MATH93

Terminale Spécialité Mathématiques

Cours complet – méthode – démonstrations exigibles

COURS

Fonctions – Compléments de dérivation

Dérivation et convexité

Version professeur

Sommaire du chapitre

I Nombre dérivé d'une fonction en un point (rappels) . . . 2
II Fonction dérivée (rappels) . . . 3
III Compléments de dérivation . . . 5
IV Convexité . . . 7



ROC – Démonstration du chapitre

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Si f'' est positive sur I, alors la courbe représentative de f est située au-dessus de chacune de ses tangentes sur I.

I Nombre dérivé d'une fonction en un point (rappels)

Dans toute cette partie, f désigne une fonction définie sur un intervalle I, a et $a+h$ deux réels de I avec $h \neq 0$.

I.1 Taux d'accroissement

Définition 1 (Taux d'accroissement)

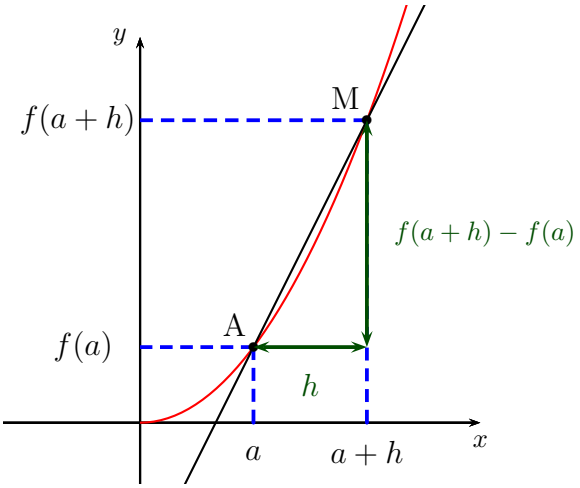
Le **taux d'accroissement** de la fonction f entre a et $a+h$ est le rapport défini par :

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Interprétation graphique :

En notant $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; A le point de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$ et M le point de coordonnées $(a+h\ ;\ f(a+h))$:

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}.$$



Théorème 1

Le taux d'accroissement de f est donc le coefficient directeur de la droite (AM) sécante à $\mathscr{C}_f$.

I.2 Nombre dérivé d'une fonction en un point – Tangente à la courbe d'une fonction en un point

Définition 2 (Nombre dérivé $f'(a)$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable** en a, si et seulement si, le rapport $t(h)$ tend vers un réel L lorsque h tend vers 0.
Le réel L est appelé **nombre dérivé** de f en a, on le note $f'(a)$.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} t(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Remarque : Lorsque h tend vers 0, M se rapproche de A.
La droite (AM) se rapproche de sa « position limite » : la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété 1 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$. Son équation est donnée par :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

I.3 Bilan

Propriété 2 (Nombre dérivé)

Si f est dérivable en a alors :

1. Le réel $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a ;
2. Le réel $f'(a)$ est la limite quand h tend vers 0 du taux $t(h)$;

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \ t(h) = \lim_{h\to 0} \ \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

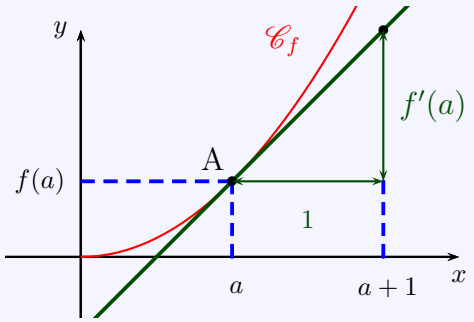
3. Le réel $f'(a)$ est le coefficient directeur de la **tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$** au point $A\,(a\ ;\ f(a))$ et l'équation de cette tangente est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$

Propriété 3 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donnée par :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$$



II Fonction dérivée (rappels)

II.1 Définition

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable sur I** si f est dérivable en tout point de I.
Alors, la fonction qui à tout x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) = f'(x) \end{array} \right.$$

II.2 Dérivées de quelques fonctions usuelles

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I, k et m des réels (des constantes). On démontre que les dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur I, sont :

I	f définie par $f(x)=$	Dérivée de f	Notation « abusive »
$\mathbb{R}$	$Constante = k$	0	$(Cte)' = 0$
$\mathbb{R}$	$mx+k$	m	$(mx+k)' = m$
$\mathbb{R}$	x	1	$(x)' = 1$
$\mathbb{R}$	x^2	$2x$	$\left(x^2\right)' = 2x$
$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$	$\left(x^3\right)' = 3x^2$
$\mathbb{R}$	x^n où $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

II.3 Dérivées et opérations

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I, k et m des réels (des constantes).

I	f de la forme	Dérivée de f	Notation « abusive »	Exemples
I	$k \times u$	$k \times u'$	$(ku)' = ku'$	$\left(-3x^4\right)' = -12x^3$ ou $\left(\dfrac{x^3}{4}\right)' = \dfrac{3x^2}{4}$
I	$u+v$	$u'+v'$	$(u+v)' = u'+v'$	$\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)' = 2-\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$
I	$u \times v$	$u'v+uv'$	$(u\times v)' = u'v+uv'$	$(x\times\sqrt{x})' = 1\times\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$
I avec v non nul sur I	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	$\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$
I avec v non nul sur I	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{1}{3+2x^2}\right)' = \dfrac{-4x}{(3+2x^2)^2}$
I	u^2	$2u'u$	$\left(u^2\right)' = 2u'u$	$\left((1+x+x^2)^2\right)' = 2(1+2x)(1+x+x^2)$

III Compléments de dérivation

III.1 Dérivée de la fonction composée

Propriété 4 (Admis)

Soit v une fonction dérivable sur un intervalle J et u une fonction dérivable sur un intervalle I tel que pour tout réel x appartenant à I, $u(x)$ appartient à J.
La fonction composée v o u est dérivable sur I et :

$$\boxed{(v\circ u)' = (v'\circ u)\times u'} \quad \text{ou} \quad \forall x\in I,\ \boxed{(v\circ u)'(x) = v'(u(x))\times u'(x)}$$

Propriété 5 (Admis)

Soit n un entier relatif et u une fonction dérivable sur un intervalle I. Si $n<0$, on suppose de plus que u ne s'annule pas sur I. Alors la fonction u^n est dérivable sur I et :

$$\boxed{(u^n)' = n\times u'\times u^{n-1}}$$

Exemple de rédaction

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(3x^2-5x+1\right)^4$.

- f est de la forme $f = u^4$ avec $u(x) = \left(3x^2-5x+1\right)$ et $u'(x) = 6x-5$.
- Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 4u'u^3$ donc pour tout réel x on a :

$$f'(x) = 4(6x-5)\left(3x^2-5x+1\right)^3$$

On en déduit directement que :

Propriété 6

1. Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

2. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $\mathrm{e}^{\,u}$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{\left(\mathrm{e}^{\,u}\right)' = u'\times \mathrm{e}^{\,u}}$$

Exemple de rédaction

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\,x^2+3x+1}$.

- f est de la forme $f = \mathrm{e}^{\,u}$ avec $u(x) = \left(x^2+3x+1\right)$ et $u'(x) = 2x+3$.
- Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'\,\mathrm{e}^{\,u}$ donc pour tout réel x on a :

$$\boxed{f'(x) = (2x+3)\,\mathrm{e}^{\,x^2+3x+1}}$$

III.2 Dérivée seconde

Définition 4 (Dérivée seconde f'')

Soit f une fonction dérivable sur I et telle que la dérivée f' soit aussi dérivable sur I.
La dérivée seconde de la fonction f sur I est la fonction dérivée de la dérivée de f, on la note f''.

Exemple de rédaction

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 5$.

- Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$\boxed{g'(x) = 3x^2 - 4x + 7}$$

- Alors g' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$$\boxed{g''(x) = 6x - 4}$$

Exemple de rédaction

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x+1}$.

- f est de la forme $f = \mathrm{e}^{u}$ avec $u(x) = \left(x^2 + 3x + 1\right)$ et $u'(x) = 2x + 3$.
  Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = u'\,\mathrm{e}^{u}$ donc pour tout réel x on a :

$$f'(x) = (2x + 3)\,\mathrm{e}^{x^2+3x+1}$$

- f' est de la forme $f' = u \times v$ avec :

$u(x) = 2x + 3$	$u'(x) = 2$
$v(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x+1}$	$v'(x) = (2x + 3)\,\mathrm{e}^{x^2+3x+1}$

- Alors f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(f')' = f'' = u'v + uv'$ donc pour tout réel x on a :

$$f''(x) = 2\,\mathrm{e}^{x^2+3x+1} + (2x + 3) \times (2x + 3)\,\mathrm{e}^{x^2+3x+1}$$

  Soit après factorisation :

$$\boxed{f''(x) = \left((2x + 3)^2 + 2\right) e^{x^2+3x+1}}$$

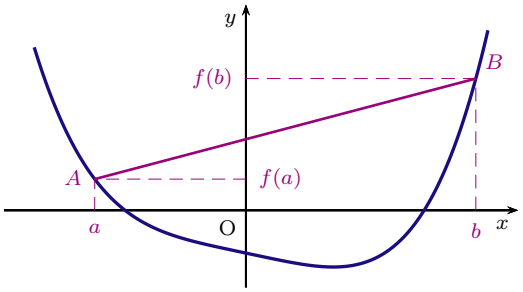
IV Convexité

IV.1 Fonction convexe, fonction concave

Définition 5

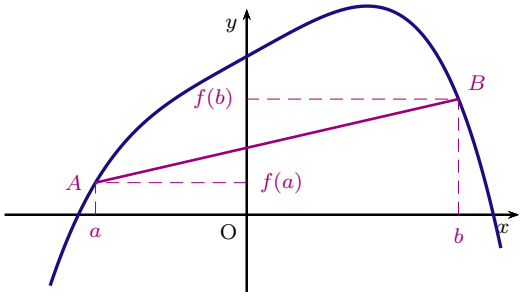
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et de courbe $\mathscr{C}_f$.

- f convexe.
  Si pour tous points distincts A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$, **le segment [AB] est situé "au-dessus" de la courbe $\mathscr{C}_f$** alors on dit que ***f* est convexe sur *I***.



Mémo : "ConVexe" $\Longrightarrow$ V *(Courbe en V).*

- f concave.
  Si pour tous points distincts A et B de la courbe $\mathscr{C}_f$, **le segment [AB] est situé "au-dessous" de la courbe $\mathscr{C}_f$** alors on dit que ***f* est concave sur *I***.



Mémo : "ConcAve" $\Longrightarrow$ A *(Courbe en A).*

Propriété 7 (Conséquence de la définition géométrique)

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I. Alors :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Si f est concave, l'inégalité est inversée.

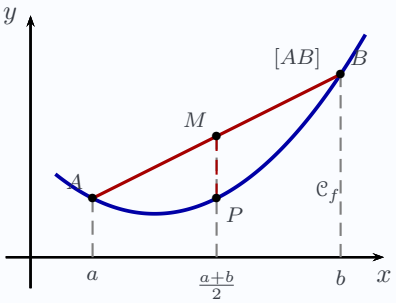
Preuve

On considère les points $A\big(a; f(a)\big)$ et $B\big(b; f(b)\big)$ de la courbe $\mathscr{C}_f$. Comme f est convexe sur I, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessous de la corde $[AB]$. Notons P le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$ et M le milieu du segment $[AB]$. Alors les coordonnées de M sont

$$M\left(\frac{a+b}{2}\ ;\ \frac{f(a)+f(b)}{2}\right).$$

Le point P est de même abscisse que M et situé au-dessous de $[AB]$, son ordonnée est inférieure ou égale à celle de M. Ainsi,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$



IV.2 ROC : Convexité des fonctions deux fois dérivables

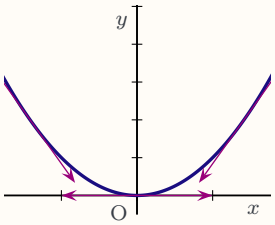
Propriété 8

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

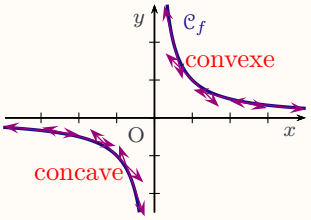
Fonction conVexe.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
1. f est conVexe sur I.
2. f' est croissante sur I.
3. f'' est positive sur I.
4. La courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de ses tangentes.

Fonction concAve.
Les propositions suivantes sont équivalentes :
1. f est concAve sur I.
2. f' est décroissante sur I.
3. f'' est négative sur I.
4. La courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessous de ses tangentes.

Exemple



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$

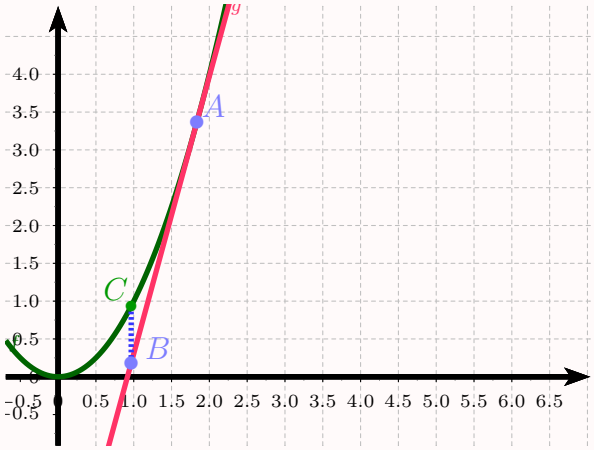
Remarque

Une fonction convexe croissante croît de plus en plus fortement et fonction convexe décroissante décroît de plus en plus faiblement.

ROC 1 : Démonstration – convexité et tangentes

On va montrer l'implication : « **Si f'' est positive sur I, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes** »

- Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I. On suppose de plus que f'' est positive sur I.
- Équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A\Big(a\ ;\ f(a)\Big)$.
  Soit a un réel de I, la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est d'équation :
  $$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
  On notera l'ordonnée : $y = t(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$.
- Écart entre un point $C\Big(x\ ;\ f(x)\Big)$ de la courbe et un point $B\Big(x\ ;\ t(x)\Big)$ de la tangente.



On va donc chercher à montrer que l'écart entre les ordonnées du point $C\Big(x\ ;\ f(x)\Big)$ de la courbe et du point $B\Big(x\ ;\ t(x)\Big)$ de la tangente est toujours positif.

On pose alors :

$$g(x) = f(x) - t(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$$

Soit :

$$g(x) = f(x) - f'(a)x + \underbrace{(af'(a) - f(a))}_{Constante}$$

La fonction g est dérivable sur I et sur cet intervalle :

$$g'(x) = f'(x) - f'(a)$$

- On utilise le fait que f'' est supposée positive.
  Comme f'' est positive sur I, la fonction f' est croissante sur I et donc elle conserve l'ordre soit :

$$x \leqslant a \Longrightarrow f'(x) \leqslant f'(a) \Longrightarrow g'(x) = f'(x) - f'(a) \leqslant 0$$

  Et de même $x \geqslant a \Longrightarrow g'(x) \geqslant 0$ De ce fait on peut dresser le tableau de variation de la fonction g, qui admet un minimum en a avec :

$$g(a) = f(a) - f'(a)a + (af'(a) - f(a)) = 0$$

x	a		
Signe de $g'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de g	↘	$g(a) = 0$	↗

- On en déduit que g est toujours positive sur I. La courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Exemple

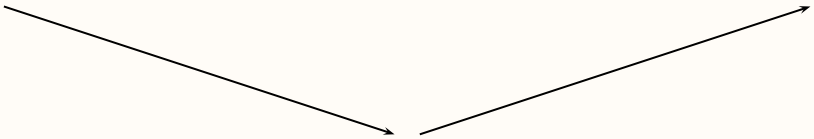
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.
La fonction f est dérivable en tant que fonction polynôme sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3$$

Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x-3)$$

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''.
Notons que pour tout réel x on a : $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $(x-3)$. D'où le tableau :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f'					
convexité de f		**concave**		**convexe**	

f est concave sur $]-\infty;3]$ et convexe sur $[3;+\infty[$.

IV.3 Point d'inflexion

IV.3.1 Définition

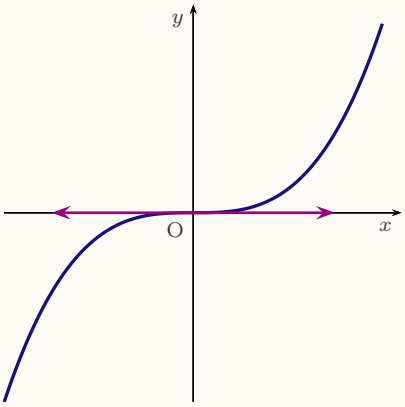
Propriété 9

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
S'il existe un point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que A est un point d'inflexion.

IV.3.2 Exemples

Exemple

La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine $O(0\ ;\ 0)$ du repère.



Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction cube.
La tangente au point O à la courbe $\mathcal{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

- Pour $x \leqslant 0$, $f(x) \leqslant 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty;0]$.
- Pour $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0;+\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en O donc O $(0;0)$ est un point d'inflexion.

IV.3.3 Applications

Définition 6

- En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.
- Si la dérivée f' change de sens de variation en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.
- Si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

IV.3.4 Exemple

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^5 - 5x^4$$

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3$$

Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = 20x^2(x-3)$$

L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.
Notons que pour tout réel x, on a : $20x^2 \geqslant 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$.

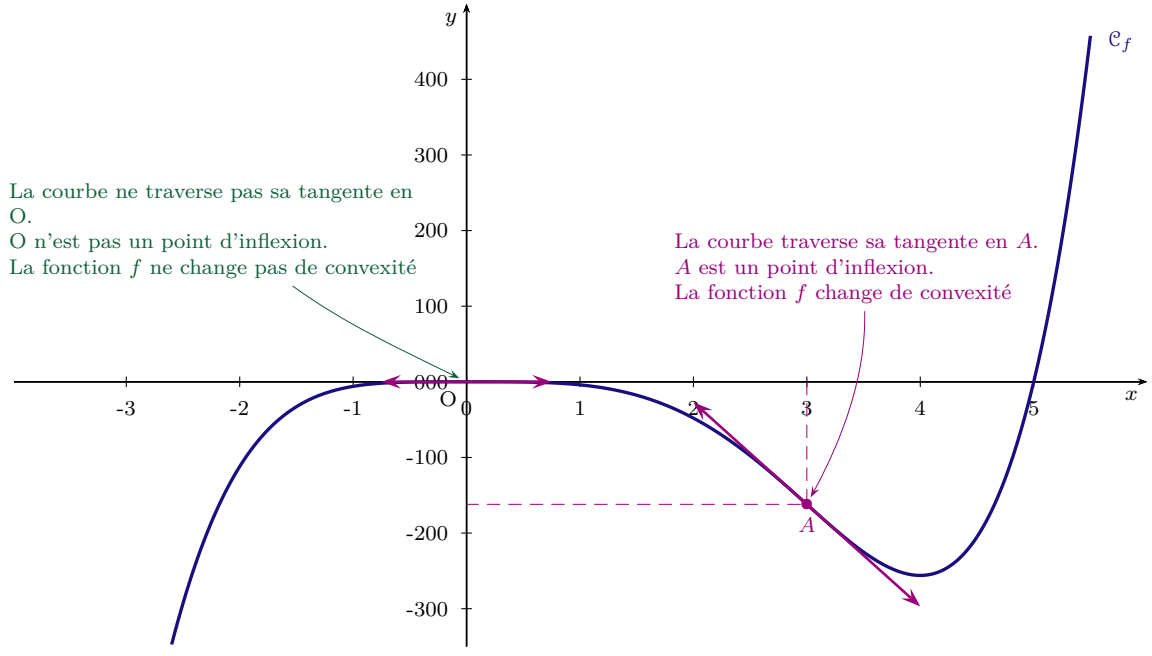
Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f''. D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
Convexité		f concave		f concave		f convexe	

En tenant compte des changements de concavité, on en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $A\,(3; f(3))$.

En effet :

- $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $]-\infty; 3]$ $f''(x) \leqslant 0$ donc le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction f est concave sur $]-\infty; 3]$).
- f'' s'annule en $x = 3$ en changeant de signe donc le point $A\,(3; f(3))$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$. La fonction f change de concavité en ce point, elle est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$.



Fin du cours