

COURS

Chapitre 4 – Partie 1

Géométrie dans l'espace

Version élève

Sommaire du chapitre

I	Droites et plans de l'espace : positions relatives	2
II	Parallélisme	3
III	Vecteurs de l'espace	5
IV	Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace	7
V	Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace	7
VI	Repères de l'espace	8
VII	Représentation paramétrique d'une droite de l'espace	10
VIII	[HP] Hors programme Représentation paramétrique d'un plan	11



Objectifs de cette première partie

Dans cette première partie, on reprend la géométrie de l'espace avec les outils vectoriels. On doit savoir :

- décrire les positions relatives de droites et de plans ;
- raisonner sur des sections planes de solides simples ;
- utiliser le calcul vectoriel dans l'espace ;
- travailler dans une base et dans un repère de l'espace ;
- obtenir et exploiter un système d'équations paramétriques d'une droite.



Remarques

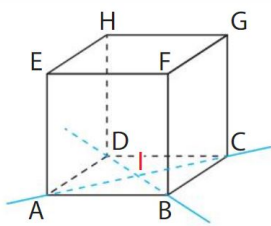
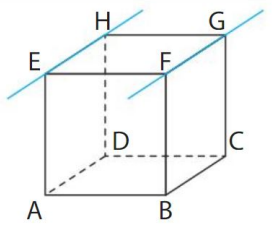
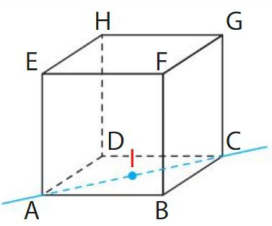
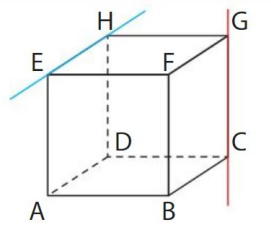
- Par **2 points distincts** de l'espace, passe une **unique droite**.
- Par **3 points non alignés** de l'espace, passe un **unique plan**.
- Si un plan contient 2 points distincts A et B, il contient la droite (AB).
- Par convention, une droite se note avec 2 points et un plan par trois points. Par exemple on parlera de la droite (AB) et du plan (ABC) ou plus simplement de (AB) et (ABC).

I Droites et plans de l'espace : positions relatives

I.1 Positions relatives de deux droites

Propriété 1

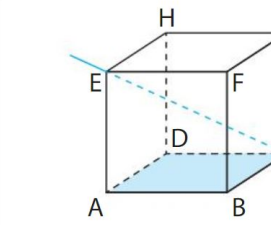
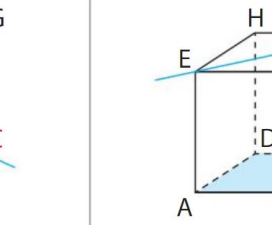
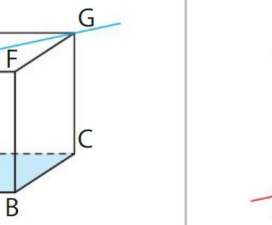
1. Deux droites sont soit **coplanaires**, soit **non coplanaires**.
2. Si elles sont coplanaires, elles sont soit sécantes soit parallèles.

Droites coplanaires (dans un même plan)			Droites non coplanaires
Droites sécantes	Droites parallèles		
 Les droites (AC) et (DB) sont sécantes en I.	 Les droites (EH) et (FG) sont strictement parallèles.	 Les droites (AI) et (AC) sont confondues.	 Les droites (EH) et (GC) sont non coplanaires.

I.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété 2

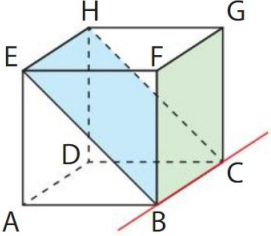
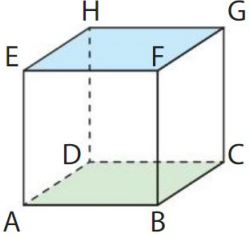
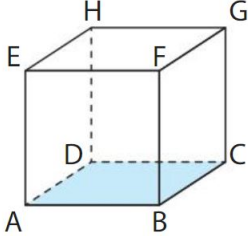
Une droite et un plan de l'espace sont soit **sécants**, soit **parallèles**.

Droite et plan sécants	Droite et plan parallèles	
 La droite (EC) et le plan (ABC) sont sécants en C.	 La droite (EG) et le plan (ABC) sont strictement parallèles.	 La droite (AC) est contenue dans le plan (ABC).

I.3 Positions relatives de deux plans

Propriété 3

Deux plans de l'espace sont soit **sécants** suivant une droite, soit **parallèles**.

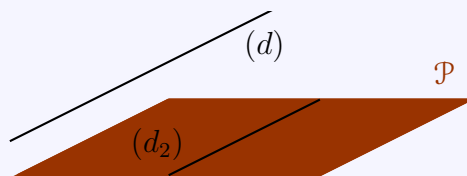
Plans sécants	Plans parallèles	
 Les plans (EBC) et (FBC) sont sécants suivant la droite (BC).	 Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles.	 Les plans (ABC) et (ABD) sont confondus.

II Parallélisme

II.1 Droite parallèle à un plan

Propriété 4 (Parallélisme d'une droite et d'un plan)

Si une droite (d) est parallèle à une droite (d_2) d'un plan $(\mathcal{P})$, alors la droite (d) est parallèle au plan $(\mathcal{P})$.



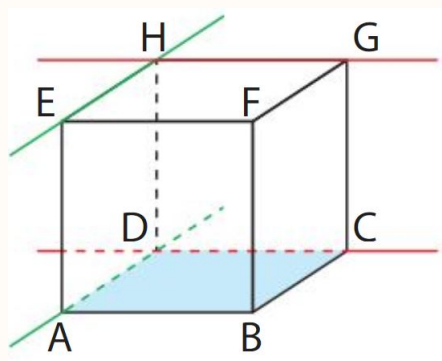
Exemple

- Dans le cube ci-contre, la droite (HG) est parallèle à la droite (DC) donc elle est parallèle au plan (ADC).

$$\begin{cases} (HG) \parallel (DC) \\ (DC) \in (ADC) \end{cases} \Rightarrow (HG) \parallel (ADC)$$

- Dans le cube ci-contre, la droite (EH) est parallèle à la droite (AD) donc elle est parallèle au plan (ADC).

$$\begin{cases} (EH) \parallel (AD) \\ (AD) \in (ADC) \end{cases} \Rightarrow (EH) \parallel (ADC)$$



II.2 Parallélisme de deux droites

Plusieurs méthodes pour montrer que deux droites de l'espace sont parallèles.

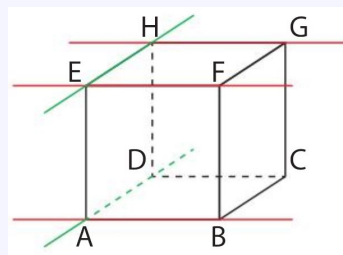
II.2.1 Deux droites parallèles à une 3^e

Propriété 5 (2 droites $//$ à une 3^e)

Si deux droites sont parallèles à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Par exemple ici :

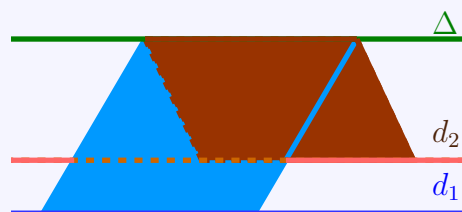
- Les droites (AB) et (HG) sont parallèles à la droite (EF) donc elles sont parallèles entre elles.



II.2.2 Théorème du toit : 1^{ère} formulation

Théorème 1 (Théorème du toit (1))

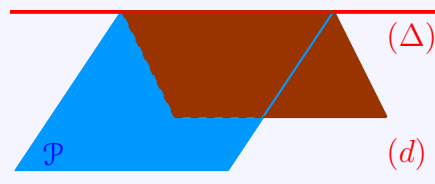
Soit (d_1) et (d_2) deux droites parallèles. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contenant respectivement (d_1) et (d_2) se coupent en (Δ) qui est parallèle aux droites (d_1) et (d_2) .



II.2.3 Théorème du toit : 2^e formulation

Théorème 2 (Théorème du toit (2))

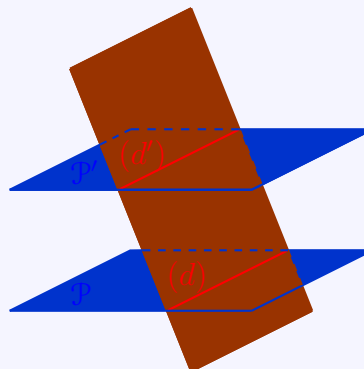
Si une droite (d) est parallèle à deux plans sécants, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ alors (d) est parallèle à (Δ) , la droite d'intersection des deux plans.



II.2.4 Deux plans $//$ coupés par un 3^{ème}

Théorème 3 (Parallélisme de deux droites)

Si deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles, tout plan $\mathcal{Q}$ qui coupe le plan $\mathcal{P}$, coupe aussi le plan $\mathcal{P}'$ et les droites d'intersection (d) et (d') sont parallèles.



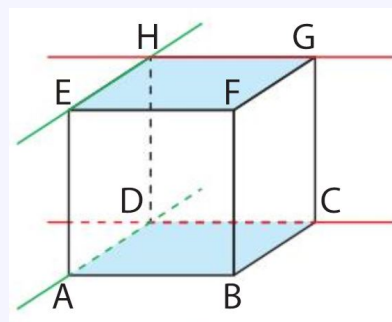
II.3 Parallélisme de deux plans

Propriété 6

Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.

Par exemple ici :

- Les droites (HG) et (DC) sont parallèles ;
- Les droites (AD) et (EH) sont parallèles ;
- Les deux droites (AD) et (DC), sécantes dans le plan (ADC), sont respectivement parallèles aux deux droites (EH) et (HG), sécantes dans le plan (EHG) ;
- Conclusion : les plans (ADC) et (EHG) sont parallèles.



III Vecteurs de l'espace

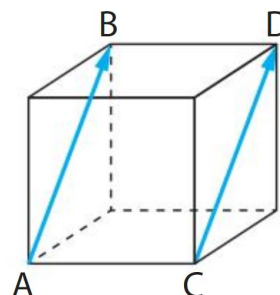
III.1 Notion de vecteur de l'espace

Définition 1 (Vecteurs égaux)

Deux vecteurs de l'espace non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

On peut noter $\vec{u}$ ce vecteur qui admet une infinité de représentants (ayant même norme, même direction et même sens) :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \dots$$



III.2 Vecteurs coplanaires

Définition 2 (Vecteurs coplanaires)

1. Des vecteurs (2 ou plus) sont **coplanaires** si en traçant leurs représentants à partir d'un même point A (quelconque), leurs extrémités sont coplanaires avec A.
2. Deux vecteurs (2 seulement) sont **toujours coplanaires**.

**Exemple**

On considère le cube ci-contre.

1. Les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BF}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AF}$ sont coplanaires car on a aussi :

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AE} \\ \vec{w} = \overrightarrow{AF} \end{cases}$$

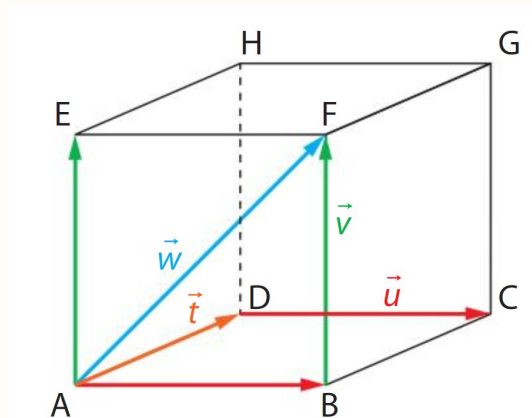
et les points A, B, E et F sont dans le plan (ABE).

2. Les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BF}$ et $\vec{t} = \overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires car on a aussi :

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AB} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AE} \\ \vec{t} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$$

et l'unique plan contenant les points A, B, E est (ABE) qui ne contient pas le point D.

3. **Attention**, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont coplanaires, puisque 2 vecteurs le sont toujours, mais les droites (AB) et (CG) ne sont pas coplanaires !



III.3 Opérations sur les vecteurs

Deux vecteurs étant toujours coplanaires, on définit dans l'espace, la somme de deux vecteurs, le produit d'un vecteur par un réel, la colinéarité comme dans le plan.

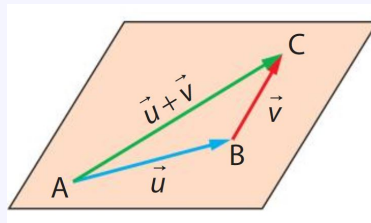
Propriété 7

Pour k et k' réels on a :

- $k(k'\vec{u}) = kk'\vec{u}$
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

Relation de **Chasles**

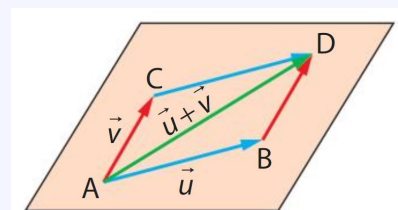
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Règle du **Parallélogramme**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

ABDC parallélogramme



IV Caractérisation vectorielle d'une droite de l'espace

Propriété 8 (Droite définie par un point et un vecteur directeur ou 2 points)

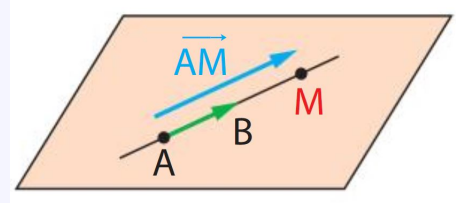
Soit A et B deux points distincts de l'espace.

1. Un point M appartient à la droite (AB) si et seulement si il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$.
2. La droite (AB) est donc définie comme l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ soit :

$$(AB) = \left\{ M ; \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB} , t \in \mathbb{R} \right\}$$

3. La droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est donc définie comme l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u}$ soit :

$$(d) = \left\{ M ; \overrightarrow{AM} = t \vec{u} , t \in \mathbb{R} \right\}$$



V Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace

V.1 Caractérisation d'un plan

Propriété 9 (Plan défini par 3 points ou 1 point et 2 vecteurs non colinéaires)

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace.

1. Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement si il existe des réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$$

2. Le plan (ABC) est donc défini comme l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC}$$

soit :

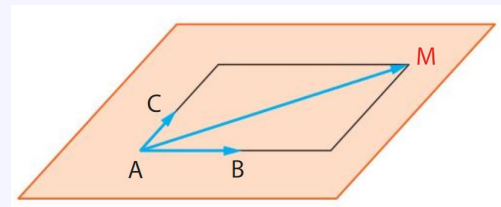
$$(ABC) = \left\{ M ; \overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB} + y \overrightarrow{AC} , (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. Le plan (P) passant par le point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donc défini comme l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\overrightarrow{AM} = x \vec{u} + y \vec{v}$$

soit :

$$(P) = \left\{ M ; \overrightarrow{AM} = x \vec{u} + y \vec{v} , (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$



V.2 Propriétés

On en déduit la propriété suivante :

Propriété 10

Deux plans dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Propriété 11

Soit deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existent des réels x et y tels que :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$$

VI Repères de l'espace

- Dans le **plan**, on peut décomposer tout vecteur en **2 vecteurs non colinéaires**.
- Dans l'**espace**, on peut décomposer tout vecteur en **3 vecteurs non coplanaires**.

VI.1 Décomposer un vecteur de l'espace

Propriété 12

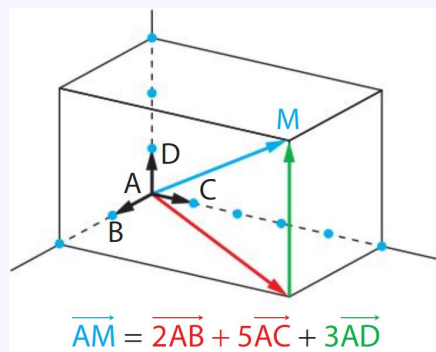
Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace.

Pour tout point M de l'espace :

1. Il existe des réels x, y, z tels que :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD}$$

2. ce triplet $(x ; y ; z)$ est unique.

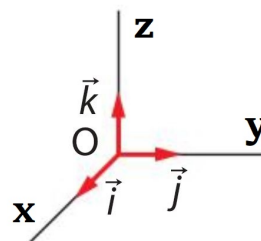


VI.2 Repérage de l'espace

Définition 3

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est formé :

1. d'un point O origine du repère ;
2. d'un triplet $(\vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires.



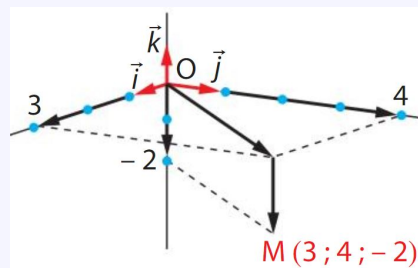
Propriété 13 (Coordonnées d'un point de l'espace)

Soit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x ; y ; z)$ de réels tels que :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

On note alors : $M(x ; y ; z)$.

**Propriété 14** (Coordonnées d'un vecteur de l'espace)

Soit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x ; y ; z)$ de réels tels que :

$$\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

On note alors :

$$\vec{u}(x ; y ; z) \quad \text{ou} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Propriété 15

Soit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Soit k et k' des réels et les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

1. Le vecteur somme $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ est de coordonnées $\vec{w} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$.
2. Le vecteur $\vec{b} = k \vec{u}$ est de coordonnées $\vec{b} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.
3. Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.
4. Si $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ alors : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
5. Le milieu I du segment [AB] est de coordonnées, la moyenne de celles de A et de B soit

$$I \left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

VII Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

On a vu lors de la propriété 8 page 7 que la droite (d) passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ est donc définie comme l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\vec{u}$ soit :

$$(d) = \left\{ M \ ; \ \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{u} \ , \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, si $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ on obtient en passant aux coordonnées :

$$\overrightarrow{AM} = t \vec{u} \iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases}$$

Propriété 16 (Représentation paramétrique d'une droite de l'espace)

Soit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

La droite (d) passant par le point $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est l'ensemble des points

$M(x; y; z)$ tels que :

$$\begin{cases} x = x_A + a t \\ y = y_A + b t \\ z = z_A + c t \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Ce système d'équations est appelé **une représentation paramétrique de la droite (d)**.



Remarque

- Il n'y a pas unicité : on peut choisir un autre point de la droite ou remplacer le vecteur directeur par n'importe quel vecteur non nul qui lui est colinéaire.
- On obtient plusieurs représentations paramétriques de la droite (d).
Elle dépend du point A et du vecteur directeur.



Exemple 1 – Déterminer une représentation paramétrique

La droite (d_1) passe par le point $A(1 ; 0 ; -3)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d_1) .



Exemple 2 – Lire une représentation paramétrique

On considère la droite (d_2) définie par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 5t \\ z = 10 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Donner les coordonnées d'un point de (d_2) et celles d'un vecteur directeur de (d_2) .

VIII [HP] Hors programme Représentation paramétrique d'un plan

On a vu lors de la propriété 9 page 7 que le plan ($\mathcal{P}$) passant par le point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini comme l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{u} + y \overrightarrow{v}$$

soit :

$$(\mathcal{P}) = \left\{ M \ ; \ \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{u} + t' \overrightarrow{v} \ , \ (t, t') \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

En nous plaçant dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, si $A(x_A; y_A; z_A)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ on obtient en passant aux coordonnées :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{u} + t'\overrightarrow{v} \iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at + a't' \\ bt + b't' \\ ct + c't' \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - x_A = at + a't' \\ y - y_A = bt + b't' \\ z - z_A = ct + c't' \end{cases}$$

Propriété 17 (Représentation paramétrique d'un plan de l'espace)

Soit un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

Le plan ($\mathcal{P}$) passant par $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et dirigé par 2 vecteurs non colinéaires $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ est défini comme l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + at + a't' \\ y = y_A + bt + b't' \\ z = z_A + ct + c't' \end{cases}}, \quad (t, t') \in \mathbb{R}^2$$

Ce système d'équations est appelé **une représentation paramétrique** du plan ($\mathcal{P}$).

Remarque : il n'y a pas unicité. On peut choisir un autre point du plan ou un autre couple de vecteurs directeurs non colinéaires engendrant la même direction de plan.

Exemple – Déterminer une représentation paramétrique d'un plan

Le plan $(\mathcal{P})$ passe par le point $A(1 ; 2 ; 3)$ et est dirigé par les deux vecteurs non colinéaires $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Déterminer une représentation paramétrique du plan $(\mathcal{P})$.

↪ Fin du cours ↩