

COURS

Chapitre 3

Suites numériques et limites

Version élève

Sommaire du chapitre

I	Rappels : Généralités	2
II	Rappels : Suites géométriques et arithmétiques	3
III	Suites convergentes	4
IV	Suites divergentes	8
V	Opérations sur les limites	11
VI	Théorèmes de comparaison	13
VII	Limite d'une suite géométrique : ROC	15
VIII	Limites des suites monotones	17
IX	Complément : Algorithmes Python sur les suites	19
X	Utiliser la calculatrice pour calculer les termes d'une suite définie par récurrence	22
XI	Now We Can Talk : compléments post-bac	25



ROC du chapitre

- Comparaison vers $+\infty$. Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.
- Suite géométrique. Limite de la suite géométrique de terme général q^n , à partir de l'inégalité de Bernoulli.
- Suite croissante non majorée. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

I Rappels : Généralités

I.1 Suites monotones : sens de variations

Définition 1 (Suites croissantes, décroissantes)

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) si pour tout entier n de $\mathbb{N}$ on a : $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$).

Une suite monotone est une suite croissante ou décroissante.

Remarque : il peut arriver que la suite soit croissante (ou décroissante) seulement à partir d'un certain rang n_0 .



Méthode

Pour étudier les variations d'une suite on utilise généralement une des méthodes suivantes :

1. Si la suite (u_n) est définie explicitement sous la forme d'une fonction de n soit $u_n = f(n)$, alors on peut étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.
2. On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
Si cette différence est positive (resp. négative) pour tout n , alors la suite est croissante (resp. décroissante).
3. Si on a montré que pour tout n , $u_n > 0$, on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Si pour tout entier n , on a : $\begin{cases} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \\ \text{et } u_n > 0 \end{cases}$, alors (u_n) est croissante.



Remarque

Une suite peut être ni croissante, ni décroissante comme par exemple la suite définie pour tout entier n par $u_n = (-1)^n$.

I.2 Suites majorées, minorées, bornées

Définition 2

- Une suite (u_n) est majorée si il existe un réel M tel que pour tout n on a : $u_n \leq M$.
- Une suite (u_n) est minorée si il existe un réel m tel que pour tout n on a : $m \leq u_n$.
- Une suite (u_n) est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Remarque : une suite majorée admet une infinité de majorants, par ex. si elle est majorée par 10, elle l'est aussi par 11 ...

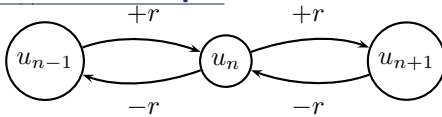


Exemples

- Les suites de terme général $\sin n$, $\cos n$ et $(-1)^n$ sont majorées par 1 et minorées par (-1) (donc bornées).
- La suite de terme général $u_n = n$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée.
- Toute suite croissante (resp. décroissante) est minorée (resp. majorée) par son premier terme.

II Rappels : Suites géométriques et arithmétiques

II.1 Suite Arithmétique



Définition 1 (Suite arithmétique)

Une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est dite arithmétique lorsque chaque terme se déduit du précédent en y ajoutant une constante r , appelée raison.

$$(u_n)_{n \geq p} : \begin{cases} u_p \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Propriété 1 (Terme général suite arithmétique)

Pour tout n entier, $n \geq p$:

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Pour $p = 0$ on a pour tout n entier, $n \geq 0$:

$$u_n = u_0 + nr$$

Pour $p = 1$ on a pour tout n entier, $n \geq 1$:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r$$

Propriété 2 (Variations d'une suite arithmétique)

- Si la raison r est positive strictement ($r > 0$), alors la suite arithmétique est croissante.
- Si la raison r est négative strictement ($r < 0$), alors la suite arithmétique est décroissante.

Propriété 3 (Somme termes consécutifs suite arithmétique)

Pour tout entier n ,

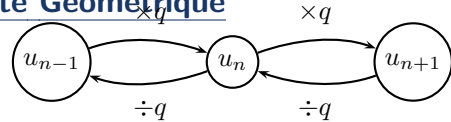
$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

HP Propriété – Somme termes consécutifs suite arithmétique

Si (u_n) est une suite arithmétique, alors :

$$\sum_{k=p}^n u_k = \text{nb termes} \times \frac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}$$

II.2 Suite Géométrique



Définition 2 (Définition suite géométrique)

Une suite $(u_n)_{n \geq p}$ est dite géométrique lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par une constante q , appelée raison.

$$(u_n)_{n \geq p} : \begin{cases} u_p \\ u_{n+1} = q \times u_n \end{cases}$$

Propriété 4 (Terme général suite géométrique)

Pour tout n entier, $n \geq p$:

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Si $p = 0$, pour $n \geq 0$:

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Si $p = 1$, pour $n \geq 1$:

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

Propriété 5 (Variations suite géométrique)

Une suite géo. de raison q est monotone si $q \geq 0$.

- Si $q = 0$ ou $q = 1$, la suite est constante.
- Si le 1^{er} terme est strictement positif :

$$\begin{cases} \text{Si } q > 1, \text{ la suite est croissante;} \\ \text{Si } 0 < q < 1, \text{ elle est décroissante.} \end{cases}$$

- Si le 1^{er} terme est strictement négatif :

$$\begin{cases} \text{Si } q > 1, \text{ la suite est décroissante;} \\ \text{Si } 0 < q < 1, \text{ elle est croissante.} \end{cases}$$

Propriété 6 (Somme termes consécutifs suite géo.)

Soit (u_n) géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme 1, alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{1 + q + q^2 + \dots + q^n}_{(n+1) \text{ termes}} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

HP Propriété – Somme termes d'une suite géo.

Cette formule peut se généraliser de la façon suivante :

$$\sum_{k=p}^n u_k = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q}$$

III Suites convergentes

III.1 Définition

Définition 3 (Suite convergente)

On dit que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ lorsque tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On écrit alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Autrement dit, les termes u_n finissent par être aussi proches de ℓ que l'on veut.

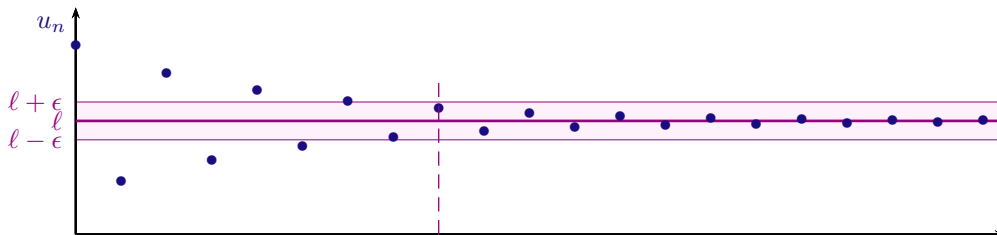
Ou encore :

Définition 4 (Suite convergente)

1. On dit que la suite (u_n) converge vers le réel ℓ lorsque :
pour tout réel $\varepsilon > 0$, aussi petit soit-il, on peut trouver un rang n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$ on a

$$u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$$

2. Interprétation graphique. Si on représente la suite convergente par un nuage de points dans un repère, à partir d'un certain rang n_0 , tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équation $y = \ell - \varepsilon$ et $y = \ell + \varepsilon$.



Le rang n_0 est le rang à partir duquel « u_n est à une distance de ℓ inférieure à ε ».

Définition 5 (Suite convergente (avec les ε))

On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

De manière équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon.$$

C'est-à-dire encore :

$$u_n \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[.$$

Propriété 7 (Stabilité de la limite par décalage d'indice)

Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ , alors la suite décalée (u_{n+1}) converge aussi vers ℓ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell.$$



Démonstration

HP Définition – Suite extraite

Soit (u_n) une suite réelle. Une suite extraite de (u_n) est une suite de la forme

$$(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}},$$

où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n+1) > \varphi(n).$$

La suite extraite est donc obtenue en gardant certains termes de la suite initiale, sans changer leur ordre d'apparition. Par exemple, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n) .



Remarque

Pourquoi des intervalles ouverts ?

Dans la définition d'une limite finie on a des intervalles ouverts. Si on remplace "intervalle ouvert" par "intervalle fermé", cela voudrait dire par exemple que l'intervalle $[\ell ; \ell] = \{\ell\}$ doit contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Avec cette définition, seules les suites constantes égales à ℓ pourraient donc converger.

Pour éviter cela, on reste sur les intervalles ouverts.

III.2 Exemples de référence

Propriété 8

Les suites de termes général $\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots, \frac{1}{n^p}$ ($p \in \mathbb{N}^*$) sont convergentes vers 0.



Preuve

Convergence de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$.

On cherche à montrer que cette suite tend vers 0. Donc pour tout $\epsilon > 0$, on cherche p tel que :

$$\forall n > p \quad -\epsilon < u_n < \epsilon$$

Soit $I =] - \epsilon ; \epsilon [$ un intervalle ouvert de centre 0 , avec ϵ réel positif non nul.

Soit $n > 0$. Remarquons que si $\frac{1}{n} \in I$, alors puisque $n > 0$, on a $0 < \frac{1}{n} < \epsilon$ et réciproquement. De ce fait la décroissance

de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ implique que :

$$\frac{1}{n} \in]-\epsilon; \epsilon[\iff 0 < \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon} = p$$

Donc en prenant $p = \frac{1}{\epsilon}$ on obtient que pour tout entier n tel que $n > p = \frac{1}{\epsilon}$ on a $u_n = \frac{1}{n}$ qui appartient à l'intervalle $I =]-\epsilon; \epsilon[=]0 - \epsilon; 0 + \epsilon[$.

Par définition, on a prouvé que la suite (u_n) tend vers 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Remarque : la démonstration s'adapte facilement pour les autres suites.

III.3 Unicité de la limite

Propriété 9 (Unicité de la limite)

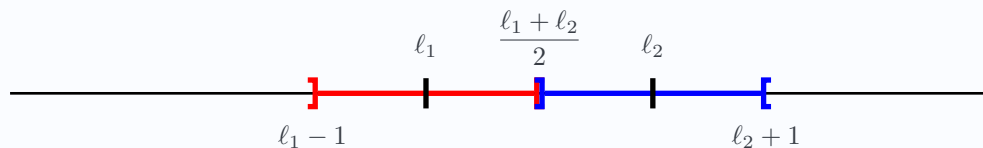
Si une suite (u_n) converge, alors sa limite est unique.



Démonstration (non exigible)

Démonstration avec un raisonnement par l'absurde. Supposons que la suite (u_n) converge vers deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2 avec $\ell_1 < \ell_2$.

- Alors puisque la suite (u_n) converge vers ℓ_1 , l'intervalle ouvert $]\ell_1 - 1; \frac{\ell_1 + \ell_2}{2}[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p_1 .
- Et puisque la suite (u_n) converge vers ℓ_2 , l'intervalle ouvert $]\frac{\ell_1 + \ell_2}{2}; \ell_2 + 1[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p_2 .



Donc pour n plus grand que $N = \max(p_1; p_2)$, on devrait avoir u_n qui appartient aux deux intervalles qui sont disjoints. C'est donc impossible ce qui prouve que la suite (u_n) ne peut pas avoir deux limites finies distinctes.

III.4 Suite convergente implique bornée

Propriété 10

Toute suite convergente est bornée



Démonstration (non exigible)

Supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ . A partir d'un certain rang p , l'intervalle ouvert $]\ell - 1; \ell + 1[$ contient tous les termes de la suite.



- Donc partir du rang p , tous les termes sont donc inférieurs à $\ell + 1$ et supérieurs à $\ell - 1$.

Pour $n \geq p$, on a $\ell - 1 \leq u_n \leq \ell + 1$.

- Avant, il y a un nombre fini de termes dont on peut trouver le maximum. Donc si on note $M = \max(u_0 ; u_1 ; \dots ; u_p)$ et $m = \min(u_0 ; u_1 ; \dots ; u_p)$, on a pour $0 \leq n \leq p$, alors $m \leq u_n \leq N$.
- Conclusion : pour tout entier n , on a :

$$\min(m ; \ell - 1) u_n \leq \max(M ; \ell + 1)$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est bornée.

III.5 Algorithmes de seuil : limite finie

Des algorithmes cherchent à déterminer à partir de quel rang les termes d'une suite vérifient une condition donnée.

Par exemple, si l'on sait qu'une suite (u_n) tend vers une limite ℓ , on peut chercher à partir de quel rang les termes sont dans un intervalle centré en ℓ :

$$u_n \in]\ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon[\iff |u_n - \ell| < \varepsilon.$$



Python : seuil autour d'une limite

On suppose qu'une suite est définie par récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et qu'elle converge vers 2. On cherche le premier rang n tel que $|u_n - 2| < 10^{-2}$.

Le programme suivant renvoie ce rang. Il est placé hors du cadre car l'environnement `minted` est un environnement verbatim.

```
1 def seuil_autour_de_2():
2     n = 0
3     u = u0
4     while abs(u - 2) >= 10**(-2):
5         n = n + 1
6         u = f(u)
7     return n
```



Python : obtenir les premiers termes dans une liste

Pour obtenir les premiers termes d'une suite définie par récurrence, on peut créer une liste puis lui ajouter les termes successifs.

```
1 def liste_termes(N):
2     u = u0
3     L = [u]
4     for k in range(N):
5         u = f(u)
6         L.append(u)
7     return L
```

IV Suites divergentes

IV.1 Définitions

Définition 6 (Suite divergente)

On dit qu'une suite diverge si et seulement si elle ne converge pas.

Définition 7 (Suite divergente vers $+\infty$)

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Définition classique.

On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A ; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang n_0 .

On écrit alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

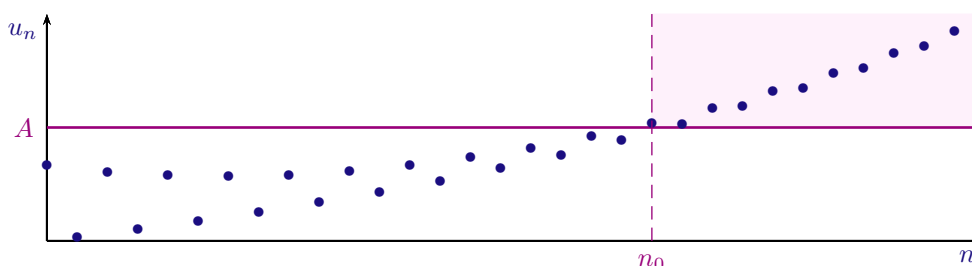
2. Définition rigoureuse.

On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies u_n > A.$$

Autrement dit, quel que soit le seuil réel A , tous les termes de la suite finissent par être strictement supérieurs à A .

3. Interprétation graphique.



Définition 8 (Suite divergente vers $-\infty$)

Soit (u_n) une suite réelle.

1. Définition classique.

On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $] -\infty ; A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On écrit alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

2. Définition rigoureuse.

On dit que la suite (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \implies u_n < A.$$

Autrement dit, quel que soit le seuil réel A , tous les termes de la suite finissent par être strictement inférieurs à A .

Remarque. Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$, alors la suite $(-u_n)$ tend vers $-\infty$.

IV.2 Exemples de référence

Propriété 11

Les suites de termes général $\sqrt{n}, n, n^2, n^3, \dots, n^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) sont divergentes vers $+\infty$.



Preuve

Montrons que la suite de terme général $\sqrt{n}$ est divergente vers $+\infty$.

Soit A un réel que l'on peut supposer être positif et aussi grand que l'on veut.

On cherche donc à déterminer un entier p tel que pour tout $n > p$, on a : $u_n = \sqrt{n} > A$.

Or on a d'après la croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$:

$$\sqrt{n} > A \iff n > A^2 = p$$

Donc il suffit de prendre $p = A^2$, ainsi si

$$n > p = A^2 \implies u_n = \sqrt{n} > A$$

Donc si $n > A^2$, alors $u_n = \sqrt{n}$ appartient à l'intervalle $]A ; +\infty[$ ce qui prouve que la suite de terme général $\sqrt{n}$ est divergente vers $+\infty$.

Remarque : la démonstration s'adapte facilement pour les autres suites.

IV.3 Un exemple à connaître : la suite alternée

Exemple 1

La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ diverge et est bornée.



Preuve

- La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ prend les valeurs (-1) et 1 selon la parité de n donc elle est bornée. Pour tout n on a :

$$-1 \leq u_n \leq 1$$

- La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée donc elle ne peut pas tendre (ou diverger) vers $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si on suppose que (u_n) tende vers une limite finie ℓ . Alors l'intervalle $]\ell - 0,1 ; \ell + 0,1[$ devrait contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Or cet intervalle est de longueur $0,2$, donc il ne peut contenir à la fois 1 et (-1) (les termes de la suite).

La suite ne converge donc pas vers une limite ℓ .

- Conclusion : la suite (u_n) diverge. Elle n'admet pas de limite mais elle est bornée.

IV.4 Divergence vers plus infini implique minorée

Propriété 12

1. Toute suite réelle divergeant vers $+\infty$ est minorée.
2. Toute suite réelle divergeant vers $-\infty$ est majorée.



Démonstration (à connaître)

IV.5 Algorithmes de seuil : limite infinie

Lorsque l'on sait qu'une suite tend vers $+\infty$, on peut chercher à partir de quel rang ses termes deviennent supérieurs à une valeur donnée.

Par exemple, si (u_n) est définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$, on peut chercher le premier entier n tel que $u_n > 10^6$.



Python : seuil vers $+\infty$

Le programme suivant renvoie le premier rang n tel que $u_n > 10^6$.

```
1 def seuil_grand():
2     n = 0
3     u = u0
4     while u <= 10**6:
5         n = n + 1
6         u = f(u)
7     return n
```

v Opérations sur les limites

Dans ce qui suit, ℓ et ℓ' désignent des réels. On va considérer tous les cas, c'est à dire quand la suite (u_n) tend vers ℓ , vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et quand la suite (v_n) tend vers ℓ' , vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. On résume les résultats dans un tableau, aucune démonstration n'est exigible.

V.1 Limite d'une somme

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée $\infty - \infty$

V.2 Limite d'un produit

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$	$\ell\ell'$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$-\infty$ (resp. $+\infty$)	Forme indéterminée $0 \times \infty$

V.3 Limite d'un inverse

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	0 avec $u_n > 0$ à partir d'un certain rang soit 0^+	0 avec $u_n < 0$ à partir d'un certain rang soit 0^-	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

V.4 Limite d'un quotient

Pour déterminer la limite d'un quotient, on peut l'écrire sous la forme d'un produit : $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	0 et $v_n > 0$	0 et $v_n < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F. I. : $\frac{\infty}{\infty}$	F. I. : $\frac{0}{0}$



Méthode : pour lever l'indétermination

Pour étudier la limite d'une suite on utilise les opérations élémentaires sur les limites. Si l'on est confronté à une des 4 formes indéterminées on transforme l'expression. On peut essayer les méthodes suivantes :

- Factoriser les expressions par le terme qui tend le plus vite vers l'infini, le terme dominant avec dans cet ordre :

$$\sqrt{n} \rightarrow n \rightarrow n^2 \rightarrow n^3 \dots$$

- Penser à l'expression conjuguée si des racines carrées apparaissent.
- On peut aussi majorer l'expression, en valeur absolue ou trouver un encadrement par des suites dont on connaît les limites et appliquer les théorèmes de comparaison.

Voir les exercices du TD n°2.

V.5 Exemples de méthodes pour lever une indétermination



Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$: factoriser par le terme dominant

Étudier la limite de la suite (u_n) définie, pour $n \geq 1$, par :

$$u_n = \frac{3n^2 - 5n + 1}{2n^2 + n}.$$



Forme indéterminée $+\infty - \infty$: utiliser l'expression conjuguée

Étudier la limite de la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \sqrt{n^2 + n} - n.$$

VI.1 Comparaison pour les limites infinies : ROC (exigible)

Si les suites (u_n) et (v_n) sont telles que :

- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang ;
- la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

alors, la suite (v_n) tend vers $+\infty$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \end{array} \right. \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$$



Si les suites (u_n) et (v_n) sont telles que :

- $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang ;
- la suite (v_n) a pour limite $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

alors, la suite (u_n) tend vers $-\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{array} \right. \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$



Ce démontre en appliquant le théorème 1 aux suites $(-u_n)$ et $(-v_n)$.

VI.2 Comparaison pour les limites finies

VI.2.1 Passage à la limite dans une inégalité

Propriété 13 (Admis)

- Si la suite (u_n) a pour limite ℓ quand n tend vers $+\infty$.
- et que la suite (v_n) a pour limite ℓ' quand n tend vers $+\infty$.
- et $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang

alors, $\ell \leq \ell'$.

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' \end{cases} \implies \ell \leq \ell'$$

ATTENTION : en passant à la limite on obtient des inégalités au sens large.

$$\begin{cases} u_n < v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell' \end{cases} \implies \ell \leq \ell'$$



Exemple

Pour tout entier $n > 0$ on a :

$$u_n = \frac{1}{n+5} < v_n = \frac{1}{n}$$

Et pourtant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

VI.2.2 Théorème d'encadrement ou des gendarmes

Théorème 3 (Admis)

Si les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) sont telles que :

- $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang ,
- les suites (u_n) et (w_n) ont la même limite finie ℓ ,

alors, la suite (v_n) a pour limite finie ℓ .

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$$



Application du théorème d'encadrement : une suite alternée amortie

Étudier la limite de la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

- Pour tout entier $n \geq 1$:

$$\dots \leq (-1)^n \leq \dots$$

- Comme $n > 0$:

$$\dots \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \dots$$

- Or les deux suites qui encadrent ont pour limite :

...

- Donc, par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$$

VII Limite d'une suite géométrique : ROC

Théorème 4 (Limite d'une suite géométrique de terme général (q^n))

Soit q un nombre réel :

- Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n a pour limite $+\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

- Si $-1 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n converge vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$$

- Si $q < -1$ alors la suite géométrique de terme général q^n n'admet pas de limite finie ou infinie.

Remarques

Pour $q = 1$, la suite (q^n) est constante et égale à 1 donc convergente.

Pour $q = -1$, la suite (q^n) oscille entre 1 et -1 sans converger. Pour $q = -1$, la suite (q^n) prend alternativement les valeurs 1 et -1 suivant la parité de n , elle n'admet pas de limite. Voir la démonstration dans l'exemple 1 du IV.3 page 9.



ROC 2 : Exigible

- Étape 1 : on suppose connue l'inégalité de Bernoulli démontrée lors du chapitre précédent. Soit un réel $\alpha > 0$, alors pour tout entier naturel n .

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$$

- Étape 2 : on étudie cas par cas en utilisant le résultat précédent.

- Cas 1 : si $q > 1$.

.....

– Cas 2 : si $-1 < q < 1 \iff |q| < 1$.

Si $|q| < 1$ alors $\frac{1}{|q|} > 1$ et on peut appliquer le résultat du cas 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|q|} \right)^n = +\infty$$

On passe alors à l'inverse (opérations sur les limites) et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|q|} \right)^n = +\infty \quad \xRightarrow{\text{Par passage inverse}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$$

Or on a :

$$-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$$

Donc par théorème d'encadrement (ou des gendarmes) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -|q|^n \leq q^n \leq |q|^n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0 \end{array} \right. \implies \boxed{|q| < 1 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0}$$



Point Bac

Au bac on procède souvent par étapes successives.

Par exemple

Soit (a_n) la suite définie pour tout entier n par

$$a_n = 200 \times 0,75^n + 500$$

Ici, $-1 < q = 0,75 < 1$ et d'après le théorème 4, la suite géométrique de terme général $0,75^n$ converge vers 0 et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,75)^n = 0$$

Donc en multipliant par 200

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,75)^n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} 200 \times (0,75)^n = 0$$

Ce qui nous donne la limite de la suite (a_n) en ajoutant 500 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 200 \times 0,75^n + 500 = 500 \quad \text{soit} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 500}$$

VIII Limites des suites monotones

VIII.1 Suite croissante de limite finie

Propriété 14

Si une suite croissante a pour limite ℓ , alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à ℓ



Attention

Si la suite n'est pas monotone, la propriété n'est pas toujours vérifiée.

Soit par exemple la suite de TG $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ définie pour $n > 0$ de l'exemple 3 de la page 14.

On a montré que la suite tendait vers 0 mais tous les termes ne sont pas inférieurs à 0.



Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante de limite ℓ .

On va raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe un terme $u_p > \ell$ et aboutir à une contradiction.

- Supposons qu'il existe un terme $u_p > \ell$, alors puisque la suite est croissante on a pour tout $n \geq p$:

$$\forall n \geq p \implies u_n \geq u_p > \ell > \ell - 1$$

Donc l'intervalle $]\ell - 1; u_p[$ contient ℓ mais aucun des termes qui sont de rang supérieur à p .

- Cela contredit le fait que la suite (u_n) soit de limite ℓ , et donc il n'existe pas de terme supérieur à ℓ .

VIII.2 Suite croissante et majorée , décroissante et minorée (Admis)

Théorème 5 (Suite croissante et majorée, décroissante et minorée (Admis))

1. Toute suite croissante et majorée par un réel M est convergente et sa limite ℓ vérifie : $\ell \leq M$.
2. Toute suite décroissante et minorée par un réel m est convergente et sa limite ℓ vérifie : $m \leq \ell$.

VIII.3 Suite croissante et non majorée : ROC

Théorème 6 (Suite croissante et non majorée : ROC)

1. Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
2. Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.



ROC 3 : Exigible

IX Complément : Algorithmes Python sur les suites

On modernise les algorithmes de seuil avec Python. Dans cette partie, on travaille avec des suites définies par récurrence. Les fonctions ne font pas d'affichage : elles renvoient une valeur ou une liste.

IX.1 Calculer un terme de rang donné

On considère la suite (r_n) définie par récurrence par :

$$\begin{cases} r_0 = 50\,000 \\ r_{n+1} = 0,96r_n. \end{cases}$$



Python : terme de rang n

Pour calculer un terme de rang donné d'une suite définie par récurrence, on part du premier terme, puis on répète la relation de récurrence autant de fois que nécessaire.

```
1 def terme_r(n):  
2     r = 50000  
3     for k in range(n):  
4         r = 0.96 * r  
5     return r
```

IX.2 Obtenir une liste de termes

On garde la même suite récurrente :

$$\begin{cases} r_0 = 50\,000 \\ r_{n+1} = 0,96r_n. \end{cases}$$



Python : liste des premiers termes

Pour obtenir les premiers termes, on initialise une liste avec le premier terme, puis on ajoute les termes successifs calculés par récurrence.

```
1 def liste_r(N):  
2     r = 50000  
3     L = [r]  
4     for k in range(N):  
5         r = 0.96 * r  
6         L.append(r)  
7     return L
```

IX.3 Algorithme de seuil

On garde la même suite récurrente :

$$\begin{cases} r_0 = 50\,000 \\ r_{n+1} = 0,96r_n. \end{cases}$$

On cherche le premier entier p tel que :

$$r_p \leqslant 30\,000.$$



Python : seuil

Pour déterminer un seuil, on fait évoluer la suite tant que la condition d'arrêt n'est pas vérifiée.

```
1 def seuil_r():
2     n = 0
3     r = 50000
4     while r > 30000:
5         n = n + 1
6         r = 0.96 * r
7     return n
```



Analyse de l'algorithme

La boucle s'arrête dès que la condition $r > 30\,000$ devient fausse, c'est-à-dire dès que $r \leqslant 30\,000$. On obtient :

$$r_{12} \approx 30\,635 > 30\,000 \quad \text{et} \quad r_{13} \approx 29\,410 < 30\,000.$$

Donc :

$$p = 13.$$

IX.4 Un deuxième modèle récurrent

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 0,7u_n + 0,75. \end{cases}$$

On veut obtenir les premiers termes, puis déterminer le premier rang n tel que $u_n > 2,4$.



Python : liste et seuil pour une suite récurrente

La même structure revient très souvent : on initialise, on applique la relation de récurrence dans une boucle, puis on renvoie soit une liste, soit le rang cherché.

```
1 def liste_u(N):
2     u = 1
3     L = [u]
4     for k in range(N):
5         u = 0.7 * u + 0.75
6         L.append(u)
7     return L
8
9
10 def seuil_u():
11     n = 0
12     u = 1
13     while u <= 2.4:
14         n = n + 1
15         u = 0.7 * u + 0.75
16     return n
```

IX.5 À retenir



Trois fonctions Python classiques

Pour une suite définie par récurrence, on utilise souvent trois types de fonctions.

- Une fonction qui renvoie un terme de rang donné.
- Une fonction qui renvoie une liste de termes.
- Une fonction qui renvoie un seuil.

x Utiliser la calculatrice pour calculer les termes d'une suite définie par récurrence

On considère une suite (u_n) définie par son premier terme et une relation de récurrence. Par exemple :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 3.$$

La calculatrice permet de calculer rapidement les premiers termes de la suite, puis de les afficher dans un tableau de valeurs.

X.1 Avec la calculatrice NumWorks



Calculer les termes d'une suite sur NumWorks

1. Depuis l'écran d'accueil, ouvrir l'application Suites ou, en anglais, Sequences.
2. Ajouter une nouvelle suite : Ajouter une suite ou, en anglais, Add a sequence.
3. Choisir une suite définie par récurrence d'ordre 1 : Suite récurrente d'ordre 1 ou, en anglais, Recursive first order.
4. Renseigner la relation de récurrence. Pour l'exemple étudié, on saisit :

$$u(n+1) = 2 * u(n) + 3$$

5. Renseigner le premier terme :

$$u(0) = 3$$

6. Aller dans l'onglet Tableau ou, en anglais, Table.
7. Lire les valeurs successives de u_n .

NumWorks - Suites / Sequences

Application : Suites / Sequences

Type : suite récurrente d'ordre 1 / Recursive first order

Saisie / Entry

$$u(n+1) = 2 * u(n) + 3$$

$$u(0) = 3$$

Onglet : Tableau / Table

Tableau des valeurs

n	u(n)
0	3
1	9
2	21
3	45

1. Choisir la suite récurrente
2. Entrer $u(n+1)$ et $u(0)$
3. Lire le tableau

1. Choose recursive sequence
2. Enter $u(n+1)$ and $u(0)$
3. Read the table

X.2 Avec une calculatrice TI-Nspire CAS



Calculer les termes d'une suite sur TI-Nspire CAS

Sur TI-Nspire CAS, on peut définir directement la suite dans l'éditeur de suites. La saisie se fait avec un indice précédent, par exemple $n - 1$.

1. Depuis l'écran d'accueil, créer un nouveau document : Nouveau document ou, en anglais, New Document.
2. Ajouter l'application Graphiques ou, en anglais, Graphs.
3. Ouvrir le menu d'entrée des graphiques : Entrée du graphique ou, en anglais, Graph Entry.
4. Choisir le type Suite ou, en anglais, Sequence.
5. Dans l'éditeur de suites, saisir la relation de récurrence. Pour l'exemple étudié, on peut saisir :

$$u_1(n) = 2 * u_1(n-1) + 3$$

6. Renseigner la valeur initiale :

$$u_1(0) = 3$$

7. Afficher ensuite le tableau des valeurs : Tableau ou, en anglais, Table / Show Table.

TI-Nspire CAS - Suite récurrente / Sequence

Application : Graphiques / Graphs

Menu : Entree du graphique > Suite / Graph Entry > Sequence

Editeur de suites

$$u_1(n) = 2 * u_1(n-1) + 3$$

$$u_1(0) = 3$$

Afficher la table / Show Table

Remarque : le nom peut être u_1 ou u_n selon l'affichage.

Table

n	$u_1(n)$
0	3
1	9
2	21
3	45

Saisie directe : $u_1(n) = 2 * u_1(n-1) + 3$ puis valeur initiale $u_1(0) = 3$

Direct entry: $u_1(n) = 2 * u_1(n-1) + 3$ then initial value $u_1(0) = 3$



Notation sur TI-Nspire

Selon l'écran et le contexte, la calculatrice peut afficher le nom de la suite sous la forme u_1 ou sous une forme proche de u_n . L'idée reste la même : on écrit le terme de rang n en fonction du terme de rang $n - 1$.
Par exemple :

$$u_1(n) = 2 * u_1(n-1) + 3$$

correspond à :

$$u_n = 2u_{n-1} + 3.$$

**Point important**

La calculatrice calcule les termes de proche en proche.

Pour une suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

il faut d'abord connaître u_0 , puis calculer u_1 , puis u_2 , etc.

On ne remplace donc pas directement n par une valeur dans la relation de récurrence.

**Exercice 1**

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 3.$$

À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs de u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

XI Now We Can Talk : compléments post-bac

XI.1 Suites extraites et valeurs d'adhérence

HP Définition – Valeur d'adhérence

Soit (u_n) une suite réelle. Un réel a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) lorsqu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers a . Autrement dit :

$$\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \text{ strictement croissante} \quad \text{telle que} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = a.$$

HP Propriété – Exemple fondamental

La suite $((-1)^n)$ ne converge pas, mais elle possède deux valeurs d'adhérence : -1 et 1 .

HP Preuve – Indication

On considère les deux suites extraites des termes pairs et impairs :

$$u_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1.$$

Ainsi, la suite extraite (u_{2n}) converge vers 1 et la suite extraite (u_{2n+1}) converge vers -1 . Donc 1 et -1 sont deux valeurs d'adhérence de $((-1)^n)$.

HP Théorème – Suite extraite d'une suite convergente

Si une suite (u_n) converge vers un réel ℓ , alors toute suite extraite de (u_n) converge également vers ℓ .

En particulier, une suite convergente possède une unique valeur d'adhérence : sa limite.

HP Preuve – Démonstration

Supposons que (u_n) converge vers ℓ et considérons une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante. Une récurrence immédiate donne, pour tout entier naturel n :

$$\varphi(n) \geq n.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $u_n \rightarrow \ell$, il existe un entier naturel N tel que :

$$k \geq N \implies |u_k - \ell| < \varepsilon.$$

Pour tout $n \geq N$, on a $\varphi(n) \geq n \geq N$. On peut donc appliquer la propriété précédente avec $k = \varphi(n)$:

$$|u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = \ell.}$$

Toute valeur d'adhérence étant la limite d'une suite extraite, elle est donc nécessairement égale à ℓ . Réciproquement, la suite (u_n) est elle-même une suite extraite de (u_n) , obtenue avec $\varphi(n) = n$: le réel ℓ est bien une valeur d'adhérence.

HP Propriété – Critère de divergence

Si une suite possède deux valeurs d'adhérence distinctes, alors elle diverge.

C'est la contraposée du résultat précédent : une suite convergente ne peut pas avoir deux suites extraites convergeant vers deux limites différentes.

HP Théorème – Théorème de Bolzano–Weierstrass

Toute suite réelle bornée possède au moins une suite extraite convergente. Autrement dit, toute suite réelle bornée possède au moins une valeur d'adhérence.

HP Théorème – Valeur d'adhérence unique et convergence

Soit (u_n) une suite réelle bornée. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. la suite (u_n) converge vers un réel ℓ ;
2. la suite (u_n) possède une unique valeur d'adhérence, égale à ℓ .

HP Preuve – Démonstration

Le sens direct a déjà été démontré : si (u_n) converge vers ℓ , toutes ses suites extraites convergent vers ℓ .

Réciproquement, supposons que (u_n) soit bornée et que sa seule valeur d'adhérence soit ℓ . Raisonnons par l'absurde et supposons que (u_n) ne converge pas vers ℓ .

La négation de la définition de la convergence donne alors l'existence d'un réel $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout entier naturel N , il existe un entier $n \geq N$ vérifiant :

$$|u_n - \ell| \geq \varepsilon_0.$$

On peut donc construire une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ telle que, pour tout entier naturel n :

$$|u_{\varphi(n)} - \ell| \geq \varepsilon_0.$$

Cette suite extraite est bornée. D'après le théorème de Bolzano–Weierstrass, elle possède elle-même une suite extraite convergente vers un réel a . Cette suite est aussi une suite extraite de la suite initiale, donc a est une valeur d'adhérence de (u_n) .

Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$|a - \ell| \geq \varepsilon_0,$$

donc $a \neq \ell$. Cela contredit l'unicité de la valeur d'adhérence ℓ . Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

HP Propriété – Pourquoi l'hypothèse de bornitude est-elle nécessaire ?

La suite définie par

$$u_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = 2n + 1$$

possède une unique valeur d'adhérence réelle, égale à 0, mais elle ne converge pas : la suite extraite (u_{2n+1}) tend vers $+\infty$.

Ainsi, pour une suite non bornée, l'unicité de la valeur d'adhérence réelle ne suffit pas à assurer la convergence.

XI.2 Suites adjacentes**HP Définition – Suites adjacentes**

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes lorsque :

- la suite (u_n) est croissante ;
- la suite (v_n) est décroissante ;
- la différence $v_n - u_n$ tend vers 0.

Avec cette convention, on a nécessairement $u_n \leq v_n$ pour tout entier naturel n .

HP Théorème – Théorème des suites adjacentes

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers une même limite.

HP Preuve – Démonstration

Posons $w_n = v_n - u_n$. Comme (v_n) est décroissante et (u_n) croissante, la suite (w_n) est décroissante. Pour tout entier n

fixé et tout $k \geq n$, on a donc $w_k \leq w_n$. En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient :

$$0 \leq w_n,$$

donc $u_n \leq v_n$.

Pour tout entier naturel n , on a alors :

$$u_n \leq v_n \leq v_0 \quad \text{et} \quad u_0 \leq u_n \leq v_n.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 ; elle converge donc vers un réel ℓ . De même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0 ; elle converge vers un réel ℓ' .

Comme $v_n - u_n \rightarrow 0$, on obtient par passage à la limite :

$$\ell' - \ell = 0.$$

Donc $\ell = \ell'$. Les deux suites convergent vers une même limite.

↵ Fin du cours ↘