

COURS

Chapitre 5

Probabilités et loi binomiale

Version élève

Sommaire du chapitre

I	Probabilités conditionnelles : rappels et méthodes	2
II	Arbres pondérés et probabilités totales	3
III	Indépendance et succession d'épreuves indépendantes	5
IV	Épreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli	6
V	Coefficients binomiaux	9
VI	Loi binomiale	14
VII	Espérance, variance et écart-type	17
VIII	Simulation avec Python	19
IX	Bilan du chapitre	20



ROC – démonstrations du programme

- Démontrer la relation de Pascal et la relation

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

- Démontrer l'expression de $P(X = k)$ pour $X \sim \mathcal{B}(n ; p)$.
- Démontrer les formules $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$ pour une loi binomiale.



Objectifs du chapitre

- Réactiver les probabilités conditionnelles, les arbres pondérés, la formule des probabilités totales et l'indépendance.
- Modéliser une succession d'épreuves indépendantes et un schéma de Bernoulli.
- Utiliser les coefficients binomiaux pour dénombrer les chemins comportant un nombre fixé de succès.
- Reconnaître une loi binomiale et calculer des probabilités du type $P(X = k)$, $P(X \leq k)$, $P(X \geq k)$ ou $P(a \leq X \leq b)$.
- Résoudre des problèmes de seuil, de comparaison ou d'optimisation liés au nombre de succès.
- Connaître et démontrer l'espérance et la variance d'une loi binomiale.
- Simuler un schéma de Bernoulli avec Python.

Probabilités conditionnelles : rappels et méthodes

La notion de probabilité conditionnelle intervient lorsque, au cours d'une expérience aléatoire, une information supplémentaire est connue et modifie l'univers de référence.

I.1 Probabilité conditionnelle

Définition 1 (Probabilité conditionnelle (*conditional probability*))

Soient A et B deux événements d'un même univers, avec $P(A) \neq 0$. La probabilité de B sachant que A est réalisé se note $P_A(B)$ et

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$



À retenir

Si $P(B) \neq 0$, on définit de même

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Le conditionnement change l'univers de référence : sachant A , seules les issues appartenant à A sont encore considérées.



Exercice 1 Exemple – défauts de fabrication et d’emballage

Une usine produit des articles en grande quantité. Une étude montre que 12% des articles présentent au moins un défaut, 6% présentent un défaut de fabrication et 8% un défaut d'emballage.

Un article choisi au hasard présente un défaut d'emballage. Quelle est la probabilité qu'il présente aussi un défaut de fabrication ?

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités inscrites sur ses branches.
- Un chemin complet représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.

- ils sont deux à deux incompatibles : $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$;
- leur réunion est l'univers : $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B).$$

III Indépendance et succession d'épreuves indépendantes

III.1 Indépendance de deux événements

Définition 3 (Événements indépendants)

Deux événements A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Propriété 4 (Caractérisation par conditionnement)

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff P_A(B) = P(B) \iff P_B(A) = P(A).$$



Preuve

.....

.....

.....

.....

.....

.....

III.2 Succession d'épreuves indépendantes

Propriété 5 (Produit des probabilités)

Lors d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue

$$(x_1, \dots, x_n)$$

est le produit des probabilités des composantes :

$$P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1) \times \dots \times P(x_n).$$



Indépendance : deux notions à distinguer

L'indépendance de deux **événements** est une propriété qui peut être vérifiée par une égalité de probabilités. Dans un modèle de **succession d'épreuves indépendantes**, l'indépendance fait partie des hypothèses du modèle : le résultat d'une épreuve ne modifie pas les probabilités des épreuves suivantes.

IV Épreuve de Bernoulli et schéma de Bernoulli

IV.1 Épreuve et loi de Bernoulli

Définition 4 (Épreuve de Bernoulli)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire comportant deux issues :

- un succès S , de probabilité p ;
- un échec $E = \bar{S}$, de probabilité $1 - p$.

Le réel $p \in [0 ; 1]$ est le paramètre de l'épreuve.

Définition 5 (Variable de Bernoulli)

On associe à l'épreuve la variable aléatoire Y définie par

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{en cas de succès,} \\ 0 & \text{en cas d'échec.} \end{cases}$$

Alors Y suit la **loi de Bernoulli de paramètre p** :

y	0	1	Total
$P(Y = y)$	$1 - p$	p	1



Exemples d'épreuves de Bernoulli

Lancer une pièce et appeler « succès » l'obtention de pile ; lancer un dé et appeler « succès » l'obtention d'un nombre pair ; prélever une pièce dans une production et appeler « succès » le fait qu'elle soit défectueuse : dès qu'une expérience est ramenée à **succès / échec**, elle peut être modélisée par une épreuve de Bernoulli.

IV.2 Schéma de Bernoulli

Définition 6 (Schéma de Bernoulli)

La répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, de même probabilité de succès p , s'appelle un **schéma de Bernoulli de paramètres n et p** .

L'univers peut être représenté par $\{S, E\}^n$: une issue est une liste de n résultats, chacun étant un succès ou un échec.



Les trois conditions à vérifier

Avant d'utiliser une loi binomiale, il faudra toujours vérifier :

1. le nombre d'épreuves est fixé : n ;
2. chaque épreuve possède deux issues, succès ou échec ;
3. les épreuves sont identiques et indépendantes, avec une même probabilité de succès p .

IV.3 Trois répétitions identiques et indépendantes

On répète trois fois une même épreuve de Bernoulli. On note S le succès et E l'échec, avec

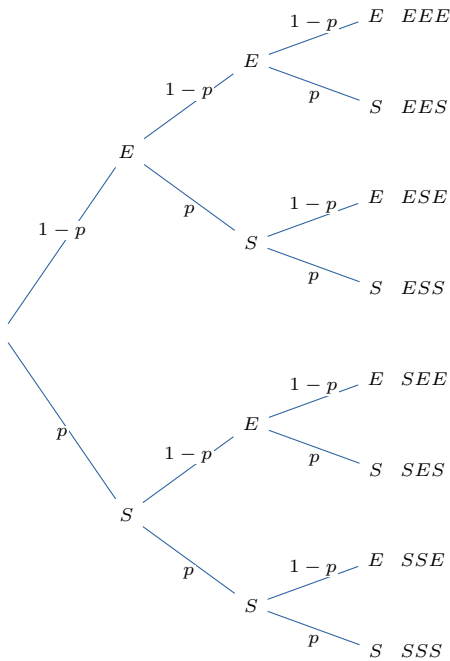
$P(S) = p$ et $P(E) = 1 - p$.

On définit la variable aléatoire

$Y =$ nombre de succès obtenus au cours des trois épreuves.

Ainsi :

$Y(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$.



Méthode

- Pour déterminer $P(Y = k)$:
- 1. on repère les chemins contenant exactement k succès ;
 - 2. grâce à l'indépendance, on multiplie les probabilités des branches sur chaque chemin ;
 - 3. on additionne les probabilités des chemins correspondants.

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$				

Pourquoi les coefficients 1, 3, 3, 1 ?

Ils viennent du nombre de chemins de l'arbre :

.....

Par exemple, exactement deux succès sont obtenus sur les trois chemins

.....

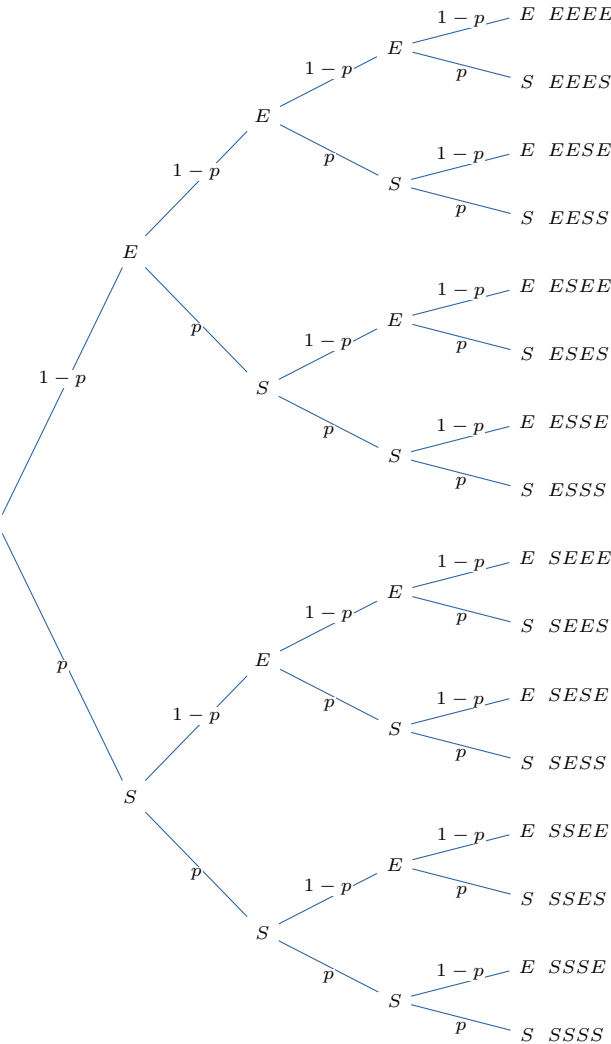
IV.4 Quatre répétitions : compter les chemins

On répète maintenant quatre fois une même épreuve de Bernoulli, de façon indépendante. On conserve les notations

$P(S) = p$ et $P(E) = 1 - p$.

On note Z le nombre de succès obtenus au cours des quatre épreuves. Alors

$Z(\Omega) = \dots\dots\dots$



À partir de l'arbre, compter le nombre de chemins correspondant à chaque valeur de Z .

Nombre de succès k	0	1	2	3	4
Nombre de chemins					

On obtient donc :
.....

Chaque chemin contenant exactement k succès possède k branches de probabilité p et $4 - k$ branches de probabilité $1 - p$.
On peut donc compléter la loi de Z :

z	0	1	2	3	4
$P(Z = z)$					

**Application avec $p = 0,7$**

On prend maintenant $p = 0,7$. Pour obtenir exactement trois succès, il y a quatre chemins :

$$SSSE ; SSES ; SESS ; ESSS.$$

Chaque chemin a pour probabilité $0,7^3 \times 0,3$. Ainsi :

$$P(Z = 3) = 4 \times 0,7^3 \times 0,3$$

$$P(Z = 3) = \dots\dots\dots$$

**Du comptage aux coefficients binomiaux**

Pour trois répétitions, nous avons obtenu

$$1 ; 3 ; 3 ; 1.$$

Pour quatre répétitions,

$$1 ; 4 ; 6 ; 4 ; 1.$$

Ces nombres comptent les chemins qui comportent un nombre donné de succès. Lorsque le nombre n d'épreuves augmente, dessiner l'arbre complet devient rapidement impossible.

On introduit donc une notation permettant de compter directement le nombre de chemins comportant exactement k succès : le **coefficient binomial**

$$\binom{n}{k}.$$

v Coefficients binomiaux**Définition 7 (Coefficient binomial)**

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, le coefficient binomial

$$\binom{n}{k}$$

est le nombre de chemins d'un schéma de Bernoulli à n épreuves comportant exactement k succès.

**Retour sur trois répétitions**

Pour trois épreuves,

$$\binom{3}{2} = 3,$$

car les trois chemins comportant exactement deux succès sont

$$SSE ; SES ; ESS.$$

V.1 Factorielle et calcul d'un coefficient binomial

Définition 8 (Factorielle)

Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle **factorielle de n** , et on note $n!$, le produit des entiers de 1 à n :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

Par convention :

$$0! = 1.$$

Propriété 6 (Expression avec les factorielles)

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

En particulier :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$



Calcul d'un coefficient binomial

Calculons $\binom{7}{2}$:

$$\begin{aligned} \binom{7}{2} &= \frac{7!}{2!5!} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 1 \times 5!} \\ &= \frac{7 \times 6}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\binom{7}{2} = 21}$$

V.2 Relation de Pascal

Propriété 7 (Relation de Pascal)

Pour tous entiers $n \geq 1$ et $k \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Cette relation permet de construire de proche en proche le **triangle de Pascal**.

V.3 Symétrie des coefficients binomiaux

Propriété 8 (Symétrie)

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$



Interprétation

Choisir les k positions correspondant aux succès revient exactement à choisir les $n - k$ positions correspondant aux échecs.

Par exemple :

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56.$$

V.4 Somme d'une ligne du triangle de Pascal

Propriété 9 (Somme des coefficients binomiaux)

Pour tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$



ROC 2 : Exigible – Somme des coefficients binomiaux

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**À retenir**

Les coefficients binomiaux permettent donc de répondre à la question :

« Parmi n épreuves, combien de chemins comportent exactement k succès ? »

La réponse est :

$$\boxed{\binom{n}{k}}.$$

C'est précisément ce comptage qui va permettre d'établir la formule de la loi binomiale.

VI Loi binomiale

VI.1 Définition

Définition 9 (Loi binomiale (*binomial distribution*))

On considère un schéma de Bernoulli de paramètres n et p et on note X le **nombre de succès** obtenus au cours des n épreuves.

Alors X suit la **loi binomiale de paramètres n et p** , notée

$$X \sim \mathcal{B}(n ; p).$$

Les valeurs possibles de X sont

$$X(\Omega) = \{0 ; 1 ; \dots ; n\}.$$

Propriété 10 (Probabilité d'obtenir exactement k succès)

Si $X \sim \mathcal{B}(n ; p)$, alors, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$



ROC 3 : Exigible – Expression de $P(X = k)$

VI.2 Exemple : la loi $\mathcal{B}(4 ; p)$



Retrouver les coefficients 1, 4, 6, 4, 1

Si $X \sim \mathcal{B}(4 ; p)$ et si $q = 1 - p$, alors

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	q^4	$4pq^3$	$6p^2q^2$	$4p^3q$	p^4

Les coefficients 1, 4, 6, 4, 1 comptent les chemins possédant respectivement 0, 1, 2, 3, 4 succès.



VI.4 Calculatrice et problèmes de seuil

 Calculatrice – loi binomiale

Pour une loi binomiale, il faut toujours commencer par écrire le modèle

$$X \sim \mathcal{B}(n ; p)$$

puis traduire l'événement demandé avant d'utiliser la calculatrice.

Calcul	NumWorks	TI-83 Premium CE	Xcas
Accéder à la loi binomiale	Accueil → Probabilités $\xrightarrow{OK}$ Bino- miale $\xrightarrow{OK}$ saisir n et p , puis Valider. Ensuite, sélectionner l'icône Type de bornes et valider avec OK.	Touches 2nde puis VARS pour ou- vrir le menu DISTR. Choisir ensuite A:binomFdp(ou B:binomFRép(.	Menu Cmds → Proba_stats, ou sai- sir directement les commandes dans une ligne de calcul.
$P(X = k)$	Choisir le type $X = a$, puis saisir $a =$ k . Dans Calculs : binompdf(k,n,p).	binomFdp(n,p,k)	binomial(n,k,p)
$P(X \leq k)$	Choisir le type $X \leq a$, puis saisir $a =$ k . Dans Calculs : binomcdf(k,n,p).	binomFRép(n,p,k)	binomial_cdf(n,p,k)
$P(X \geq k)$	Choisir le type $a \leq X$, puis saisir $a =$ k .	1-binomFRép($n,p,k-1$)	1-binomial_cdf($n,p,k-1$)
$P(a \leq X \leq b)$	Choisir le type $a \leq X \leq b$, puis saisir les deux bornes.	binomFRép(n,p,b) binomFRép($n,p,a-1$)	– binomial_cdf(n,p,a,b)
$\binom{n}{k}$ et $n!$	Touche toolbox → Probabili- tés → Dénombrement. Choisir binomial(n,k) ou $n!$.	Touche MATH → onglet PROB. Choi- sir 3:nCr pour les combinaisons ou 4:! pour la factorielle. Saisir par exemple n nCr k .	Saisir binomial(n,k) pour $\binom{n}{k}$ et $n!$ pour la factorielle.

Attention : l'ordre des arguments n'est pas le même selon les machines. En particulier, Xcas utilise binomial(n,k,p) pour $P(X = k)$ mais binomial_cdf(n,p,k) pour $P(X \leq k)$.

 Méthode

Dans un problème de seuil, on cherche généralement le **plus petit** ou le **plus grand entier** vérifiant une condition probabiliste.

La démarche est :

1. définir la variable aléatoire et identifier sa loi ;
2. traduire la condition sous la forme d'une inégalité portant sur une probabilité ;
3. tester les valeurs entières avec la calculatrice ou un algorithme ;
4. vérifier que l'entier retenu est bien le premier ou le dernier qui convient.

VII Espérance, variance et écart-type

VII.1 Cas d'une variable de Bernoulli

Propriété 11 (Indicateurs d'une loi de Bernoulli)

Si Y suit la loi de Bernoulli de paramètre p , alors

$$E(Y) = p, \quad V(Y) = p(1 - p), \quad \sigma(Y) = \sqrt{p(1 - p)}.$$



Preuve

VII.2 Sommes de variables aléatoires indépendantes

Définition 10 (Variables aléatoires indépendantes)

Deux variables aléatoires finies U et V sont dites **indépendantes** lorsque, pour toutes valeurs u et v qu'elles peuvent prendre, les événements $\{U = u\}$ et $\{V = v\}$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$P(U = u \text{ et } V = v) = P(U = u) P(V = v).$$

Dans ce chapitre, cette indépendance apparaît naturellement lorsque les variables sont construites à partir d'épreuves indépendantes.

Propriété 12 (Linéarité de l'espérance)

Pour deux variables aléatoires U et V et deux réels a et b ,

$$E(aU + bV) = aE(U) + bE(V).$$

En particulier,

$$E(U + V) = E(U) + E(V).$$

Propriété 13 (Variance d'une somme de variables indépendantes)

Si U et V sont indépendantes, alors

$$V(U + V) = V(U) + V(V).$$

De plus, pour tout réel a ,

$$V(aU) = a^2 V(U).$$

L'additivité de la variance pour des variables indépendantes est admise.


Le nombre de succès comme une somme

Dans un schéma de Bernoulli de paramètres n et p , on peut définir, pour chaque épreuve, la variable

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ième épreuve est un succès,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors les variables $Y_1, \dots, Y_n$ sont indépendantes, suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p , et le nombre total de succès est

$$X = Y_1 + \dots + Y_n.$$

VII.3 Indicateurs d'une loi binomiale

Propriété 14 (Espérance, variance et écart-type)

Si $X \sim \mathcal{B}(n ; p)$, alors

$$E(X) = np,$$

$$V(X) = np(1 - p),$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}.$$


ROC 4 : Exigible – Espérance et variance de la loi binomiale

Interprétation

L'espérance np représente le nombre moyen théorique de succès sur un grand nombre de répétitions du même schéma. La variance et l'écart-type mesurent la dispersion du nombre de succès autour de cette valeur moyenne. L'écart-type s'exprime dans la même unité que X .

VIII Simulation avec Python



Simuler une variable binomiale

Pour simuler $X \sim \mathcal{B}(n ; p)$, on répète n fois une épreuve de Bernoulli et on compte le nombre de succès.

```
from random import random
def binomiale(n, p):
    x = 0
    for i in range(n):
        if random() < p:
            x = x + 1
    return x
```

La variable x compte le nombre de succès obtenus au cours des n essais.



Prolongement du programme

La partie « Probabilités » de Terminale se poursuit avec les **sommes et moyennes d'échantillons**, puis l'**inégalité de Bienaymé–Tchebychev**, l'**inégalité de concentration** et la **loi des grands nombres**. Ces notions peuvent faire l'objet d'un chapitre distinct.

IX Bilan du chapitre

Propriété 15 (À connaître)

- Probabilité conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

- Probabilités composées :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B).$$

- Probabilités totales pour une partition (A_i) :

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P_{A_i}(B).$$

- Indépendance :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- Schéma de Bernoulli : n épreuves identiques et indépendantes, de probabilité de succès p .
- Si X compte le nombre de succès :

$$X \sim \mathcal{B}(n ; p), \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

-

$$E(X) = np, \quad V(X) = np(1-p), \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

- Pour « au moins un succès » :

$$P(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n.$$

↩️ **Fin du cours** ➡️