MATH93

**Terminale Spécialité**
Cours complet – méthode – démonstrations exigibles

COURS

# Fonctions : continuité et TVI

**ROC**
Les **ROC, (Restitution Organisée de Connaissances)**, sont les démonstrations du cours à connaître. Ce chapitre ne compte pas vraiment de ROC mais les algorithmes de dichotomie et de balayage sont explicitement à connaître.

## I Continuité

### I.1 Notion de continuité

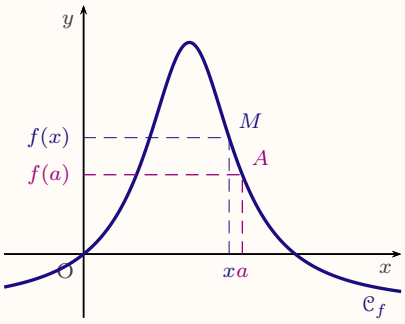
#### I.1.1 Une première définition

**Définition 1**

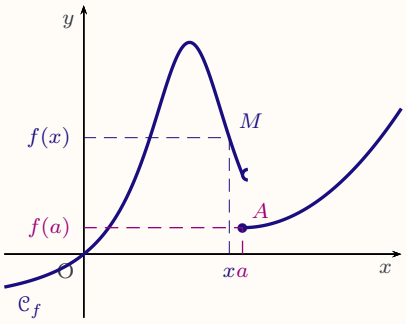
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$.
Dire que ***f* est continue sur *I*** signifie que sa courbe représentative peut être tracée en **un seul morceau** (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

**Exemple**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$ un réel de $I$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et $A$ le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $a$. Pour tout réel $x$ de l'intervalle $I$, on considère le point $M$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x$




La fonction $f$ est continue.
Pour tout réel $a$ de $I$, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que $x$ soit suffisamment proche de $a$.




La fonction $f$ n'est pas continue en $a$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse $a$.
Le point $M$ n'est pas proche du point $A$ quand $x$ est proche de $a$.

#### I.1.2 Définition : avec la notion de limite de fonction

**Définition 2** ($f$ continue en $a$)

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

- La fonction $f$ est continue en $a$ si la limite de $f$ en $a$ existe et donc : $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$.
- La fonction $f$ est continue sur $I$ lorsque pour tout réel $a$ de $I$, elle est continue en $a$.

**Remarque**

En post bac, on écrira : Une fonction $f$ définie sur $I$ est continue en $a \in I$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \quad \Big( |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \Big)$$

*Avec $\epsilon$ qui se lit "epsilon" et $\eta$ qui se lit "êta".*

## I.2 Propriétés

### I.2.1 Dérivable implique continue (admis)

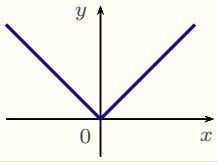
**Propriété 1**

Toute fonction **dérivable** sur un intervalle $I$ est **continue** sur cet intervalle.

### I.2.2 Réciproque fausse : un contre exemple

**Remarque**

**La réciproque du théorème est fausse** :
Une fonction peut être continue en un réel $a$ sans être dérivable en ce réel.
Par exemple la fonction valeur absolue $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.




### I.2.3 Conséquences

**Propriété 2** (Admise)

Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée), la fonction valeur absolue sont continues sur tout intervalle où elles sont définies. De ce fait :

- Les fonctions affines, la fonctions carré, la fonction cube et la fonction valeur absolue sont continues sur $\mathbb{R}$ ;
- les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$ ; la fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ; la fonction racine carrée est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$.

## I.3 Tableau de variations

**Convention**

Une flèche dans un tableau de variation traduit la stricte monotonie et la continuité (c'est une consigne spécifique du programme) d'une fonction sur un intervalle considéré.

**Exemple**

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $g$ | $-6$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $4$ |

D'après le tableau de variations ci-dessus, la fonction $g$ est continue et strictement croissante sur $[-3\ ;\ -1]$.

# II Un contre-exemple : la fonction partie entière

**Définition 3** (Partie entière (par défaut))

La **partie entière** (par défaut) d'un nombre réel $x$ est l'unique entier relatif $n$ (positif, négatif ou nul) tel que

$$n \leqslant x < n+1$$

C'est donc l'entier qui précède $x$ ou le plus grand entier, inférieur ou égal à $x$.

Remarque
La différence entre un nombre $x$ et sa partie entière (par défaut) est appelée **partie fractionnaire**.

**Notations : E(x) ou $\lfloor x \rfloor$**

La partie entière du réel $x$ se note usuellement $E(x)$, où la lettre E désigne la fonction partie entière (par défaut).

La notation $[x]$ est aussi utilisée mais a tendance à être remplacée par la notation anglo-saxonne qui utilise des symboles similaires :

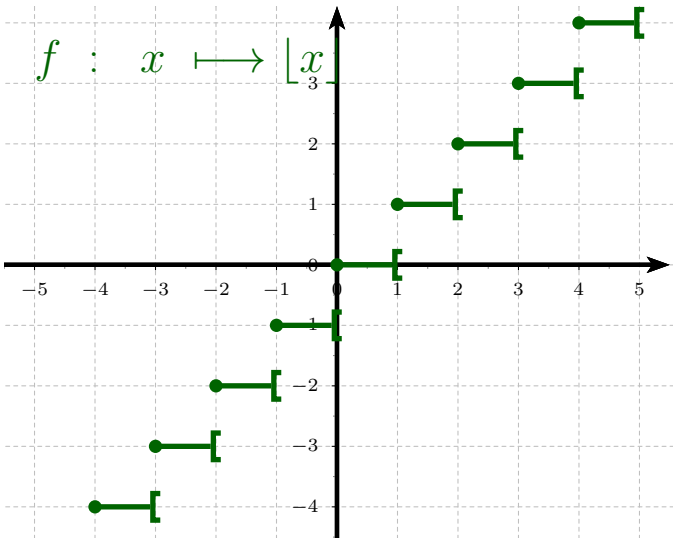
- $\lfloor x \rfloor$ : pour la partie entière (par défaut) (**floor**, « plancher ») définie par :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

**Exemples**

- $E(2,5) = \lfloor 2,5 \rfloor = 2$.
- $E(-2,5) = \lfloor -2,5 \rfloor = -3$.
- $E(0,5) = \lfloor 0,5 \rfloor = 0$.
- $E(-0,5) = \lfloor -0,5 \rfloor = -1$.

## II.1 Représentation graphique de la fonction partie entière



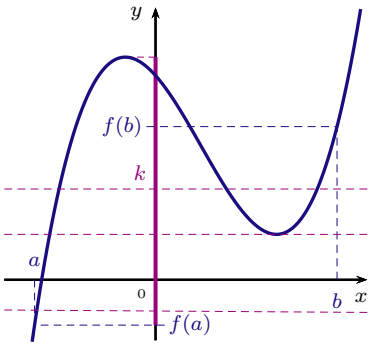
# III Continuité et propriété des valeurs intermédiaires

## III.1 Théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 1** (Théorème des valeurs intermédiaires (Admis))

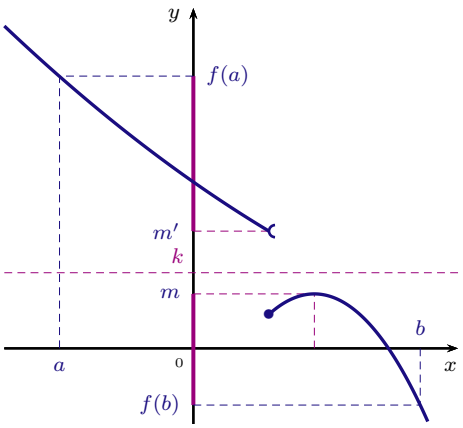
Si $f$ est une fonction définie sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et continue sur $[a\ ;\ b]$ alors pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution $c$ appartenant à $[a;b]$.

**$f$ est continue sur $I$**




L'image de l'intervalle $[a;b]$ est un intervalle.
Tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image d'au moins un élément de $[a;b]$.

**$f$ n'est pas continue sur $I$**




L'image de l'intervalle $[a;b]$ n'est pas un intervalle.
Il existe des réels $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ pour lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

### III.1.1 Remarque historique

*Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848, Prague, Empire d'Autriche).*
*Bernhard Placidus Johann Nepomuk Bolzano est le fils d'une germanophone et d'un émigré italien en Bohême, alors dans l'Empire d'Autriche. Dans son premier ouvrage Rein analytischer Beweis...(1817) il démontre le théorème des valeurs intermédiaires sans utiliser l'évidence géométrique comme on le faisait alors.*



Bernard Bolzano (1781-1848)

**Exemple**

| $x$ | $-3$ | $\alpha$ | $-1$ | $\beta$ | $0$ | $\gamma$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $g$ | $-6$ | $-1.5$ | $-1$ | $-1.5$ | $-2$ | $-1.5$ | $4$ |

- D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction $g$ est continue sur $[-3\ ;\ 1]$.
- Le réel $k = -1,5$ est compris entre $\begin{cases} g(-3) = -6 \\ g(1) = 4 \end{cases}$
- Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires , l'équation $g(x) = -1,5$ admet au moins une solution appartenant à $[-3\ ;\ 1]$.

## III.2 Les corollaires du TVI

**Théorème 2** (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

- Si $f$ est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.
- **Remarque** : On peut également appliquer le corollaire dans le cas d'un intervalle de type $[a\ ;\ +\infty[$, $[a\ ;\ b[$, $]a\ ;\ +\infty[$ ou $]-\infty\ ;\ b[$ ...
  On remplace alors le calcul de $f(a)$ ou $f(b)$ par un calcul de limite.


Bernard Bolzano (1781-1848)

**Théorème 3** (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si $f$ est continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a;b]$.


Bernard Bolzano (1781-1848)

## III.3 Exemple type de rédaction

**Point Bac : Rédaction type**

On considère la fonction $g$ définie sur $[-3\ ;\ +\infty[$ et dont le tableau de variations est donné ci-dessous.
On cherche le nombre de solutions sur l'intervalle $[-3\ ;\ +\infty[$ de l'équation $g(x) = -1,5$.

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $g$ | $-1.2$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-1.5$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $-1.5$ | ↗ | $4$ |

- Sur $[-3\ ;\ -1]$. D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction $g$ admet un minimum égal à $-1,2 > -1,5$ sur $[-3\ ;\ -1]$. Donc l'équation $g(x) = -1,5$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
- Sur $[-1\ ;\ 0]$.
  - D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction $g$ est continue et strictement décroissante sur $[-1\ ;\ 0]$.
  - Le réel $k = -1,5$ est compris entre : $\begin{cases} g(-1) = -1 > -1,5 \\ \text{et} \\ g(0) = -2 < -1,5 \end{cases}$
  - Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , l'équation $g(x) = -1,5$ admet exactement une solution $\alpha$ appartenant à $[-1\ ;\ 0]$.
- Sur $[0\ ;\ +\infty[$.
  - D'après le tableau de variation ci-dessus, la fonction $g$ est continue et strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
  - Le réel $k = -1,5$ est compris entre : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 4 > -1,5 \\ \text{et} \\ g(0) = -2 < -1,5 \end{cases}$
  - Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires , l'équation $g(x) = -1,5$ admet exactement une solution $\beta$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$.
- Conclusion : l'équation $g(x) = -1,5$ admet exactement 2 solutions sur l'intervalle $[-3\ ;\ +\infty[$.

# IV Algorithmes en Python

Pour plus de précisions, consultez la page sur les algorithmes sous Python de www.math93.com.

## IV.1 Algorithme de balayage

Cet algorithme correspond au principe du balayage utilisé sur la calculatrice. On suppose que $f$ est continue et strictement croissante sur l'intervalle considéré, avec $f(1) < 0$. On avance à partir de 1 par pas $p > 0$ jusqu'à obtenir une valeur positive ou nulle.

```
def balayage(f, p):
    assert p > 0 and f(1) < 0
    x = 1
    while f(x) < 0:
        x = x + p
    return (x - p, x)
```

**Remarque**

L'intervalle renvoyé est de longueur $p$ et contient une solution de $f(x) = 0$, à condition que la boucle termine. Si $f(x) = 0$ à la dernière étape, la solution exacte est $x$.

## IV.2 Algorithme de dichotomie

On suppose que $f$ est continue sur $[a\ ;\ b]$, que $a < b$ et que $f(a) \times f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit alors l'existence d'au moins une solution sur $[a\ ;\ b]$. Si $f$ est de plus strictement monotone sur cet intervalle, cette solution $\alpha$ est unique.

On fixe une précision $e > 0$ et on partage successivement l'intervalle en deux.

```
def dichotomie(f, a, b, e):
    assert a < b and e > 0 and f(a) * f(b) < 0
    while b - a > e:
        m = (a + b) / 2
        if f(m) == 0:
            return (m, m)
        elif f(a) * f(m) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return (a, b)
```

**Remarque**

À chaque étape, on conserve un intervalle contenant une solution de $f(x) = 0$. Si $f(m) = 0$, la solution est obtenue exactement. Sinon, l'intervalle est partagé en deux et on conserve la moitié où les valeurs de $f$ aux bornes sont de signes contraires. À la fin, la longueur de l'intervalle renvoyé est inférieure ou égale à $e$.

# V Continuité et suites récurrentes

## V.1 Passage à la limite dans une suite (admis)

**Propriété 3** (Image d'une suite convergente)

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $(u_n)$ une suite dont tous les termes appartiennent à $I$.
Si $(u_n)$ converge vers un réel $\ell \in I$ et si $f$ est continue en $\ell$, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in I \\ f \text{ continue en } \ell \end{cases} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

## V.2 Théorème du point fixe et suites récurrentes

**Théorème 4** (Théorème du point fixe)

Soient $f$ une fonction définie et continue sur un intervalle $I$ dans lui-même et $(u_n)$ la suite définie par un réel $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite $(u_n)$ converge vers $\ell \in I$, alors $\ell$ est solution de l'équation $f(x) = x$.

**Remarque**

Une telle suite ne converge pas forcément, même si $f$ possède un point fixe (c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$).

**Preuve**

Puisque la suite $(u_n)$ converge vers $\ell$, la suite décalée $(u_{n+1})$ converge également vers $\ell$. De plus, la fonction $f$ est continue en $\ell \in I$. D'après la propriété précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Par unicité de la limite, $\boxed{f(\ell) = \ell}$.

**Repère historique**

- **Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1960)** a démontré en 1910 un théorème d'existence de point fixe, dans un cadre différent.
- **Stefan Banach (1892–1945)** a publié en 1922 son théorème du point fixe contractant.

## V.3 Exemple type de rédaction : déterminer la limite d'une suite récurrente

**Point Bac : théorème du point fixe**

On considère la suite $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Justifier que la suite $(u_n)$ converge.
3. Déterminer sa limite en utilisant le théorème du point fixe.

**Méthode**

**1. Démonstration par récurrence.**
Pour tout entier naturel $n$, notons $P(n)$ la propriété : « $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

- **Initialisation.** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ et $u_1 = \sqrt{2}$. Comme $1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 2$, la propriété $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. La fonction racine carrée étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$, nous pouvons appliquer cette fonction aux trois membres de l'inégalité :

  $$\sqrt{1} \leqslant \sqrt{u_{n+1}} \leqslant \sqrt{u_n} \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.$$

  Ainsi $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion.** La propriété $P(0)$ est vraie et $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le principe de récurrence :

  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.}$$

**2. Convergence.**

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$ : la suite $(u_n)$ est décroissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant 1$ et $u_0 = 2 \geqslant 1$ : la suite $(u_n)$ est minorée par 1.
- D'après le **théorème de convergence des suites monotones**, toute suite décroissante et minorée converge. Donc $(u_n)$ converge vers un réel $\ell \geqslant 1$.

**3. Théorème du point fixe : vérification des hypothèses.**

**Données**

- On pose $I = [1; +\infty[$ et $f : x \longmapsto \sqrt{x}$. La fonction $f$ est **continue** sur $I$.
- Pour tout $x \in I$, $\sqrt{x} \geqslant 1$ : la fonction $f$ est **à valeurs dans** $I$.
- La suite vérifie $u_0 = 2 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Nous avons démontré que $(u_n)$ converge vers un réel $\ell \in I$.

Toutes les hypothèses du **théorème du point fixe** sont vérifiées. Donc $f(\ell) = \ell$, soit $\sqrt{\ell} = \ell$.
Résolvons sur $[0; +\infty[$ :

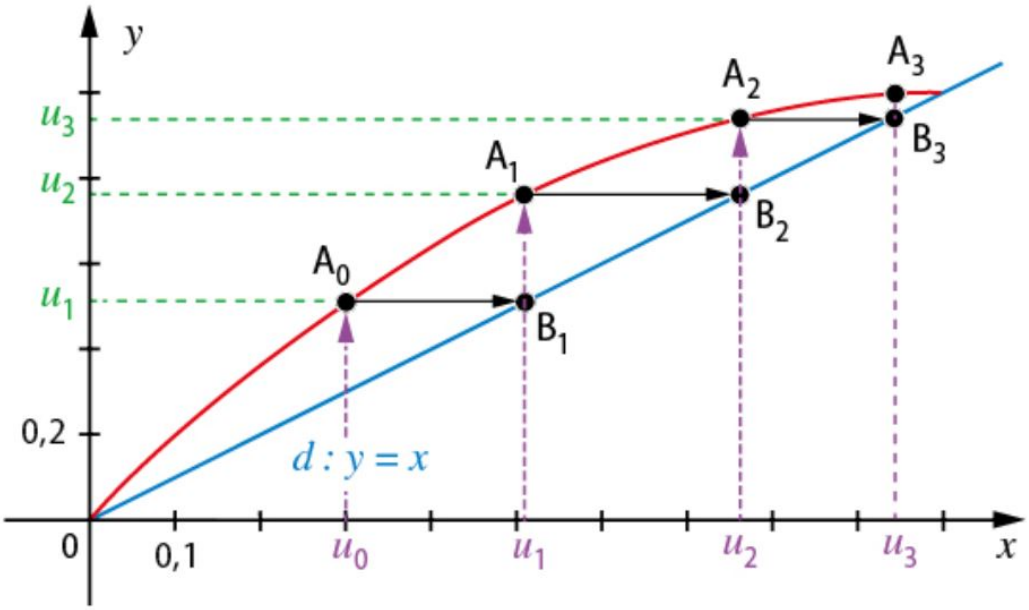
$$\begin{aligned} \sqrt{x} = x &\iff \sqrt{x} - x = 0 \\ &\iff \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 1. \end{aligned}$$

Puisque $\ell \in [1; +\infty[$, la seule solution possible est $\ell = 1$. Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.}$$

## V.4 Construction des premiers termes d'une suite $(u_n)$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

On peut revoir comment construire les premiers termes d'une suite $(u_n)$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Ici on a $u_0 = 0,3$ et $\mathscr{C}_f$ est tracée en rouge.




**Animation GeoGebra Math93 : construction en escalier**

# VI Pour aller plus loin : existence d'un point fixe par le TVI

**Remarque**

Ce résultat est différent du théorème du point fixe pour les suites récurrentes : il garantit l'existence d'un point fixe, mais ne permet pas, à lui seul, de conclure à la convergence d'une suite.

## VI.1 Application du théorème des valeurs intermédiaires

**Propriété 4** (Existence d'un point fixe sur un segment)

Soient $a < b$ et $f$ une fonction continue sur $[a;b]$, telle que $f([a;b]) \subset [a;b]$. Alors il existe au moins un réel $c \in [a;b]$ tel que $\boxed{f(c) = c}$.

**Preuve**

- **Continuité.** Posons $g(x) = f(x) - x$ sur $[a;b]$. La fonction $g$ est continue sur $[a;b]$ comme différence de fonctions continues.
- **Encadrement de zéro.** Puisque $f([a;b]) \subset [a;b]$, on a :

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - a \geqslant 0 \\ g(b) = f(b) - b \leqslant 0. \end{cases}$$

  Le réel 0 est donc compris entre $g(a)$ et $g(b)$.
- **Application du TVI.** D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un $c \in [a;b]$ tel que $g(c) = 0$, soit $\boxed{f(c) = c}$.

**Remarque**

**Attention :** ce résultat démontre l'existence d'un point fixe, mais ne démontre ni son unicité ni la convergence d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$. Il est distinct du théorème du point fixe utilisé pour identifier la limite d'une suite déjà convergente.

↞ **Fin du cours** ↠