résolution de $f(x) = 10$.

- Retour sur la dérivée sur $[2\,;+\infty[$. La dérivée f' est donc positive de 2 à 5 et négative ailleurs soit le tableau de variations suivant :

x	2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$f(2)\approx 14.3$	↗	$f(5)\approx 23.3$	↘	$-\infty$

2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=10$.

x	2		5		α		$+\infty$
Variations de f	$f(2)\approx 14.3$	↗	$f(5)\approx 23.3$	↘	10	↘	$-\infty$

Méthode 1 (Nombre de solutions d'une équation et TVI)

On va appliquer le corolaire du TVI sur chaque intervalle où la fonction est monotone. On va essayer d'en éliminer certains qui ont un maximum ou un minimum qui permettent d'affirmer la non-existence de solution.

- Sur $[2\,;5]$.
  Sur l'intervalle $[2\,;5]$, la fonction f admet $f(2)\approx 14,3$ comme minimum. De ce fait, l'équation $f(x)=10$ n'admet pas de solution.

- Sur $[5\,;+\infty[$:
  - La fonction f est *continue* et *strictement décroissante* sur l'intervalle $[5\,;+\infty[$;
  - On a $k=10$ compris entre $f(5)\approx 23,3$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;
  - Donc, d'après le *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*, l'équation $f(x)=10$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[5\,;+\infty[$.
- Bilan : sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=10$ admet donc une unique solution α.

3. Déterminer un encadrement et une valeur approchée de α au centième.

Méthode 2 (Encadrement et approximation de la solution d'une équation par balayage)

On cherche à encadrer α. On va utiliser la fonction ***TABLE*** de la calculatrice en partant de la borne inférieure de l'intervalle (ici on part de 5 sur $[5\,;8]$ par exemple). On réglera le ***PAS*** ou ***STEP*** progressivement sur 1, puis sur 0,1 et enfin sur 0,01 à l'aide du ***MENU TABLE SET*** afin d'affiner l'encadrement mais on ne présente sur sa copie que l'encadrement final demandé.

- Avec un pas de $\Delta = 0.01$ on obtient : $\left\{\begin{array}{|lcl} f(7,20) &\approx& 10,104>10 \\ f(7,21) &\approx& 9,97<10 \end{array}\right.$, donc $\boxed{7,20<\alpha<7,21}$.

Une valeur approchée de α à 0.01 près est donc $\alpha\approx 7,20$ (ou $\alpha\approx 7,21$).

Exercice 6 Suivons le guide

On va reprendre les questions de l'exemple 1 avec une autre fonction. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f : \begin{cases} [0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{3}\,x^3 - 4x^2 + 12x + 1 \end{cases}$$

1. Montrer rapidement que f est continue et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

Corrigé

1. f est polynomiale : elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;+\infty[$.

2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.

Corrigé

- **Dérivée.** La fonction f est polynomiale, donc dérivable sur $[0;+\infty[$. Pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12 = (x-2)(x-6).$$

- **Étude du signe de f'.** Sur $[0;2[$, les deux facteurs sont négatifs, donc $f'(x) > 0$. Sur $]2;6[$, ils sont de signes contraires, donc $f'(x) < 0$. Sur $]6;+\infty[$, ils sont tous les deux positifs, donc $f'(x) > 0$.

- **Valeurs utiles et limite.** On calcule :

$$f(0) = 1, \qquad f(2) = \frac{35}{3}, \qquad f(6) = 1.$$

Pour $x > 0$, on factorise le terme de plus haut degré :

$$f(x) = x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right).$$

Or :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{3} > 0 \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

- **Tableau de variations.**

x	0		2		6		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	1	↗	$\frac{35}{3}$	↘	1	↗	$+\infty$

3. Déterminer sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = 40$.

Corrigé

- La fonction f est continue sur $[0;+\infty[$ car elle est polynomiale.
- **Sur $[0;2]$.** D'après le tableau de variations, f admet sur cet intervalle un maximum égal à $f(2)=\dfrac{35}{3}<40$. L'équation $f(x)=40$ n'y admet donc aucune solution.
- **Sur $[2;6]$.** D'après le tableau de variations, f admet également sur cet intervalle un maximum égal à $f(2)=\dfrac{35}{3}<40$. L'équation n'y admet aucune solution.
- **Sur $[6;+\infty[$.**
  - La fonction f est continue sur $[6;+\infty[$ car elle est polynomiale.
  - La fonction f est strictement croissante sur $[6;+\infty[$ d'après l'étude du signe de f'.
  - On a $f(6)=1<40$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty>40$.
  - Le réel 40 appartient donc à l'intervalle image $[f(6);+\infty[$. D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x)=40$ admet une unique solution $\alpha\in]6;+\infty[$.

  On peut placer cette solution dans le tableau de variations :

x	0		2		6	α	$+\infty$
Variations de f	1	↗	$\dfrac{35}{3}$	↘	1	↗ 40	$+\infty$

- Comme elle n'admet aucune solution sur $[0;6]$, il y a **exactement une solution** sur $[0;+\infty[$.

4. Donner une valeur approchée de la (ou des) solution(s) au centième.

Corrigé

- **Encadrement par balayage.** À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$\begin{cases} f(9{,}50)\approx 39{,}792<40 \\ f(9{,}51)\approx 40{,}055>40. \end{cases}$$

- **Conclusion.** Sur $[6;+\infty[$, f est continue et strictement croissante et $f(\alpha)=40$. Les deux valeurs calculées encadrent donc α :

$$\boxed{9{,}50<\alpha<9{,}51}.$$

  L'amplitude est 0,01.

- **Valeur arrondie.** Un balayage plus fin donne $\alpha\approx 9{,}507923$; l'arrondi au centième est donc $\boxed{\alpha\approx 9{,}51}$.

5. Avec une suite.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour n entier, $8 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.
En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Corrigé

Pour $x \geq 8$, on a $f'(x) = (x-2)(x-6) > 0$; f est donc strictement croissante sur $[8;+\infty[$. Posons, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: « $8 \leq u_n \leq u_{n+1}$ ».

- **Initialisation.** On calcule $u_0 = 8$ et $u_1 = f(8)$; on calcule $u_1 = f(8) = \dfrac{35}{3}$, donc $8 \leq u_0 = 8 \leq u_1$.
- **Hérédité.** Supposons que, pour un entier n fixé, $8 \leq u_n \leq u_{n+1}$. Comme f est strictement croissante sur $[8;+\infty[$ et que les deux termes appartiennent à cet intervalle,

  $$f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \iff u_{n+1} \leq u_{n+2}.$$

  De plus $u_{n+1} \geq 8$ par hypothèse. Ainsi $8 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$: $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $u_n \leq u_{n+1}$: la suite (u_n) est croissante.

6. Une égalité.
On note α la solution de l'équation $f(x) = 40$ de la question (4.).
Montrer que α vérifie l'égalité :

$$\alpha^3 = 12\alpha^2 - 36\alpha + 117$$

Corrigé

6. $f(\alpha) = 40 \iff \dfrac{\alpha^3}{3} - 4\alpha^2 + 12\alpha + 1 = 40$, soit, en multipliant par 3,

$$\boxed{\alpha^3 = 12\alpha^2 - 36\alpha + 117}.$$

Exercice 7 Courbe de la dérivée !!

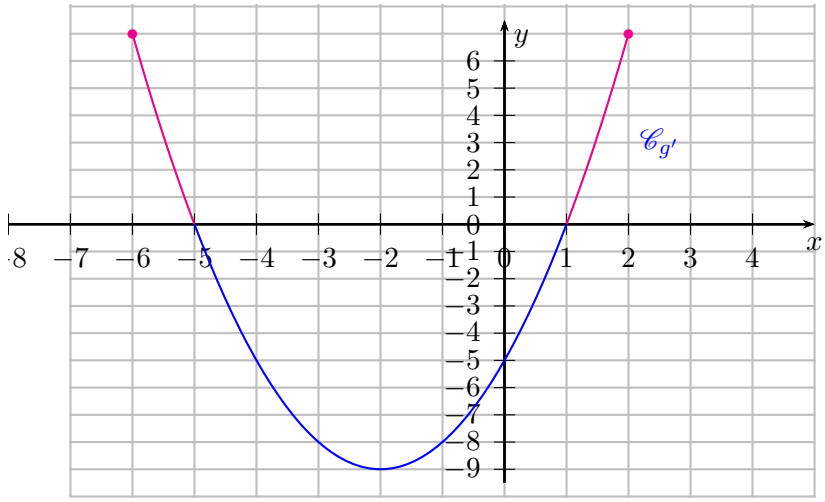
Point Bac : Danger, on donne la courbe de la dérivée, pas de la fonction.
C'est une question classique.

Méthode 3

On donne la courbe de la dérivée et il faut en déduire le tableau de variation de la fonction. Une chose à retenir :

« CE QUI NOUS INTÉRESSE SUR LA DÉRIVÉE C'EST SON **SIGNE** »

On va donc établir un tableau de signe de la fonction tracée, c'est à dire regarder pour quelles valeurs de x sa courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, et en-dessous.



On a ci-dessus construit la courbe représentative de la fonction g', la dérivée d'une fonction g, définie et dérivable sur $[-6\,;\,2]$.

1. D'après le graphique, dresser le tableau de variation de g sur $[-6\,;\,2]$.

Corrigé

- **Signe de g'.** La courbe de g' est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[-6;-5[$ et $]1;2]$, et au-dessous sur $]-5;1[$. Elle coupe l'axe en -5 et 1.
- **Variations de g.** Par le théorème reliant le signe de la dérivée et les variations, g est strictement croissante sur $[-6;-5]$, strictement décroissante sur $[-5;1]$ puis strictement croissante sur $[1;2]$.

x	-6		-5		1		2
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	$g(-6)$	↗	$g(-5)$	↘	$g(1)$	↗	$g(2)$

2. La fonction g est en fait la fonction :

$$g : \begin{cases} [-6\,;\,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 1 \end{cases}$$

2. a. Déterminer la dérivée de g sur $[-6\,;\,2]$ puis étudier son signe sur cet intervalle.

Corrigé

La fonction g est polynomiale, donc dérivable sur $[-6;2]$. Pour tout $x \in [-6;2]$,

$$g'(x) = x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1).$$

- **Sur $[-6;-5[$:** $x+5<0$ et $x-1<0$; donc $g'(x)>0$.
- **En -5 :** $g'(-5)=0$.
- **Sur $]-5;1[$:** $x+5>0$ et $x-1<0$; donc $g'(x)<0$.

- **En 1 :** $g'(1) = 0$.
- **Sur $]1;2]$:** $x+5>0$ et $x-1>0$; donc $g'(x)>0$.

2. b. En déduire les variations de g sur $[-6\,;\,2]$. On fera clairement figurer les images par g des bornes de l'intervalle d'étude et des racines de g'.

Corrigé

- **Sur $[-6;-5]$:** d'après le signe de g', g est strictement croissante.
- **Sur $[-5;1]$:** g est strictement décroissante.
- **Sur $[1;2]$:** g est strictement croissante.
- **Valeurs aux bornes et aux points critiques :**

$$\begin{cases} g(-6) = 31 \\ g(-5) = \dfrac{103}{3} \\ g(1) = -\dfrac{5}{3} \\ g(2) = \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

On reporte les résultats dans le tableau de variations :

x	-6		-5		1		2
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	31	↗	$\dfrac{103}{3}$	↘	$-\dfrac{5}{3}$	↗	$\dfrac{5}{3}$

2. c. Vérifiez que ces résultats sont cohérents avec ceux de la question **1.**

Corrigé

- **Lecture graphique.** Les changements de sens de variation sont observés aux abscisses -5 et 1.
- **Justification.** Ces changements correspondent exactement aux changements de signe de g' établis à la question 2.a.

Les deux méthodes conduisent donc au même tableau de variations.

3. Approximation de la solution d'une équation.
On cherche à résoudre l'équation $g(x) = 5$. C'est une équation de degré 3 que l'on ne sait pas résoudre à notre niveau.

3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 5$ admet une unique solution α sur $[-6\,;\,2]$. Donner un intervalle comprenant α sur lequel la fonction est monotone.

Corrigé

Nous étudions séparément chaque intervalle de monotonie de g.

- **Sur $[-6;-5]$.** La fonction g est strictement croissante et, pour tout $x \in [-6;-5]$,
$$g(x) \geq g(-6) = 31 > 5.$$
L'équation $g(x) = 5$ n'y admet donc aucune solution.
- **Sur $[-5;1]$.**
  - La fonction g est **continue** sur $[-5;1]$ car elle est polynomiale.
  - La fonction g est **strictement décroissante** sur $[-5;1]$ d'après l'étude de sa dérivée.
  - On a
$$g(-5) = \frac{103}{3} > 5 > -\frac{5}{3} = g(1).$$
D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x) = 5$ admet une unique solution $\alpha \in]-5;1[$.
- **Sur $[1;2]$.** La fonction g est strictement croissante et, pour tout $x \in [1;2]$,
$$g(x) \leq g(2) = \frac{5}{3} < 5.$$
L'équation $g(x) = 5$ n'y admet donc aucune solution.
- **Conclusion.** L'équation $g(x) = 5$ admet **une unique solution** sur $[-6;2]$, appartenant à $]-5;1[$, intervalle sur lequel g est strictement décroissante.

On peut faire figurer cette solution sur le tableau de variations :

x	-6		-5		α		1		2
Variations de g	31	↗	$\frac{103}{3}$	↘	5	↘	$-\frac{5}{3}$	↗	$\frac{5}{3}$

3. b. Donner une valeur une valeur approchée de α au centième.

Corrigé

- **Valeurs encadrantes.** Avec la calculatrice, on obtient :
$$\begin{cases} g(-0{,}650) \approx 5{,}003458 > 5 \\ g(-0{,}649) \approx 4{,}996282 < 5. \end{cases}$$
- **Encadrement.** D'après la question précédente, g est continue et strictement décroissante sur $[-5;1]$ et $g(\alpha) = 5$. On en déduit :
$$\boxed{-0{,}650 < \alpha < -0{,}649}.$$
- **Valeur arrondie au centième.** Un calcul plus précis donne $\alpha \approx -0{,}649518$, donc
$$\boxed{\alpha \approx -0{,}65}.$$

Exercice 8 (Spoil Alert !) Une fonction auxiliaire g pour étudier f et des applications (c)

Point Bac : Utilisation d'une fonction auxiliaire.
C'était un grand classique il y a quelques années. On rencontre tout de même encore assez souvent ce genre d'exercice.

Méthode 4

On introduit une fonction g qui va en fait permettre d'étudier le signe de la dérivée de f (la dérivée f' s'exprime en fonction de g et d'un facteurs positif très souvent).
Il faut donc ne pas perdre de vue que l'unique intérêt de g, est son SIGNE. On va donc :

- Étudier les variations de g.
- Résoudre l'équation $g(x) = 0$. Pour cela on utilise le TVI pour dénombrer les solutions puis on trouve des valeurs approchées de ces dernières.
- En déduire le signe de g. On utilisera généralement le tableau de variation de g en plaçant les solutions de l'équation $g(x) = 0$.
- Le signe de g nous donne alors celui de f' et donc les variations de f.

On considère la fonction f définie sur $[0,5\,;\,10]$ par :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0,5\,;\,10] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2\,x^3 - 3\,x^2 + x + 5}{x} \end{array} \right.$$

1. Calculer la dérivée de f et vérifier que pour tout x de $[0,5\,;\,10]$:

$$f'(x) = \frac{4\,x^3 - 3\,x^2 - 5}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Corrigé

Pour $x > 0$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1 + \dfrac{5}{x}$. La fonction f est dérivable sur $[0{,}5;10]$ et

$$f'(x) = 4x - 3 - \frac{5}{x^2} = \boxed{\frac{4x^3 - 3x^2 - 5}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}}.$$

2. Étude d'une fonction auxiliaire g.
On considère la fonction g définie sur $[0,5\,;\,10]$ par $g(x) = 4\,x^3 - 3\,x^2 - 5$.

2. a. Expliquer rapidement pourquoi f' est du signe de g sur $[0,5\,;\,10]$.

Corrigé

Pour tout $x \in [0{,}5;10]$, on a $x^2 > 0$. Par conséquent, le quotient $\dfrac{g(x)}{x^2}$ est du signe de $g(x)$: $\boxed{f'(x) \text{ est du signe de } g(x)}$.

2. b. Étudier les variations de la fonction g sur $[0,5\,;\,10]$.

Corrigé

La fonction g est polynomiale, donc dérivable sur $[0{,}5;10]$. Pour tout x de cet intervalle,

$$g'(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1).$$

Les deux facteurs x et $2x-1$ sont positifs ou nuls sur $[0{,}5;10]$, et strictement positifs si $x > 0{,}5$. Ainsi g est strictement croissante sur $[0{,}5;10]$.

x	$0{,}5$		10
Signe de $g'(x)$	0	$+$	
Variations de g	$-5{,}25$	↗	3695

2. c. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0,5\,;\,10]$ et en donner un encadrement au millième.

Corrigé

- La fonction g est continue sur $[0{,}5;10]$ car elle est polynomiale.
- Elle est strictement croissante sur cet intervalle.
- On a $g(0{,}5) = -5{,}25 < 0$ et $g(10) = 3695 > 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0{,}5;10[$. Par balayage au millième, on obtient

$$\begin{cases} g(1{,}393) \approx -0{,}009165 < 0 \\ g(1{,}394) \approx 0{,}005776 > 0. \end{cases}$$

Comme g est strictement croissante, $\boxed{1{,}393 < \alpha < 1{,}394}$, d'amplitude 10^{-3}.

2. d. En déduire le signe de g sur $[0,5\,;\,10]$.

Corrigé

La fonction g est strictement croissante sur $[0{,}5;10]$ et s'annule uniquement en α. Par conséquent,

$$\boxed{g(x) < 0 \text{ sur } [0{,}5;\alpha[, \quad g(\alpha) = 0, \quad g(x) > 0 \text{ sur }]\alpha;10]}.$$

2. e. En déduire alors les variations de f sur $[0,5\,;\,10]$.

Corrigé

Comme $x^2 > 0$ sur $[0{,}5;10]$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, étudié précédemment. On calcule $f(0{,}5) = 10$, $f(10) = 171{,}5$. Ainsi :

x	0,5		α		10
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	10	↘	$f(\alpha)$	↗	171,5

La fonction f atteint donc son minimum sur $[0{,}5;10]$ en α.

3. Applications économiques.
Le coût moyen de production d'une entreprise est donné par $f(x)$ où x est la quantité produite en milliers d'unités, variant de 0,5 à 10 milliers d'unités de production, et $f(x)$ est exprimée en centaines d'euros.

3. a. Déterminer une valeur approchée à l'unité, du coût moyen minimum de production.

Corrigé

D'après le tableau de variations, le coût moyen minimal est atteint pour $x = \alpha$, soit environ 1,394 millier d'unités. On obtient $f(\alpha) \approx 4{,}291272$ centaines d'euros, soit $\boxed{429 \text{ euros}}$ à l'unité près.

3. b. Déterminer, à partir de quelle production, le coût moyen dépasse les 10 600 euros.

Corrigé

- Sur $[0{,}5;\alpha]$, le maximum de f est $f(0{,}5) = 10 < 106$. L'équation $f(x) = 106$ n'a donc aucune solution sur cet intervalle.
- Sur $[\alpha;10]$, f est continue et strictement croissante, avec $f(\alpha) \approx 4{,}29 < 106$ et $f(10) = 171{,}5 > 106$. D'après le corollaire du TVI, elle atteint la valeur 106 en un unique réel $\beta \in]\alpha;10[$.
- Par balayage :
$$\begin{cases} f(8{,}01) \approx 105{,}9144 < 106 \\ f(8{,}02) \approx 106{,}2042 > 106. \end{cases}$$
Ainsi $8{,}01 < \beta < 8{,}02$ (en milliers d'unités).

Le coût moyen dépasse 10 600 euros pour une production strictement supérieure à β millier d'unités, soit environ 8,013 milliers d'unités, c'est-à-dire 8 013 unités.

4. Complément (question indépendante de la question 3).

4. a. Montrer que α vérifie l'égalité :
$$f(\alpha) = -\frac{3}{2}\alpha + 1 + \frac{15}{2\alpha}$$

Corrigé

L'égalité $g(\alpha) = 0$ entraîne $4\alpha^3 = 3\alpha^2 + 5$. En divisant par $2\alpha > 0$, on obtient $2\alpha^2 = \frac{3}{2}\alpha + \frac{5}{2\alpha}$.

Or $f(\alpha) = 2\alpha^2 - 3\alpha + 1 + \frac{5}{\alpha}$. Donc

$$\boxed{f(\alpha) = -\frac{3}{2}\alpha + 1 + \frac{15}{2\alpha}}.$$

4. b. On suppose que $1 < \alpha < 1,5$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Corrigé

Posons $\varphi(t) = -\frac{3}{2}t + 1 + \frac{15}{2t}$ pour $t > 0$. On a $\varphi'(t) = -\frac{3}{2} - \frac{15}{2t^2} < 0$; la fonction φ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. D'après $1 < \alpha < 1{,}5$,

$$\varphi(1{,}5) < \varphi(\alpha) < \varphi(1).$$

Or $\varphi(1{,}5) = 3{,}75$ et $\varphi(1) = 7$. Finalement $\boxed{3{,}75 < f(\alpha) < 7}$.

Exercice 9 Encore une fonction auxiliaire

On cherche à étudier la fonction f définie sur $]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. a. Dresser le tableau de variations de g (justifier).

Corrigé

La fonction g est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Elle est croissante sur $]-\infty;-1]$, décroissante sur $[-1;1]$, puis croissante sur $[1;+\infty[$. En outre $g(-1) = -2$, $g(1) = -6$, et les limites de g aux deux infinis sont celles du terme dominant x^3.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	↗	-2	↘	-6	↗	$+\infty$

1. b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle α , et déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Corrigé

- Sur $]-\infty;-1]$, la fonction g admet un maximum égal à $g(-1) = -2 < 0$: il n'y a aucune racine.

- Sur $[-1;1]$, la fonction g admet un maximum égal à $g(-1) = -2 < 0$: il n'y a aucune racine.
- Sur $[1;+\infty[$, la fonction g est continue et strictement croissante. On a $g(1) = -6 < 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty > 0$. D'après le corollaire du TVI, il existe une unique racine $\alpha > 1$.

Par stricte croissance sur $[1;+\infty[$, $g(x) < 0$ pour $x < \alpha$, $g(\alpha) = 0$, $g(x) > 0$ pour $x > \alpha$ (et le signe négatif est déjà établi sur $]-\infty;1]$).

1. c. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Corrigé

À la calculatrice, on obtient

$$\begin{cases} g(2{,}19) \approx -0{,}066541 < 0 \\ g(2{,}20) = 0{,}048 > 0. \end{cases}$$

La fonction g est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$; elle s'annule en α. Donc

$$\boxed{2{,}19 < \alpha < 2{,}20},$$

encadrement d'amplitude 10^{-2}.

2. Justifier que f est dérivable sur $]-1\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ et vérifier que :

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

Corrigé

Le dénominateur x^2-1 ne s'annule pas sur le domaine $]-1;1[\cup]1;+\infty[$. La fonction f y est dérivable comme quotient de polynômes, et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2-1) - 2x(x^3+2)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2 - 4x}{(x^2-1)^2} = \boxed{\frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}}. \end{aligned}$$

3. En déduire les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de la fonction f.

Corrigé

- Le dénominateur $(x^2-1)^2$ est strictement positif sur le domaine. Ainsi $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$.
- Sur $]-1;0[$, $x < 0$ et $g(x) < 0$: $f'(x) > 0$.
- Sur $]0;1[$ et $]1;\alpha[$, $x > 0$ et $g(x) < 0$: $f'(x) < 0$.
- Sur $]\alpha;+\infty[$, $x > 0$ et $g(x) > 0$: $f'(x) > 0$.

On a $f(0) = -2$. Par quotient, les limites aux bornes exclues vérifient

$$\begin{cases} \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty. \end{cases}$$

Enfin, pour $x > 1$, on factorise :

$$f(x) = x\,\frac{1+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}}.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2/x^3}{1-1/x^2} = 1 > 0.$$

Par produit, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi :

x	-1		0		1
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$

Sur $]1;+\infty[$, f décroît de $+\infty$ jusqu'à $f(\alpha)$ puis croît vers $+\infty$:

x	1		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4. Complément.

4. a. Montrer que α vérifie l'égalité :

$$f(\alpha) = \frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}$$

Corrigé

L'égalité $g(\alpha) = 0$ donne $\alpha^3 = 3\alpha + 4$. En remplaçant dans l'expression de f, on obtient

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3+2}{\alpha^2-1} = \boxed{\frac{3\alpha+6}{\alpha^2-1}}.$$

4. b. On suppose que $2 < \alpha < 3$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Corrigé

Comme $2 < \alpha < 3$, on a

$$\begin{cases} 12 < 3\alpha + 6 < 15 \\ 3 < \alpha^2 - 1 < 8. \end{cases}$$

Le dénominateur est positif. Ainsi

$$\boxed{\frac{12}{8} < f(\alpha) < \frac{15}{3}},$$

soit $\boxed{1{,}5 < f(\alpha) < 5}$.

Exercice 10 [!] Bilan Fonction auxiliaire, variations et TVI

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x + 4}{x}, \qquad \text{et la fonction } g(x) = 2x^3 - 4.$$

1. Calculer les limites de f en 0 (à droite) et en $+\infty$.

Corrigé

Pour tout $x > 0$, on simplifie :

$$f(x) = x^2 + 2 + \frac{4}{x}.$$

- **En 0^+.** On a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} (x^2 + 2) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4}{x} = +\infty. \end{cases}$$

Par somme :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.}$$

- **En $+\infty$.** On a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to +\infty} (x^2 + 2) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4}{x} = 0. \end{cases}$$

Par somme :

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

2. Justifier que f est continue et dérivable sur $[1;5]$, puis vérifier que

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

Corrigé

- Sur $[1;5]$, la fonction f est continue et dérivable : c'est un quotient de polynômes dont le dénominateur x ne s'annule pas.

- Pour $x \in [1;5]$:
$$f'(x) = 2x - \frac{4}{x^2} = \frac{2x^3-4}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}.$$

3. Étudier les variations de g sur $[1;5]$. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1;2[$.

Corrigé

- **Variations de g.** g est une fonction polynomiale, continue et dérivable sur $[1;5]$. Pour $x \in [1;5]$, $g'(x) = 6x^2 > 0$. Donc g est strictement croissante sur $[1;5]$, avec $g(1) = -2$ et $g(5) = 246$.

x	1	5
Signe de $g'(x)$	+	
Variations de g	-2 ↗	246

- **Existence et unicité.** Sur $[1;2]$, g est continue et strictement croissante. De plus :
$$\begin{cases} g(1) = -2 < 0 \\ g(2) = 12 > 0. \end{cases}$$
Le réel 0 est strictement compris entre $g(1)$ et $g(2)$. D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;2[$. La stricte croissance de g sur $[1;5]$ montre qu'il n'y a aucune autre racine dans cet intervalle.

4. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} et en déduire le signe de g sur $[1;5]$.

Corrigé

- **Encadrement.** Par balayage au centième :
$$\begin{cases} g(1{,}25) \approx -0{,}093750 < 0 \\ g(1{,}26) \approx 0{,}000752 > 0 \end{cases}$$
Comme g est continue et strictement croissante et que $g(\alpha) = 0$, on en déduit
$$\boxed{1{,}25 < \alpha < 1{,}26}.$$
L'amplitude de cet intervalle est 10^{-2}.
- **Signe.** La fonction g est strictement croissante sur $[1;5]$ et s'annule uniquement en α. Ainsi, $g(x) < 0$ pour $1 \leq x < \alpha$, $g(\alpha) = 0$ et $g(x) > 0$ pour $\alpha < x \leq 5$.

5. Dresser le tableau de variations de f sur $[1;5]$, en exprimant $f(\alpha)$ aussi simplement que possible à l'aide de α.

Corrigé

- Pour tout $x \in [1;5]$, $x^2 > 0$. Ainsi, $f'(x) = g(x)/x^2$ est du signe de $g(x)$.
- On sait que $g(\alpha) = 0$, soit $\alpha^3 = 2$. Donc

$$f(\alpha) = \alpha^2 + 2 + \frac{4}{\alpha} = 3\alpha^2 + 2.$$

De plus, $f(1) = 7$ et $f(5) = \dfrac{139}{5}$.

- **Tableau de variations.**

x	1		α		5
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	7	↘	$3\alpha^2+2$	↗	$\dfrac{139}{5}$

Ainsi, f admet sur $[1;5]$ un **minimum** égal à $f(\alpha) = 3\alpha^2 + 2$.

6. En justifiant le nombre de solutions sur chacun des intervalles de monotonie, déterminer combien de solutions admet l'équation $f(x) = 7$ sur $[1;5]$.

Corrigé

On exploite le tableau de variations précédent en distinguant les deux intervalles de monotonie.

- **Sur $[1;\alpha]$.** La fonction f est strictement décroissante de $f(1) = 7$ à son minimum $f(\alpha) < 7$. Elle ne prend donc la valeur 7 qu'en $x = 1$. C'est l'unique solution sur cet intervalle (valeur maximale atteinte en 1).
- **Sur $[\alpha;5]$.** La fonction f est continue et strictement croissante sur cet intervalle. De plus :

$$\begin{cases} f(\alpha) < 7 \\ f(5) = \dfrac{139}{5} > 7. \end{cases}$$

Le réel 7 est strictement compris entre les valeurs aux bornes. D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, il existe une unique solution $\gamma \in]\alpha;5[$ de $f(x) = 7$.

- **Conclusion.** Comme $f(\alpha) \neq 7$, les deux solutions sont distinctes. L'équation $f(x) = 7$ admet donc **exactement deux solutions** sur $[1;5]$.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 11, page 27.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 12, page 29.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 11 [+] Consolidation Fonction auxiliaire, variations et TVI

On considère la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par

$$F(x)=\frac{x^3+3x+8}{x}, \qquad G(x)=2x^3-8.$$

1. Calculer les limites de F en 0 (à droite) et en $+\infty$.

Corrigé

Pour tout $x>0$, on simplifie :

$$F(x)=x^2+3+\frac{8}{x}.$$

- **En 0^+.** On a

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+3)=3\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{8}{x}=+\infty.\end{cases}$$

Par somme :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}F(x)=+\infty.}$$

- **En $+\infty$.** On a

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2+3)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{8}{x}=0.\end{cases}$$

Par somme :

$$\boxed{\lim_{x\to +\infty}F(x)=+\infty.}$$

2. Justifier que F est continue et dérivable sur $[1;5]$ et vérifier que $F'(x)=\dfrac{G(x)}{x^2}$.

Corrigé

- Sur $[1;5]$, la fonction F est continue et dérivable : c'est un quotient de polynômes dont le dénominateur x ne s'annule pas.
- Pour $x\in[1;5]$:

$$F'(x)=2x-\frac{8}{x^2}=\frac{2x^3-8}{x^2}=\boxed{\frac{G(x)}{x^2}}.$$

3. Étudier les variations de G puis démontrer que $G(x)=0$ possède une unique solution β dans $]1;2[$.

Corrigé

- **Variations de G.** G est une fonction polynomiale, continue et dérivable sur $[1;5]$. Pour $x\in[1;5]$, $G'(x)=6x^2>0$. Donc G est strictement croissante sur $[1;5]$, avec $G(1)=-6$ et $G(5)=242$.

x	1	5
Signe de $G'(x)$	$+$	
Variations de G	-6	242

- **Existence et unicité.** Sur $[1;2]$, G est continue et strictement croissante. De plus :

$$\begin{cases} G(1) = -6 < 0 \\ G(2) = 8 > 0. \end{cases}$$

Le réel 0 est strictement compris entre $G(1)$ et $G(2)$. D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $G(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]1;2[$. La stricte croissance de G sur $[1;5]$ montre qu'il n'y a aucune autre racine dans cet intervalle.

4. Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2} puis le signe de G.

Corrigé

- **Encadrement.** Par balayage au centième :

$$\begin{cases} G(1{,}58) \approx -0{,}111376 < 0 \\ G(1{,}59) \approx 0{,}039358 > 0 \end{cases}$$

Comme G est continue et strictement croissante et que $G(\beta) = 0$, on en déduit

$$\boxed{1{,}58 < \beta < 1{,}59}.$$

L'amplitude de cet intervalle est 10^{-2}.

- **Signe.** La fonction G est strictement croissante sur $[1;5]$ et s'annule uniquement en β. Ainsi, $G(x) < 0$ pour $1 \leq x < \beta$, $G(\beta) = 0$ et $G(x) > 0$ pour $\beta < x \leq 5$.

5. En déduire le tableau de variations de F et simplifier $F(\beta)$ à l'aide de l'égalité $G(\beta) = 0$.

Corrigé

- Pour tout $x \in [1;5]$, $x^2 > 0$. Ainsi, $F'(x) = G(x)/x^2$ est du signe de $G(x)$.
- On sait que $G(\beta) = 0$, soit $\beta^3 = 4$. Donc

$$F(\beta) = \beta^2 + 3 + \frac{8}{\beta} = 3\beta^2 + 3.$$

De plus, $F(1) = 12$ et $F(5) = \dfrac{148}{5}$.

- **Tableau de variations.**

x	1		β		5
Signe de $F'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de F	12	↘	$3\beta^2+3$	↗	$\dfrac{148}{5}$

Ainsi, F admet sur $[1;5]$ un **minimum** égal à $F(\beta) = 3\beta^2 + 3$.

6. Déterminer le nombre de solutions de $F(x) = 12$ sur $[1;5]$, en justifiant chaque intervalle étudié.

Corrigé

On exploite le tableau de variations précédent en distinguant les deux intervalles de monotonie.

- **Sur $[1;\beta]$.** La fonction F est strictement décroissante de $F(1) = 12$ à son minimum $F(\beta) < 12$. Elle ne prend donc la valeur 12 qu'en $x = 1$. C'est l'unique solution sur cet intervalle (valeur maximale atteinte en 1).
- **Sur $[\beta;5]$.** La fonction F est continue et strictement croissante sur cet intervalle. De plus :

$$\begin{cases} F(\beta) < 12 \\ F(5) = \dfrac{148}{5} > 12. \end{cases}$$

Le réel 12 est strictement compris entre les valeurs aux bornes. D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, il existe une unique solution $\delta \in]\beta;5[$ de $F(x) = 12$.

- **Conclusion.** Comme $F(\beta) \neq 12$, les deux solutions sont distinctes. L'équation $F(x) = 12$ admet donc **exactement deux solutions** sur $[1;5]$.

Exercice 12 [*] Approfondissement Un niveau variable et le nombre de solutions

On considère la fonction f et le réel α du Bilan précédent.

1. Retrouver les variations de f en utilisant la fonction auxiliaire $g(x) = 2x^3 - 4$.

Corrigé

- Pour $x \in [1;5]$, on a $x^2 > 0$, donc $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ est du signe de $g(x)$.
- La fonction $g(x) = 2x^3 - 4$ est strictement croissante sur $[1;5]$ puisque $g'(x) = 6x^2 > 0$. Elle s'annule une unique fois en $\alpha = \sqrt[3]{2}$.
- On obtient donc $f'(x) < 0$ sur $[1;\alpha[$, $f'(\alpha) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]\alpha;5]$.
- Le tableau de variations est :

x	1		α		5
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	7	$\searrow$	$3\alpha^2+2$	$\nearrow$	$\dfrac{139}{5}$

2. On note $m = f(\alpha)$. Pour tout réel k, discuter, selon la valeur de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ dans $[1;5]$.

Corrigé

On pose $m = f(\alpha)$, $A = f(1) = 7$ et $B = f(5) = \dfrac{139}{5}$, avec $m < A < B$.

- **Sur $[1;\alpha]$.** La fonction f est continue et strictement décroissante de A à m. Par le corollaire du TVI, $f(x) = k$ possède une unique solution sur cet intervalle si $m \leqslant k \leqslant A$, et aucune sinon.
- **Sur $[\alpha;5]$.** La fonction f est continue et strictement croissante de m à B. Par le corollaire du TVI, $f(x) = k$ possède une unique solution sur cet intervalle si $m \leqslant k \leqslant B$, et aucune sinon.
- **Dénombrement.** Lorsque $k = m$, les deux intervalles possèdent la même solution $x = \alpha$, qui ne doit être comptée qu'une fois. En regroupant les cas :
  - aucune solution pour $k < m$ ou $k > B$;
  - une solution pour $k = m$;
  - deux solutions distinctes pour $m < k \leqslant A$;
  - une solution pour $A < k \leqslant B$.

3. Montrer que, pour tout k tel que $m < k < \min\{f(1), f(5)\}$, cette équation admet exactement deux solutions, puis proposer un algorithme Python de dichotomie renvoyant un encadrement de l'une d'elles.

Corrigé

3. Pour $m < k < \min(A, B) = A$, les valeurs aux bornes de chacun des intervalles $[1;\alpha]$ et $[\alpha;5]$ encadrent strictement k et f y est continue et strictement monotone. Il existe donc une solution sur chacun, soit exactement deux. Pour approximer celle située dans $[\alpha;5]$, choisir $a = \alpha$, $b = 5$ et répéter $c = (a+b)/2$; si $f(c) < k$, remplacer a par c, sinon remplacer b par c, jusqu'à obtenir $b - a \leq \varepsilon$. L'invariant est $f(a) \leq k \leq f(b)$.

Thème III EPI et exercices plus théoriques

Un exercice à prise d'initiative (EPI) est un exercice non guidé. Le candidat devra faire preuve d'initiative, introduire une fonction par exemple permettant de résoudre le problème posé.

Exercice 13 EPI : Résolution d'une équation (c)

Résoudre sur l'intervalle $[1\,;\,9]$ l'équation (E) :

$$2x^3 + 3x^2 - 120x + 1 = 0$$

Corrigé

On pose $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 1$ pour $x \in [1;9]$.

- **Continuité et variations.** La fonction P est polynomiale, donc continue et dérivable sur $[1;9]$. Pour tout $x \in [1;9]$,
$$P'(x) = 6x^2 + 6x - 120 = 6(x+5)(x-4).$$
Comme $6(x+5) > 0$ sur $[1;9]$, P' est du signe de $x-4$. Ainsi P est strictement décroissante sur $[1;4]$ et strictement croissante sur $[4;9]$. On calcule $P(1) = -114$, $P(4) = -303$ et $P(9) = 622$.

x	1		4		9
Signe de $P'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de P	-114	↘	-303	↗	622

- **Sur $[1;4]$.** La fonction P admet un maximum égal à $P(1) = -114 < 0$. L'équation $P(x) = 0$ n'a donc aucune solution sur cet intervalle.
- **Sur $[4;9]$.** La fonction P est continue et strictement croissante, et
$$\begin{cases} P(4) = -303 < 0 \\ P(9) = 622 > 0. \end{cases}$$
D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]4;9[$.
- **Encadrement de α.** On calcule
$$\begin{cases} P(7{,}02) \approx -1{,}661984 < 0 \\ P(7{,}03) \approx 0{,}520554 > 0. \end{cases}$$
La fonction P étant strictement croissante sur $[4;9]$, on en déduit $\boxed{7{,}02 < \alpha < 7{,}03}$.
- **Conclusion.** L'équation initiale possède exactement une solution dans $[1;9]$.

Exercice 14 Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier avec soin votre raisonnement. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1

Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ telle que :

- la fonction g est dérivable et strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$;
- On a : $g(0) = 5$ et $g(1) = 2$.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = \Big(g(x)\Big)^2$$

Alors l'équation $f(x) = 6$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ 1]$.

Corrigé

- La fonction g est continue sur $[0;1]$ puisqu'elle est dérivable. Elle est strictement décroissante de $g(0) = 5$ à $g(1) = 2$.
- La fonction carré est continue et strictement croissante sur $[2;5]$. Par composition, $f = g^2$ est donc continue et strictement décroissante sur $[0;1]$.
- On a $f(0) = 25 > 6$ et $f(1) = 4 < 6$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 6$ possède une unique solution dans $]0;1[$.

L'affirmation est vraie.

Affirmation 2

Soit m un réel et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = -x^2 + m & \text{si } \ x \leqslant 3 \\ h(x) = -2x - 1 & \text{si } \ x > 3 \end{cases}$$

La fonction h n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, quelle que soit la valeur de m.

Corrigé

- Les deux expressions polynomiales sont continues sur leurs intervalles. On examine le raccord en 3.
- On a $h(3) = m - 9$. Les deux limites unilatérales sont :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} (-x^2 + m) = m - 9 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} (-2x - 1) = -7. \end{cases}$$

- La continuité en 3 équivaut à $m - 9 = -7$, soit $m = 2$. Pour cette valeur les limites unilatérales coïncident avec $h(3)$; la fonction est donc continue sur $\mathbb{R}$.

L'affirmation est fausse.

Thème IV Points fixes et suites récurrentes

Exercice 15 EPI : Point fixe (c)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, à valeurs dans $[0\,;\,1]$.
Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[0\,;\,1]$.

Corrigé

Posons $g(x) = f(x) - x$ pour tout $x \in [0;1]$.

- **Continuité.** La fonction g est continue sur $[0;1]$, comme différence des fonctions continues f et $x \mapsto x$.
- **Valeurs aux bornes.** L'hypothèse $f([0;1]) \subset [0;1]$ implique

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \geq 0 \\ g(1) = f(1) - 1 \leq 0 \end{cases}.$$

  Le réel 0 est donc compris entre $g(0)$ et $g(1)$.
- **Application du TVI.** Comme g est continue sur $[0;1]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un réel $c \in [0;1]$ tel que $g(c) = 0$.
- **Conclusion.** L'égalité $g(c) = 0$ équivaut à $\boxed{f(c) = c}$. L'existence est démontrée ; aucune unicité n'est affirmée.

Exercice 16 Bac Amérique du Nord 2025 – Suite de racines carrées

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Amérique du Nord, 22 mai 2025, sujet 2A, exercice 2, partie A (extrait).

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = \sqrt{u_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Calculer exactement u_1 et u_2, puis conjecturer le comportement de la suite.

Corrigé

On a $u_0 = 2$, donc :

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{2} \\ u_2 = \sqrt{u_1} = \sqrt[4]{2} \end{cases}.$$

On obtient par la calculatrice :

$$\begin{cases} u_1 \approx 1{,}4142 \\ u_2 \approx 1{,}1892 \\ u_3 \approx 1{,}0905 \\ u_4 \approx 1{,}0443 \end{cases}.$$

Ces valeurs suggèrent que la suite est décroissante et converge vers 1.

2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Corrigé

Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 0$ la propriété

$$P(n) \ : \ 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$$

- **Initialisation**

  Pour $n = 0$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque :

  $$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_1 = \sqrt{2} \in [1;2] \end{cases} \quad \Longrightarrow 1 \leqslant u_1 = \sqrt{2} \leqslant u_0 = 2$$

- **Hérédité**

  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

  Remarque

  On admet que :
  - $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$
  - $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$
  - La fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est croissante sur $[0;+\infty[$.

  Et on cherche à montrer que :

  $\boxed{1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}}$ à prouver

  On applique l'hypothèse de récurrence qui implique que $P(n)$ soit vérifiée et donc que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
  On compose par la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$ qui est croissante sur $[0;+\infty[$:

  $$f(1) = 1 \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \iff 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$$

  On a alors montré que $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$
  et donc que $P(n+1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.

- **Conclusion**

  On a montré que $P(0)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

  $$\boxed{1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$$

3. En déduire que (u_n) converge.

Corrigé

Rappel – théorème de convergence des suites monotones : toute suite décroissante et minorée converge vers une limite réelle.

- D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.
- De plus, $u_{n+1} \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2 \geqslant 1$. La suite est donc minorée par 1.
- Les deux hypothèses étant vérifiées, d'après le théorème de convergence des suites monotones, il existe un réel $\ell \geqslant 1$ tel que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.}$$

4. Résoudre sur $[0;+\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = x$.

Corrigé

Pour $x \geq 0$, on a :

$$\sqrt{x} = x \iff \sqrt{x}(1-\sqrt{x}) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Les deux solutions appartiennent à $[0;+\infty[$.

5. Justifier rigoureusement la valeur de la limite de (u_n), en énonçant les hypothèses du théorème utilisé.

Corrigé

Théorème 1 (Théorème du point fixe)

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui-même et (u_n) la suite définie par un réel $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque

Une telle suite ne converge pas forcément, même si f possède un point fixe (c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$).

Repère historique

- L. E. J. Brouwer (1881–1966) a établi un théorème général d'existence de point fixe.
- S. Banach (1892–1945) a établi un théorème du point fixe contractant.

Vérifions les conditions d'application du théorème du point fixe :

Données

- $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $I = [1;+\infty[$ et $f(I) \subset I$.
- $u_0 = 2 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- La suite converge vers $\ell \in I$ d'après les questions précédentes.

D'après le théorème du point fixe, $\sqrt{\ell} = \ell$. Les solutions de l'équation sont 0 et 1. Or $\ell \in I$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}.$$

Exercice 17 Bac Métropole 2025 – Un modèle de croissance

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Métropole, 17 juin 2025, sujet 1, exercice 4, partie A (extrait adapté).

Une superficie couverte par une plante marine est modélisée, en hectares, par une suite (u_n) vérifiant

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = -0{,}02u_n^2 + 1{,}3u_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

On note h la fonction définie sur $[0;20]$ par $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$.

1. Calculer u_1 et interpréter la valeur obtenue.

Corrigé

On sait que $u_0 = 1$ et que $u_{n+1} = h(u_n)$ avec $h(x) = -0{,}02x^2 + 1{,}3x$.

$$\begin{aligned} u_1 &= -0{,}02u_0^2 + 1{,}3u_0 \\ &= -0{,}02 \times 1^2 + 1{,}3 \times 1 \\ \boxed{u_1 &= 1{,}28.} \end{aligned}$$

Au 1er juillet 2025, la superficie prévue est donc de $\boxed{1{,}28 \text{ hectare}}$.

2. Étudier les variations de h sur $[0;20]$.

Corrigé

- **Dérivabilité.** La fonction h est polynomiale, donc dérivable sur $[0;20]$. Pour tout $x \in [0;20]$:

$$h'(x) = -0{,}04x + 1{,}3.$$

- **Signe de la dérivée.** Pour tout $x \in [0;20]$, on a $h'(x) \geq 1{,}3 - 0{,}04 \times 20 = 0{,}5 > 0$. Donc h est strictement croissante sur $[0;20]$.
- **Valeurs aux bornes.** On calcule :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(20) = -0{,}02 \times 20^2 + 1{,}3 \times 20 = 18 \end{cases}.$$

- **Tableau de variations.**

x	0		20
Signe de $h'(x)$		$+$	
Variations de h	0	↗	18

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

Corrigé

Pour tout entier naturel n, notons $P(n)$ la propriété :

$$P(n) : \quad 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20.$$

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1{,}28$, donc :

  $$1 \leq u_0 = 1 \leq u_1 = 1{,}28 \leq 20.$$

  La propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Supposons, pour un entier naturel n fixé, $P(n)$ vraie, c'est-à-dire :

  $$1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20.$$

  La fonction h est croissante sur $[0; 20]$, et tous les nombres encadrés appartiennent à cet intervalle. En composant par h, on obtient :

  $$h(1) \leq h(u_n) \leq h(u_{n+1}) \leq h(20).$$

  Or :

  $$\begin{cases} h(1) = 1{,}28 \geq 1 \\ h(u_n) = u_{n+1} \\ h(u_{n+1}) = u_{n+2} \\ h(20) = 18 \leq 20 \end{cases}.$$

  Donc :

  $$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 20.$$

  La propriété $P(n+1)$ est établie.

- **Conclusion.** La propriété est vraie au rang 0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence :

  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 20.}$$

4. Justifier la convergence de (u_n) vers une limite ℓ appartenant à $[1; 20]$.

Corrigé

On rappelle le **théorème de convergence des suites monotones** : toute suite croissante et majorée est convergente.

- D'après la question précédente, $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: (u_n) est croissante.
- De plus, $u_n \leq 20$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: (u_n) est majorée par 20.
- Par le théorème de convergence des suites monotones, (u_n) converge vers un réel ℓ.
- Enfin, puisque $1 \leq u_n \leq 20$ pour tout n, le passage à la limite dans cet encadrement montre que $\ell \in [1; 20]$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \in [1; 20].}$$

5. Démontrer que $\ell = 15$, en appliquant le théorème du point fixe après avoir vérifié ses hypothèses.

Corrigé

Théorème 2 (Théorème du point fixe)

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui-même et (u_n) la suite définie par un réel $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque

Une telle suite ne converge pas forcément, même si f possède un point fixe (c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$).

Données – vérification des hypothèses

- On choisit $I = [1; 20]$. La fonction h, polynomiale, est continue sur I.
- D'après le tableau de variations, h est croissante sur I. Comme $h(1) = 1{,}28$ et $h(20) = 18$:

$$h(I) = [1{,}28; 18] \subset [1; 20] = I.$$

- La suite est définie par $u_0 = 1 \in I$ et $u_{n+1} = h(u_n)$.
- Nous avons démontré que (u_n) converge vers $\ell \in I$.

Toutes les hypothèses sont vérifiées. **D'après le théorème du point fixe**, $h(\ell) = \ell$.

$$\begin{aligned} h(\ell) = \ell &\iff -0{,}02\ell^2 + 1{,}3\ell = \ell \\ &\iff -0{,}02\ell^2 + 0{,}3\ell = 0 \\ &\iff \ell(-0{,}02\ell + 0{,}3) = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = 15. \end{aligned}$$

Or $\ell \in [1; 20]$; on exclut donc 0. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 15.}$$

Attention : la convergence a été démontrée avant l'application du théorème ; l'équation $h(\ell) = \ell$ n'aurait pas suffi à la prouver.

Exercice 18 [!] Bilan Points fixes et raisonnement

1. Point fixe. On considère $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0; 1]$.

1. a. Montrer que $f([0; 1]) \subset [0; 1]$.

Corrigé

Pour tout $x \in [0; 1]$, on a $1 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 2$. Comme ces nombres sont strictement positifs, on

obtient :

$$\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

En particulier, $\boxed{f([0;1]) \subset [0;1]}$.

1. b. En introduisant une fonction auxiliaire, démontrer que $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[0;1]$.

Corrigé

On introduit la fonction auxiliaire g définie sur $[0;1]$ par $g(x) = f(x) - x$.

- **Continuité.** Sur $[0;1]$, le dénominateur $1+x^2$ ne s'annule pas : f est donc continue, de même que g, différence de fonctions continues.
- **Stricte monotonie.** Pour $x \in [0;1]$,

$$g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} - 1 < 0.$$

  La fonction g est donc strictement décroissante sur $[0;1]$.
- **Valeurs aux bornes.** On calcule :

$$\begin{cases} g(0) = 1 > 0 \\ g(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0. \end{cases}$$

- **Application du corollaire du TVI.** La fonction g étant continue et strictement décroissante sur $[0;1]$, et 0 étant strictement compris entre $g(1)$ et $g(0)$, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha \in]0;1[$.

On en déduit $\boxed{f(\alpha) = \alpha}$.

1. c. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Corrigé

Par balayage au centième, on obtient :

$$\begin{cases} g(0{,}68) \approx 0{,}0038074 > 0 \\ g(0{,}69) \approx -0{,}0125391 < 0. \end{cases}$$

Comme g est strictement décroissante et s'annule en α, on en déduit l'encadrement d'amplitude 10^{-2} :

$$\boxed{0{,}68 < \alpha < 0{,}69}.$$

2. Prise d'initiative. Commencer par déterminer les limites de $x \mapsto x^3+x-3$ aux deux infinis. Démontrer ensuite que l'équation $x^3+x-3=0$ admet une unique solution réelle, puis l'encadrer entre deux entiers consécutifs.

Corrigé

On pose $P(x) = x^3 + x - 3$.

- **Limites.** Pour $x \neq 0$, on factorise :

$$P(x) = x^3\left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right).$$

Le facteur entre parenthèses tend vers $1 > 0$ aux deux infinis ; par produit :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty}.$$

- **Continuité et variations.** La fonction P est polynomiale, donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$P'(x) = 3x^2 + 1 > 0.$$

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- **Encadrement.** On a $P(1) = -1 < 0$ et $P(2) = 7 > 0$.
- **Conclusion.** D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution réelle γ et $\boxed{1 < \gamma < 2}$.

3. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.

Affirmation 1

Toute fonction continue h de $[0;1]$ dans $[0;1]$ possède exactement un point fixe.

Corrigé

3. Affirmation fausse. La fonction identité $h(x) = x$ est continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$ et chaque élément de $[0;1]$ est un point fixe ; l'unicité n'est donc pas garantie.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 19, page 40.
Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 20, page 42.
Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 19 [+] Consolidation Points fixes et raisonnement

1. Point fixe. Soit $f(x) = \dfrac{1}{2+x^2}$ sur $[0;1]$.

1. a. Montrer que $f([0;1]) \subset [0;1]$.

Corrigé

Pour tout $x \in [0;1]$, on a $2 \leqslant 2 + x^2 \leqslant 3$. Comme ces nombres sont strictement positifs, on

obtient :

$$\frac{1}{3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

En particulier, $\boxed{f([0;1]) \subset [0;1]}$.

1. b. En introduisant $g(x) = f(x) - x$, démontrer que $f(x) = x$ possède une unique solution β dans $[0;1]$.

Corrigé

Posons $g(x) = f(x) - x$ pour $x \in [0;1]$.

- La fonction g est continue sur $[0;1]$ comme différence de fonctions continues.
- Pour tout $x \in [0;1]$, $g'(x) = -\frac{2x}{(2+x^2)^2} - 1 < 0$. Ainsi g est strictement décroissante.
- On a $g(0) = \frac{1}{2} > 0 \quad$ et $\quad g(1) = -\frac{2}{3} < 0$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\beta \in]0;1[$. On obtient donc $\boxed{f(\beta) = \beta}$.

1. c. Donner un encadrement de β d'amplitude 10^{-2}.

Corrigé

Par balayage au centième, on obtient :

$$\begin{cases} g(0{,}45) \approx 0{,}0040295 > 0 \\ g(0{,}46) \approx -0{,}007839 < 0. \end{cases}$$

Comme g est strictement décroissante et s'annule en β, on en déduit l'encadrement d'amplitude 10^{-2} :

$$\boxed{0{,}45 < \beta < 0{,}46}.$$

2. Prise d'initiative. Déterminer les limites de $x \mapsto x^3 + 2x - 4$ en $-\infty$ et $+\infty$, puis démontrer que l'équation $x^3 + 2x - 4 = 0$ possède une unique solution réelle et la situer entre deux entiers consécutifs.

Corrigé

On introduit la fonction polynomiale $P(x) = x^3 + 2x - 4$.

- **Limites aux infinis.** Pour $x \neq 0$,

$$P(x) = x^3 \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right).$$

On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) = 1 > 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \end{cases} \underset{\text{par produit}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty.}$$

De même, le facteur tend vers $1 > 0$ lorsque $x \to +\infty$, et $x^3 \to +\infty$, donc

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty}$.

- **Continuité.** La fonction P est continue sur $\mathbb{R}$, car elle est polynomiale.
- **Stricte monotonie.** Pour tout réel x,

$$P'(x) = 3x^2 + 2 > 0.$$

Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- **Encadrement.** On calcule $P(1) = -1 < 0$ et $P(2) = 8 > 0$.
- **Conclusion.** D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe une unique solution $\beta \in]1;2[$ de l'équation $P(x) = 0$. C'est l'unique solution sur $\mathbb{R}$, puisque P y est strictement croissante.

3. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.

Affirmation 1

Toute fonction continue h de $[0;1]$ dans $[0;1]$ possède au moins un point fixe.

Corrigé

3. Affirmation vraie. Pour $g(x) = h(x) - x$, continue sur $[0;1]$, $g(0) = h(0) \geq 0$ et $g(1) = h(1) - 1 \leq 0$; le TVI garantit l'existence d'au moins un zéro de g.

Exercice 20 [*] Approfondissement Points fixes et suites récurrentes

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0;1]$ et (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Justifier l'existence et l'unicité d'un point fixe $\alpha \in [0;1]$ de f.

Corrigé

On pose $g(x) = f(x) - x = \dfrac{1}{1+x^2} - x$ sur $[0;1]$.

- **Continuité.** Le dénominateur $1 + x^2$ ne s'annule pas : g est continue sur $[0;1]$.
- **Stricte monotonie.** Pour $x \in [0;1]$,

$$g'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} - 1 < 0.$$

Donc g est strictement décroissante sur $[0;1]$.

- **Valeurs aux bornes.** On calcule

$$\begin{cases} g(0) = 1 > 0 \\ g(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0. \end{cases}$$

- **Conclusion.** Comme 0 est strictement compris entre $g(0)$ et $g(1)$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence d'une unique solution $\alpha \in]0;1[$ de $g(x) = 0$, autrement dit $\boxed{f(\alpha) = \alpha}$.

2. Montrer que tous les termes de (u_n) appartiennent à $[0;1]$.

Corrigé

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$: « $u_n \in [0;1]$ ».

- **Initialisation.** On a $u_0 = 0 \in [0;1]$, donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Supposons $P(n)$ vraie. Pour $x \in [0;1]$, $1 \leqslant 1 + x^2 \leqslant 2$, d'où $\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$: $f([0;1]) \subset [0;1]$. Ainsi $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;1]$.
- **Conclusion.** Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \in [0;1]}$.

3. La suite (u_n) est-elle monotone ? Justifier en calculant ses premiers termes.

Corrigé

3. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1/2$ et $u_3 = 4/5$. La suite monte puis descend, donc elle n'est ni croissante ni décroissante.

4. Montrer que si la suite (u_n) converge vers un réel L, alors $L = \alpha$. Cette égalité suffit-elle à prouver la convergence ?

Corrigé

4. Si $u_n \to L$, alors $L \in [0;1]$ puisque cet intervalle est fermé. La continuité de f en L permet de passer à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$: $L = f(L)$. Par unicité du point fixe, $L = \alpha$. Cette égalité est seulement une condition nécessaire et ne suffit pas à démontrer la convergence.

5. Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse.

Affirmation 1

Une fonction continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$ peut posséder plusieurs points fixes.

Corrigé

5. Affirmation vraie. La fonction identité $h(x) = x$ est continue de $[0;1]$ dans lui-même et possède une infinité de points fixes.

Thème V En route vers le bac

Exercice 21 Baccalauréat – Étude d'une fonction et dichotomie

Source : Adapté du baccalauréat spécialité mathématiques, Amérique du Sud, 21 novembre 2024, exercice 1, partie B.

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = (20x+8)\,\mathrm{e}^{\,-x/4}.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} (20x+8)\,\mathrm{e}^{\,-x/4}$. On justifiera la levée de la forme indéterminée à l'aide des croissances comparées.

Corrigé

- **Transformation de l'expression.** En posant $t = x/4$, on a $t \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, et

$$f(x) = (80t+8)e^{-t} = 80\frac{t}{e^t} + 8\frac{1}{e^t}.$$

- **Limites de référence.** Par croissances comparées et par limite de l'exponentielle,

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t}{e^t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{e^t} = 0 \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}.$$

2. Justifier que f est continue et dérivable sur $[0;+\infty[$, puis démontrer que

$$f'(x) = (18-5x)\,\mathrm{e}^{\,-x/4}.$$

Corrigé

2. f est un produit de fonctions continues et dérivables sur $[0;+\infty[$. Par la règle du produit et celle de dérivation composée,

$$f'(x) = 20\,\mathrm{e}^{\,-x/4} - (20x+8)\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{\,-x/4} = (18-5x)\,\mathrm{e}^{\,-x/4}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f, en précisant la valeur exacte de son maximum.

Corrigé

- **Étude du signe de f'.** Pour tout $x \geq 0$, $\mathrm{e}^{\,-x/4} > 0$. Le signe de $f'(x) = (18-5x)\,\mathrm{e}^{\,-x/4}$ est donc celui de $18-5x$, qui s'annule en $x = \frac{18}{5}$.
  - sur $[0;\frac{18}{5}[$, $f'(x) > 0$;
  - en $x = \frac{18}{5}$, $f'(x) = 0$;
  - sur $]\frac{18}{5};+\infty[$, $f'(x) < 0$.

- **Valeurs et limites.**

$$\begin{cases} f(0) = 8 \\ f\left(\frac{18}{5}\right) = 80\,\mathrm{e}^{\,-9/10} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0. \end{cases}$$

- **Tableau de variations.**

x	0		$\frac{18}{5}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	8	↗	$80\,\mathrm{e}^{\,-9/10}$	↘	0

La fonction f admet donc sur $[0;+\infty[$ un maximum égal à $\boxed{80\,\mathrm{e}^{\,-9/10}}$, atteint pour $x = \frac{18}{5}$.

4. On s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

4. a. Montrer que cette équation admet une unique solution α dans l'intervalle $[14;15]$.

Corrigé

La fonction f est continue sur $[14;15]$ en tant que produit de fonctions continues et est dérivable sur cet intervalle. Pour $x \in [14;15]$, $18 - 5x < 0$ et $\mathrm{e}^{\,-x/4} > 0$, donc $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante. De plus,

$$f(14) = 288\,\mathrm{e}^{\,-7/2} \approx 8{,}697 > 8, \qquad f(15) = 308\,\mathrm{e}^{\,-15/4} \approx 7{,}243 < 8.$$

Le réel 8 est strictement compris entre $f(15)$ et $f(14)$. D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 8$ admet une **unique solution** $\boxed{\alpha \in]14;15[}$.

4. b. On considère la fonction Python suivante, qui utilise la fonction f définie précédemment :

```
from math import exp

def f(x):
    return (20*x + 8)*exp(-x/4)

def dichotomie():
    a, b = 14, 15
    while b-a > 0.01:
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b
```

3. Expliquer pourquoi la fonction `dichotomie` fournit un encadrement de α d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-2}.

Corrigé

- Initialement, $f(14) > 8 > f(15)$. Supposons qu'à une étape on ait $a \leq \alpha \leq b$ et $f(a) \geq 8 \geq f(b)$.
- Comme f est strictement décroissante sur $[14;15]$, si $f(m) > 8$ alors $m < \alpha$: la nouvelle borne inférieure est $a = m$. Sinon $m \geq \alpha$: la nouvelle borne supérieure est $b = m$. Dans les deux cas, α reste dans le nouvel intervalle. Chaque itération divise son amplitude par 2 ; après un nombre fini d'itérations on a $b - a \leq 0{,}01$.
- La fonction renvoie donc un **encadrement de α d'amplitude au plus 10^{-2}**.

4. À l'aide de la calculatrice ou de Python, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Corrigé

- **Calcul des images.** Avec la calculatrice, on obtient :

$$\begin{cases} f(14{,}45) \approx 8{,}014338 > 8 \\ f(14{,}46) \approx 7{,}999710 < 8. \end{cases}$$

- **Conclusion.** Sur $[14;15]$, la fonction f est continue et strictement décroissante et l'équation $f(x) = 8$ possède une unique solution α. Les deux valeurs obtenues permettent donc d'écrire :

$$\boxed{14{,}45 < \alpha < 14{,}46}.$$

L'amplitude de l'encadrement est 10^{-2}.

5. (Question ajoutée – Algorithmique). Exécuter mentalement les deux premières itérations de la fonction `dichotomie` précédente. Puis déterminer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un intervalle d'amplitude au plus 10^{-2} et les deux valeurs renvoyées par le programme. Justifier les résultats.

Corrigé

- **Rappel de la méthode.** La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[14;15]$; l'équation $f(x) = 8$ y possède une unique solution α. À chaque étape, on conserve l'encadrement $f(a) \geqslant 8 \geqslant f(b)$ et donc $a \leqslant \alpha \leqslant b$.
- **Première itération.** Initialement $(a, b) = (14, 15)$ et $m = 14{,}5$. Or $f(14{,}5) \approx 7{,}9414 < 8$. La condition `f(m) > 8` est fausse : on remplace b par m. On obtient $[14;14{,}5]$.
- **Deuxième itération.** Le nouveau milieu vaut $m = 14{,}25$. Or $f(14{,}25) \approx 8{,}3118 > 8$. On remplace donc a par m. On obtient $[14{,}25;14{,}5]$.
- **Nombre d'itérations.** L'amplitude initiale vaut $15 - 14 = 1$. Après n itérations, elle vaut 2^{-n}. Puisque

$$\begin{cases} 2^{-6} = 0{,}015625 > 10^{-2} \\ 2^{-7} = 0{,}0078125 \leqslant 10^{-2}, \end{cases}$$

le programme effectue exactement $\boxed{7 \text{ itérations}}$.
- **Valeurs renvoyées.** En poursuivant les itérations, on obtient

$$\boxed{(a, b) = (14{,}453125\,;\ 14{,}4609375)}.$$

L'amplitude est bien $b-a = 0{,}0078125 \leqslant 10^{-2}$. On a donc $\boxed{14{,}453125 \leqslant \alpha \leqslant 14{,}4609375}$.

Exercice 22 Baccalauréat Polynésie 2023 – Étude d'une fonction

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Polynésie, septembre 2023, sujet 1, exercice 2, partie A.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-x} + x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Corrigé

En $+\infty$. Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \frac{1}{2\,\mathrm{e}^{x}} + x.$$

Or, par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} x/\mathrm{e}^{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} 1/\mathrm{e}^{x} = 0$; de plus $x \to +\infty$. Par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}.$$

En $-\infty$. On a $\lim_{x\to-\infty}(x+1/2) = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$. Leur produit tend donc vers $-\infty$; de plus $x \to -\infty$. Par somme,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}.$$

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) \mathrm{e}^{-x}.$$

Corrigé

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en dérivant le produit et la somme,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+\tfrac{1}{2})\,\mathrm{e}^{-x} + 1 = 1 + (\tfrac{1}{2} - x)\,\mathrm{e}^{-x},$$
$$f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} - (\tfrac{1}{2} - x)\,\mathrm{e}^{-x} = \boxed{(x - \tfrac{3}{2})\,\mathrm{e}^{-x}}.$$

2. b. En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

- **Signe de f''.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Ainsi $f''(x) = (x - \frac{3}{2})\,\mathrm{e}^{-x}$ est du signe de $x - \frac{3}{2}$: négatif si $x < \frac{3}{2}$, nul si $x = \frac{3}{2}$, positif si $x > \frac{3}{2}$.
- **Limites de f'.** On a $f'(x) = 1 + (\frac{1}{2} - x)\,\mathrm{e}^{-x}$. Lorsque $x \to -\infty$, les deux facteurs de $(\frac{1}{2} - x)\,\mathrm{e}^{-x}$ tendent vers $+\infty$, d'où $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty$. Lorsque $x \to +\infty$, les croissances comparées donnent $\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{2} - x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1$.

- **Minimum.** On calcule
$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) \mathrm{e}^{-3/2} = 1 - \mathrm{e}^{-3/2}.$$
- **Tableau de variations de f'.**

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	$+\infty$	$\searrow$	$1 - \mathrm{e}^{-3/2}$	$\nearrow$	1

Par conséquent f' atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ en $x = \frac{3}{2}$, et ce minimum vaut $\boxed{1 - \mathrm{e}^{-3/2}}$.

2. c. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

Corrigé

Puisque $\mathrm{e}^{-3/2} \in]0;1[$, on a $1 - \mathrm{e}^{-3/2} > 0$. La fonction f' atteint son minimum en $\frac{3}{2}$. Ainsi, pour tout réel x,
$$f'(x) \geq f'(\tfrac{3}{2}) = 1 - \mathrm{e}^{-3/2} > 0.$$
La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. d. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions continues.
- D'après la question précédente, $f'(x) > 0$ pour tout réel x, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- D'après la question 1, ses limites aux bornes sont
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty < 0 < +\infty = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$
Par le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique solution réelle** α.

2. e. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

Corrigé

Une recherche numérique donne

$$f(-0{,}2855) < 0 < f(-0{,}2854).$$

Comme f est strictement croissante, $-0{,}2855 < \alpha < -0{,}2854$. En affinant, $\alpha \approx -0{,}28543966$; son arrondi au millième est donc

$$\boxed{\alpha \approx -0{,}285}.$$

2. f. **(Question ajoutée – Balayage Python).** On souhaite encadrer la solution α de l'équation $f(x) = 0$ par balayage au centième sur $[-1;0]$. Compléter les deux instructions manquantes du programme suivant, puis préciser l'encadrement qu'il renvoie.

```
from math import exp

def f(x):
    return (x + 0.5)*exp(-x) + x

def balayage():
    x = -1.0
    while ...:
        x = round(x + 0.01, 2)
    return ...
```

Corrigé

- **Hypothèses.** D'après les questions précédentes, f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et possède une unique racine α. De plus, $f(-1) < 0$ et $f(0) > 0$, donc $\alpha \in]-1;0[$.
- **Principe du balayage.** Puisque f est strictement croissante, on augmente x de 0,01 tant que $f(x) < 0$. À la sortie, on a $f(x) \geqslant 0$, tandis que la valeur précédente vérifie $f(x - 0{,}01) < 0$.
- **Instructions.** On complète par
  - `while f(x) < 0:`
  - `return (round(x - 0.01, 2), x)`.
- **Contrôle numérique.** On obtient

$$\begin{cases} f(-0{,}29) \approx -0{,}009350 < 0 \\ f(-0{,}28) \approx 0{,}011089 > 0. \end{cases}$$

  Par stricte croissance et unicité de la racine, le programme renvoie $\boxed{(-0{,}29\,;\,-0{,}28)}$, et $\boxed{-0{,}29 < \alpha < -0{,}28}$. L'amplitude est exactement 10^{-2}.

Exercice 23 Bac Asie 2025 – Vrai ou faux ?

Source : Baccalauréat spécialité mathématiques, Asie, 5 septembre 2025, exercice 1, affirmation 4.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{\,-2x}.$$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles.

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis préciser si l'affirmation suivante est vraie ou fausse en justifiant la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1

L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

- La fonction $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-2x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. À $+\infty$, $f(x) = x/\mathrm{e}^{2x} \to 0$ par croissances comparées. À $-\infty$, $x \to -\infty$ et $\mathrm{e}^{-2x} \to +\infty$: le produit tend vers $-\infty$.

  De plus $f'(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{-2x}$, du signe de $1-2x$.
- Ainsi f croît sur $]-\infty;1/2]$ puis décroît sur $[1/2;+\infty[$. Pour $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$, donc aucune solution de $f(x) = -1$.
- Sur $]-\infty;0]$, f est continue, strictement croissante, $f(x) \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$, et $f(0) = 0 > -1$. Le corollaire du TVI donne une unique solution sur cet intervalle. **Affirmation vraie.**

Exercice 24 Bac 2026 – Intersection d'une droite et d'une courbe sinus

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Centres étrangers, 10 juin 2026, sujet 1, exercice 2, affirmation 2 (extrait).

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sin(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère et $\mathcal{C}_g$ celle de la fonction g.

Affirmation 1

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un seul point d'intersection.

Dire si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Corrigé

- **Affirmation vraie.** Les points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont pour abscisses les solutions de $2x = \sin x$. Posons $h(x) = 2x - \sin x$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction h est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$; pour tout réel x,

  $$h'(x) = 2 - \cos x \geq 2 - 1 = 1 > 0.$$

  Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$: l'équation $h(x) = 0$ admet **au plus une solution**.
- Or $h(0) = 0$, donc elle admet **exactement une solution**, $x = 0$. Le point d'intersection est $\boxed{O(0;0)}$.

Exercice 25 Bac 2026 – Fonctions sinus et cosinus

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Asie, 9 juin 2026, sujet 1, exercice 4.

1. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;2\pi]$ par

$$g(x) = x\cos(x) - \sin(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et on note g' sa dérivée.

1. a. Montrer que, pour tout réel x de $[0;2\pi]$, on a $g'(x) = -x\sin(x)$.

Corrigé

Comme $g(x) = x\cos x - \sin x$, la règle du produit donne, pour $x \in [0;2\pi]$,

$$g'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = \boxed{-x\sin x}.$$

1. b. On donne le tableau de variations de g sur $[0;2\pi]$ ci-dessous. Justifier chacun des éléments qui y figurent.

x	0		π		2π
g	0	↘	$-\pi$	↗	2π

Corrigé

- Pour tout $x \in [0;2\pi]$, $x \geq 0$; par conséquent $g'(x)$ a le signe opposé de $\sin x$.
- Sur $]0;\pi[$, $\sin x > 0$ donc $g'(x) < 0$.
- Sur $]\pi;2\pi[$, $\sin x < 0$ donc $g'(x) > 0$. En outre,

$$g(0) = 0, \qquad g(\pi) = -\pi, \qquad g(2\pi) = 2\pi.$$

Ainsi g est strictement décroissante sur $[0;\pi]$ puis strictement croissante sur $[\pi;2\pi]$, ce qui justifie le tableau.

1. c. Montrer qu'il existe une unique valeur réelle α dans $[\pi;2\pi]$ telle que $g(\alpha) = 0$.

Corrigé

- **Continuité.** La fonction $g(x) = x\cos x - \sin x$ est continue sur $[\pi;2\pi]$ comme somme et produit de fonctions continues.
- **Stricte monotonie.** D'après la question précédente, $g'(x) = -x\sin x > 0$ pour $x \in]\pi;2\pi[$. Par conséquent, g est strictement croissante sur $[\pi;2\pi]$.
- **Encadrement de zéro.** On calcule

$$g(\pi) = -\pi < 0 \qquad \text{et} \qquad g(2\pi) = 2\pi > 0.$$

- **Conclusion.** D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une **unique solution** $\boxed{\alpha \in]\pi;2\pi[}$.

1. d. En déduire le tableau de signes de g sur $[0;2\pi]$.

Corrigé

On sait que $g(0) = 0$, que g est strictement décroissante sur $[0;\pi]$, puis strictement croissante sur $[\pi;2\pi]$ et s'annule une seule fois sur $]\pi;2\pi[$, en α. Donc g est strictement négative sur $]0;\alpha[$, nulle en 0 et en α, et strictement positive sur $]\alpha;2\pi]$.

2. On considère la fonction f définie sur $]0;2\pi]$ par

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

On admet que f est dérivable sur $]0;2\pi]$ et on note f' sa dérivée.

2. a. Montrer que, pour tout réel x de $]0;2\pi]$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

Corrigé

Sur $]0;2\pi]$, le dénominateur x ne s'annule pas. Par dérivation d'un quotient,

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}.$$

2. b. Étudier le signe de f' sur $]0;2\pi]$.

Corrigé

Pour $x > 0$, $x^2 > 0$; par conséquent $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Ainsi $f'(x) < 0$ sur $]0;\alpha[$, $f'(\alpha) = 0$ et $f'(x) > 0$ sur $]\alpha;2\pi[$.

2. c. En déduire le sens de variation de f sur $]0;2\pi]$.

Corrigé

- Sur $]0;\alpha[$, on a $f'(x) < 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$.
- Sur $]\alpha;2\pi[$, on a $f'(x) > 0$: elle est strictement croissante sur $[\alpha;2\pi]$.
- On a $f(2\pi) = 0$; la limite en 0^+ sera établie à la question suivante et vaut 1.

Le tableau de variations est donc :

x	0^+		α		2π
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	1	↘	$\dfrac{\sin(\alpha)}{\alpha}$	↗	0

La valeur 1 à gauche représente une limite : 0 n'appartient pas au domaine de f.

2. d. Déterminer la limite de f en 0. On pourra utiliser le taux d'accroissement de la fonction sinus en 0.

Corrigé

Comme $\sin(0) = 0$ et que la fonction sinus est dérivable en 0, de dérivée $\cos(0) = 1$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \boxed{1}.$$

3. On considère deux nombres réels r et s qui vérifient $0 < r < s < \pi$. Montrer que

$$\frac{r}{s} < \frac{\sin(r)}{\sin(s)}.$$

Corrigé

3. Pour $0 < r < s < \pi$, la fonction $x \mapsto \sin x/x$ est strictement décroissante sur $]0;\pi[$ (car $g < 0$ sur cet intervalle). Ainsi

$$\frac{\sin r}{r} > \frac{\sin s}{s}.$$

Comme $r, s, \sin s$ sont strictement positifs, on peut multiplier et diviser sans changer le sens de l'inégalité, ce qui donne $\boxed{\frac{r}{s} < \frac{\sin r}{\sin s}}$.

Exercice 26 Bac Métropole 2025 – Suite récurrente et point fixe

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Métropole, 9 septembre 2025, jour 1, exercice 3, partie A (extrait).

Partie A (extrait du sujet officiel)
On considère la fonction f définie sur $[2;+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

x	2	$+\infty$
Variations de f	2 ↗	$+\infty$

On admet que la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 6$ et, pour tout n entier naturel, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

Corrigé

- **Définition et dérivabilité.** Sur $[2;+\infty[$, on a $3x - 2 \geq 4 > 0$. La fonction $x \mapsto 3x-2$ est dérivable et la fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$. Par composition, f est donc dérivable sur $[2;+\infty[$ (avec dérivée à droite en 2) et :

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}.$$

- **Signe de la dérivée.** Pour tout $x \geq 2$, $2\sqrt{3x-2} > 0$, d'où $\boxed{f'(x) > 0}$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[2;+\infty[$.

- **Valeurs aux bornes.** On a $f(2) = \sqrt{4} = 2$. De plus :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (3x-2) = +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty \end{cases} \underset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

- **Tableau de variations.** Ces résultats justifient le tableau fourni dans l'énoncé : f est strictement croissante de 2 vers $+\infty$.

2.2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel :

$$2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 6.$$

Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P(n)$ la propriété :

$$P(n) : \qquad 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6.$$

- **Initialisation.** $u_0 = 6$ et $u_1 = \sqrt{3\times 6 - 2} = 4$. Ainsi :

$$\boxed{2 \leq u_1 = 4 \leq u_0 = 6 \leq 6}.$$

  La propriété $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons $P(n)$ vraie :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6.$$

  La fonction f est croissante sur $[2;6]$ et $f(2) = 2$. En composant par f, on obtient :

$$2 = f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n),$$

  soit $2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$. Or $u_{n+1} \leq 6$ par hypothèse, d'où :

$$\boxed{2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 6}.$$

  La propriété $P(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6}.$$

2. b. En déduire que la suite (u_n) converge.

Corrigé

D'après l'inégalité établie à la question précédente :

- $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite est décroissante ;
- $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite est minorée par 2.

Par le **théorème de convergence des suites monotones**, la suite (u_n) converge vers un

réel $\ell \in [2;6]$:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in [2;6]}.$$

3. On appelle ℓ la limite de (u_n). On admet qu'elle est solution de l'équation $f(x) = x$. Déterminer la valeur de ℓ.

Corrigé

Théorème 3 (Théorème du point fixe)

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui-même et (u_n) la suite définie par un réel $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque

Une telle suite ne converge pas forcément, même si f possède un point fixe (c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$).

Nous vérifions les hypothèses :

- **Données – hypothèses du théorème.**
  - On choisit $I = [2;6]$. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x-2}$ y est continue.
  - La fonction est croissante sur I. On a $f(2) = 2$ et $f(6) = 4$, donc $f(I) = [2;4] \subset I$.
  - La suite vérifie $u_0 = 6 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  - La question précédente prouve que (u_n) converge vers $\ell \in I$.
- **Application du théorème du point fixe.** Toutes les hypothèses sont vérifiées. Par continuité de f en ℓ :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f(\ell) = \ell}.$$

  Ainsi, $\sqrt{3\ell-2} = \ell$.
- **Résolution et conclusion.** Puisque $\ell \geq 2$, les deux membres sont positifs ; on peut les élever au carré :

$$\begin{aligned} \sqrt{3\ell-2} = \ell &\iff 3\ell - 2 = \ell^2 \\ &\iff \ell^2 - 3\ell + 2 = 0 \\ &\iff (\ell-1)(\ell-2) = 0 \\ &\iff \ell = 1 \quad \text{ou} \quad \ell = 2. \end{aligned}$$

  Or $\ell \in [2;6]$, donc $\ell = 1$ est exclu. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}.$$

Remarque : l'équation de point fixe n'établit pas la convergence ; celle-ci a déjà été démontrée par le théorème des suites monotones.

4. On considère la fonction `rang` écrite ci-dessous en langage Python. On rappelle que `sqrt(x)` renvoie la racine carrée du nombre x.

```
from math import *

def rang(a):
    u = 6
    n = 0
    while u >= a:
        u = sqrt(3*u - 2)
        n = n + 1
    return n
```

4.4. a. Pourquoi peut-on affirmer que `rang(2.000001)` renvoie une valeur ?

Corrigé

- **Limite de la suite.** On a établi $u_n \to 2$.
- **Seuil.** Comme $2{,}000001 > 2$, la définition de la limite assure qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n < 2{,}000001$.
- **Conclusion.** La condition de la boucle `while u >= a` devient donc fausse après un nombre fini d'itérations. La fonction `rang(2.000001)` renvoie le plus petit entier n pour lequel $u_n < 2{,}000001$.

4. b. Pour quelles valeurs du paramètre a l'instruction `rang(a)` renvoie-t-elle un résultat ?

Corrigé

- **Cas $a > 2$.** Puisque $u_n \to 2 < a$, il existe un rang N tel que $u_N < a$. La boucle s'arrête donc.
- **Cas $a \leq 2$.** Montrons que $u_n > 2$ pour tout n. En effet, $u_0 = 6 > 2$ et, pour tout $x > 2$, on a $3x - 2 > 4$, donc $f(x) = \sqrt{3x-2} > 2$. Par récurrence, $u_n > 2$ pour tout n. Ainsi, pour $a \leq 2$, on a toujours $u_n \geq a$: la condition de poursuite de la boucle reste vraie et celle-ci ne s'arrête jamais.
- **Conclusion.** La fonction `rang(a)` renvoie une valeur exactement pour :

$$\boxed{a > 2}.$$

Exercice 27 Bac Métropole 2026 – Exponentielle, variations et TVI

Source : APMEP, Baccalauréat spécialité mathématiques, Métropole–La Réunion, 9 septembre 2026, sujet 2, exercice 2, questions 1 à 4.c (extrait reformulé).

On considère la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = (3x - 1)\,\mathrm{e}^{\,-x} + 2.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$.

Corrigé

- **Limites des facteurs.** Lorsque $x \to -\infty$, on a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (3x-1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty \\ \lim\limits_{t\to+\infty} e^t = +\infty \end{cases}.$$

  Par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

- **Conclusion.** Par produit, $(3x-1)e^{-x}$ tend vers $-\infty$, puis par somme avec 2,

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}.$$

2. Calculer la limite de f en $+\infty$ en justifiant la levée de la forme indéterminée. Interpréter graphiquement le résultat.

Corrigé

- **Levée de la forme indéterminée.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(3x-1)e^{-x} = 3\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}.$$

- **Croissances comparées.** On sait que

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0 \end{cases} \underset{\text{par somme}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty} (3x-1)e^{-x} = 0.$$

  On en déduit, par somme avec la constante 2,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2}.$$

3. Étude des variations.

3. a. Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (4-3x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

Corrigé

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{-x} - (3x-1)e^{-x} \\ &= (4-3x)e^{-x}. \end{aligned}$$

3. b. Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

- **Signe de la dérivée.** Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-x} > 0$. Ainsi $f'(x) = (4-3x)\,\mathrm{e}^{-x}$ est du signe de $4-3x$.
$$4-3x = 0 \iff x = \frac{4}{3}.$$
Par conséquent :
  - si $x < \frac{4}{3}$, alors $f'(x) > 0$;
  - si $x = \frac{4}{3}$, alors $f'(x) = 0$;
  - si $x > \frac{4}{3}$, alors $f'(x) < 0$.
- **Valeur remarquable.** On calcule :
$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(3 \times \frac{4}{3} - 1\right)\mathrm{e}^{-4/3} + 2 = \boxed{2 + 3\,\mathrm{e}^{-4/3}}.$$
- **Tableau de variations.** Les limites aux deux infinis ont été obtenues aux questions précédentes. On en déduit :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	↗	$2+3\,\mathrm{e}^{-4/3}$	↘	2

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;\frac{4}{3}]$ puis strictement décroissante sur $[\frac{4}{3};+\infty[$. Son maximum sur $\mathbb{R}$ est $\boxed{2+3\,\mathrm{e}^{-4/3}}$, atteint en $x = \frac{4}{3}$.

4. Étude de l'équation $f(x) = 0$.

4. a. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle α. Préciser à chaque étape les hypothèses du théorème utilisé.

Corrigé

- **Sur $]-\infty;\frac{4}{3}]$.**
  - La fonction f est continue sur cet intervalle, car elle est une somme et un produit de fonctions continues.
  - D'après le tableau de variations, f est strictement croissante sur cet intervalle.
  - On a :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty < 0 \\ f\left(\frac{4}{3}\right) = 2 + 3\,\mathrm{e}^{-4/3} > 0 \end{cases}$$
  - D'après le **corollaire du théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty;\frac{4}{3}[$.

- **Sur $[\frac{4}{3};+\infty[$.** D'après le tableau de variations, le minimum de f sur cet intervalle n'est pas atteint, mais $f(x) > 2 > 0$ pour tout $x \geq \frac{4}{3}$ (et $f(x) \to 2$ en $+\infty$). Par conséquent, l'équation $f(x) = 0$ n'y admet aucune solution.
- **Conclusion.** L'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution réelle $\boxed{\alpha \in]-\infty;\frac{4}{3}[}$.

On peut représenter cette solution sur le tableau de variations :

x	$-\infty$	α	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$	0	$2+3\,\mathrm{e}^{-4/3}$	2

4. b. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Corrigé

- **Valeurs encadrantes.** On obtient à l'aide de la calculatrice :

$$\begin{cases} f(-0{,}21) \approx -0{,}010895 < 0 \\ f(-0{,}20) \approx 0{,}045756 > 0 \end{cases}$$

- **Encadrement.** Comme f est continue et strictement croissante sur $]-\infty;\frac{4}{3}]$, et que $f(\alpha) = 0$, on en déduit :

$$\boxed{-0{,}21 < \alpha < -0{,}20}.$$

- **Arrondi.** Un calcul plus précis donne $\alpha \approx -0{,}20809$; sa valeur arrondie au centième est donc $\boxed{\alpha \approx -0{,}21}$.

4. c. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$, en justifiant.

Corrigé

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule qu'en α. D'après les variations établies, $f(x) < 0$ pour $x < \alpha$, $f(\alpha) = 0$ et $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

Thème VI Devoir maison

Exercice 28 Une population animale : suite récurrente et point fixe

On étudie l'évolution d'une population animale dans un milieu où l'on introduit 6 000 individus au 1er janvier 2025. On suppose que l'évolution de cette population est modélisée par la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 6 \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = -0{,}05v_n^2 + 1{,}1v_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout entier naturel n, v_n représente la population au 1er janvier de l'année $2025+n$, exprimée en milliers d'individus.

1. Donner, selon ce modèle, la population au 1er janvier 2026.

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = -0{,}05x^2 + 1{,}1x$.

2. Démontrer que f est croissante sur $[0;11]$.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 6$.

4. En déduire que (v_n) converge vers une limite ℓ.

5. a. Justifier que $f(\ell) = \ell$, puis déterminer ℓ.

5. b. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 29 Un modèle exponentiel : limites, TVI et convergence

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = (x+1)e^{-x}.$$

Partie A – Étude de la fonction et point fixe

1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, en justifiant la levée de toute forme indéterminée.

2. Calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.

3. On pose $g(x) = f(x) - x$.

3. a. Démontrer que g est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.

3. b. Étudier les signes de $g(0)$ et de $g(1)$, puis démontrer que $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in]0;1[$.

3. c. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B – Une suite qui n'est pas monotone On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer par récurrence que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout entier naturel n.

2. Calculer u_1, u_2 et u_3. La suite (u_n) semble-t-elle monotone ?

3. On considère $h(x) = xe^{-x}$ sur $[0;1]$.

3. a. Étudier les variations de h sur $[0;1]$ et en déduire que $0 \leqslant h(x) \leqslant \dfrac{1}{e}$.

3. b. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tous $x, y \in [0;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{e}|x - y|.$$

4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{e}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

En déduire la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.

Exercice 30 Un paramètre et le nombre de solutions

Pour tout réel m, on considère l'équation

$$(E_m) : \qquad x^3 - 3x = m.$$

1. Déterminer les limites aux deux infinis de $F(x) = x^3 - 3x$, puis étudier précisément les variations de F sur $\mathbb{R}$.
2. Discuter, suivant la valeur du paramètre réel m, le nombre de solutions réelles de (E_m). Justifier chaque cas par le TVI ou son corollaire et préciser les cas d'égalité.
3. Pour $m = 1$, démontrer que l'équation possède trois solutions réelles distinctes. Donner pour chacune un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
4. On suppose maintenant $-2 < m < 2$. Montrer que la somme des trois solutions distinctes de (E_m) est nulle, sans résoudre explicitement l'équation du troisième degré.

Exercice 31 Point fixe et convergence quantitative

On considère $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ sur $[0;1]$ et la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Montrer que $f([0;1]) \subset [0;1]$, puis que tous les termes de (u_n) appartiennent à $[0;1]$.
2. Prouver que $f(x) = x$ admet un unique point fixe $\ell \in [0;1]$ et déterminer sa valeur exacte.
3. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 ; expliquer pourquoi l'étude directe de la monotonie de (u_n) n'est pas appropriée.
4. Démontrer que, pour tous $x, y \in [0;1]$,
$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{4}|x - y|.$$
5. En déduire par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell|.$$
Justifier la convergence de (u_n) et déterminer sa limite.
6. Déterminer un entier naturel N tel que, pour tout $n \geqslant N$, on soit certain que $|u_n - \ell| < 10^{-6}$. Justifier rigoureusement, sans utiliser de logarithme.

Exercice 32 Défi théorique – Que garantit la continuité ?

Soit f une fonction continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$.

1. En appliquant le TVI à une fonction auxiliaire soigneusement définie, démontrer qu'il existe $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = c$.
2. Si f est strictement décroissante, prouver que ce point fixe est unique.
3. Construire une fonction continue de $[0;1]$ dans $[0;1]$ ayant exactement deux points fixes, puis une fonction ayant une infinité de points fixes.
4. On suppose que f est strictement décroissante et que la suite définie par $u_0 \in [0;1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ converge. Démontrer que sa limite est nécessairement l'unique point fixe de f. Expliquer pourquoi le résultat ne prouve pas, à lui seul, la convergence.

Exercice 33 Défi supplémentaire – Une récurrence d'ordre deux

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = \dfrac{1}{2}, \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n. \end{cases}$$

Partie A – Conjecture

1. Compléter le tableau suivant avec les valeurs exactes des termes.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			

2. Formuler une conjecture sur la limite éventuelle de (u_n).

Partie B – Suite auxiliaire On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

1. Calculer w_0.
2. Démontrer que (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
3. Exprimer w_n en fonction de n.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n.$$
5. Établir par récurrence que $u_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie C – Convergence et passage à la limite

1. Justifier que (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
2. Prouver que (u_n) converge, sans utiliser sa formule explicite.
3. On note ℓ sa limite. En passant à la limite dans la relation de récurrence, déterminer ℓ. Justifier précisément ce passage à la limite.

Fin du TD