

Chapitre 1

Démonstration par récurrence

Version professeur

Sommaire du chapitre

I	Introduction historique	2
II	Propriétés héréditaires	3
III	Principe de récurrence	5
IV	Rédaction type : encadrement d'une suite	7
V	ROC au programme : inégalité de Bernoulli	8
VI	Application : pourquoi cette ROC sert aux suites	9



ROC du chapitre : inégalité de Bernoulli

Démonstration à connaître. Pour tout réel $\alpha > 0$ et tout entier naturel n ,

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

I Introduction historique

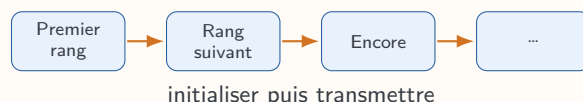
I.1 Une idée simple pour raisonner sur l'infini



Une porte vers l'infini

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer une propriété portant sur une infinité d'entiers à partir de deux idées simples : vérifier le premier rang, puis prouver que la vérité se transmet d'un rang au suivant.

Autrement dit, on ne vérifie pas la propriété séparément pour tous les entiers. On vérifie un premier rang, puis on montre que chaque rang entraîne le suivant. C'est l'image classique des dominos : si le premier tombe et si chaque domino fait tomber le suivant, alors tous les dominos tombent.



I.2 Quelques repères historiques



Quelques repères historiques

Période	Idée à retenir
Antiquité et Moyen Âge	On rencontre déjà des raisonnements de proche en proche dans des problèmes arithmétiques ou géométriques.
XI ^e siècle	Al-Karaji et As-Samaw'al utilisent des raisonnements proches de l'induction mathématique.
XVII ^e siècle	Pascal utilise explicitement un raisonnement de type récurrence dans son <i>Traité du triangle arithmétique</i> .
XIX ^e siècle	Peano formalise les entiers naturels et donne un cadre axiomatique au principe de récurrence.



Objectifs du chapitre

- Comprendre la différence entre une propriété vraie à un rang et une propriété héréditaire.
- Savoir rédiger une démonstration par récurrence en trois étapes : initialisation, hérédité, conclusion.
- Utiliser l'hypothèse de récurrence dans une démonstration d'inégalité ou d'encadrement.
- Connaître une démonstration au programme : l'inégalité de Bernoulli, utilisée ensuite pour l'étude de la limite de q^n .
- Préparer les questions de bac sur les suites définies par récurrence.

II Propriétés héréditaires

II.1 Définition

Définition 1

Pour n entier, une propriété $P(n)$ est dite héréditaire à partir du rang n_0 si, pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$P(n) \implies P(n+1).$$

Attention : une propriété peut être héréditaire et pourtant fausse pour tous les entiers si elle n'est jamais initialisée.

Dans une démonstration, on ne commence pas par affirmer directement cette implication. On fixe un entier $n \geq n_0$, on suppose $P(n)$ vraie, puis on démontre $P(n+1)$.

II.2 Exemple introductif



Hérédité et initialisation

On définit, pour tout entier naturel n , les suites :

$$a_n = 4^n + 1 \quad \text{et} \quad b_n = 4^n - 1.$$

1. Calculer les quatre premiers termes des deux suites.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} - a_n = 3 \times 4^n = b_{n+1} - b_n.$$

3. On considère les propriétés :

$$P(n) : \text{« } a_n \text{ est multiple de 3 »} \quad \text{et} \quad Q(n) : \text{« } b_n \text{ est multiple de 3 »}.$$

Montrer que les deux propriétés sont héréditaires.

4. Les propriétés $P(n)$ et $Q(n)$ sont-elles vraies pour tout entier naturel n ?



Correction

1. On obtient :

n	0	1	2	3
a_n	2	5	17	65
b_n	0	3	15	63

2. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= (4^{n+1} + 1) - (4^n + 1) \\ &= 4^{n+1} - 4^n \\ &= 4 \times 4^n - 4^n \\ &= 3 \times 4^n. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= (4^{n+1} - 1) - (4^n - 1) \\ &= 4^{n+1} - 4^n \\ &= 3 \times 4^n. \end{aligned}$$

3. Soit n un entier naturel fixé.

Supposons que $P(n)$ soit vraie, c'est-à-dire supposons que a_n soit multiple de 3. Il existe alors un entier k tel que :

$$a_n = 3k.$$

Or, d'après la question précédente :

$$a_{n+1} = a_n + 3 \times 4^n.$$

Donc :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 3k + 3 \times 4^n \\ &= 3(k + 4^n). \end{aligned}$$

Comme $k + 4^n$ est un entier, a_{n+1} est multiple de 3.

On a donc montré que si $P(n)$ est vraie pour un entier naturel fixé n , alors $P(n+1)$ est vraie. La propriété P est donc héréditaire.

De même, soit n un entier naturel fixé. Supposons que $Q(n)$ soit vraie, c'est-à-dire supposons que b_n soit multiple de 3. Il existe alors un entier ℓ tel que :

$$b_n = 3\ell.$$

Or :

$$b_{n+1} = b_n + 3 \times 4^n.$$

Donc :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 3\ell + 3 \times 4^n \\ &= 3(\ell + 4^n). \end{aligned}$$

Comme $\ell + 4^n$ est un entier, b_{n+1} est multiple de 3.

On a donc montré que si $Q(n)$ est vraie pour un entier naturel fixé n , alors $Q(n+1)$ est vraie. La propriété Q est donc héréditaire.

4. On a :

$$a_0 = 2.$$

Donc $P(0)$ est fausse. L'hérédité seule ne permet pas de conclure que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

En revanche :

$$b_0 = 0.$$

Or 0 est multiple de 3 et la propriété Q est héréditaire. On pourra donc démontrer par récurrence que $Q(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .



Idée à retenir

L'hérédité seule ne suffit pas. Il faut aussi une initialisation. C'est l'image des dominos : si chaque domino fait tomber le suivant, il faut encore faire tomber le premier.

III Principe de récurrence

III.1 Ce que dit vraiment le principe



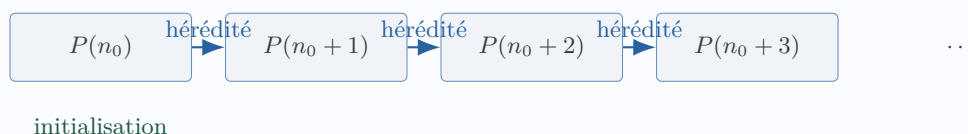
Idée fondamentale

Une démonstration par récurrence sert à prouver une propriété $P(n)$ pour une infinité d'entiers :

$$n = n_0, \quad n = n_0 + 1, \quad n = n_0 + 2, \quad \dots$$

On ne vérifie donc pas la propriété une infinité de fois. On vérifie seulement :

- qu'elle est vraie au premier rang considéré ;
- qu'elle se transmet d'un rang au rang suivant.



III.2 Énoncé rigoureux

Propriété 1 (Principe de récurrence)

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n et soit n_0 un entier naturel.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Initialisation : la propriété est vraie au rang initial n_0 , c'est-à-dire

$$P(n_0) \text{ est vraie.}$$

2. Hérédité : on fixe un entier naturel $n \geq n_0$. On suppose que la propriété est vraie au rang n , c'est-à-dire que $P(n)$ est vraie. On démontre alors que la propriété est vraie au rang suivant, c'est-à-dire que $P(n+1)$ est vraie. Comme l'entier n fixé est quelconque, cette étape prouve la transmission d'un rang au rang suivant. Alors la propriété est vraie au rang n_0 et héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$:

$$\forall n \geq n_0, \quad P(n) \text{ est vraie.}$$



Formulation à retenir

Pour utiliser une récurrence, il faut toujours faire apparaître les deux informations suivantes, initialisation et hérédité :

$$P(n_0) \text{ est vraie}$$

Si, pour un entier fixé $n \geq n_0$, la propriété $P(n)$ est vraie,
alors la propriété $P(n+1)$ est vraie.

Sans initialisation, la chaîne ne démarre pas. Sans hérédité, la propriété ne se transmet pas.

III.3 Complément hors programme

HP Propriété – Lecture « supérieur » du principe

On peut interpréter la récurrence avec l'ensemble

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0 \text{ et } P(n) \text{ est vraie}\}.$$

L'initialisation affirme que $n_0 \in E$. L'hérédité affirme que, dès qu'un entier $n \geq n_0$ appartient à E , son successeur $n + 1$ appartient aussi à E .

Ainsi, en partant de n_0 , on obtient successivement :

$$P(n_0), \quad P(n_0 + 1), \quad P(n_0 + 2), \quad \dots$$

On atteint donc tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0 .

HP Preuve – Justification par l'absurde

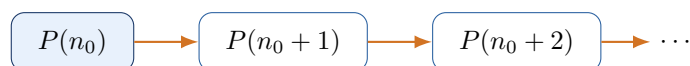
Supposons que les deux conditions du principe soient vérifiées, mais que la conclusion soit fausse.

Il existerait alors au moins un entier $m \geq n_0$ tel que $P(m)$ soit fausse. L'ensemble des contre-exemples serait donc non vide. Comme c'est un ensemble d'entiers naturels, il admet un plus petit élément ; notons-le m .

On ne peut pas avoir $m = n_0$, car l'initialisation donne $P(n_0)$ vraie. Donc $m > n_0$, et l'entier $m - 1$ vérifie $m - 1 \geq n_0$.

Par minimalité de m , $P(m - 1)$ est vraie. Or l'hérédité appliquée au rang $m - 1$ donne alors $P(m)$ vraie, ce qui contredit le choix de m .

Il n'existe donc aucun contre-exemple : la propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.



le passage $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ est répété indéfiniment

III.4 Rédaction attendue

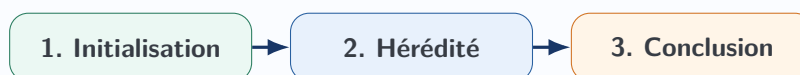


La rédaction à utiliser

Pour une preuve par récurrence, on évite les phrases vagues. La rédaction doit faire apparaître clairement :

1. la propriété $P(n)$;
2. l'initialisation au bon rang ;
3. l'hypothèse de récurrence, utilisée uniquement dans l'étape d'hérédité ;
4. ce qu'il faut démontrer au rang $n + 1$;
5. la conclusion pour tous les entiers à partir du rang initial.

Dans les preuves du chapitre, on utilisera la présentation suivante :



- Initialisation : on vérifie $P(n_0)$.
- Hérédité : on suppose $P(n)$ vraie pour un entier $n \geq n_0$ fixé, puis on montre $P(n + 1)$.
- Conclusion : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

IV Rédaction type : encadrement d'une suite

Exemple type bac

Soit (a_n) la suite définie, pour tout entier $n \geq 1$, par :

$$\begin{cases} a_1 = 0,5 \\ a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3. \end{cases}$$

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$0 \leq a_n \leq 0,6.$$

Correction rédigée

Notons pour tout entier naturel $n \geq 1$ la propriété

$$P(n) : 0 \leq a_n \leq 0,6.$$

- Initialisation

Pour $n = 1$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque :

$$a_1 = 0,5 \quad \text{et} \quad 0 \leq 0,5 \leq 0,6.$$

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.



Remarque

On admet que :

- $0 \leq a_n \leq 0,6$;
- $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$.

Et on cherche à montrer que :

$$\boxed{0 \leq a_{n+1} \leq 0,6} \quad \text{à prouver}$$

On applique l'hypothèse de récurrence :

$$0 \leq a_n \leq 0,6.$$

Comme $0,5 > 0$, l'ordre est conservé :

$$\begin{aligned} 0 \leq a_n \leq 0,6 &\implies 0 \leq 0,5a_n \leq 0,3 \\ &\implies 0,3 \leq 0,5a_n + 0,3 \leq 0,6 \\ &\implies 0,3 \leq a_{n+1} \leq 0,6 \\ &\implies 0 \leq a_{n+1} \leq 0,6. \end{aligned}$$

On a alors montré que $0 \leq a_{n+1} \leq 0,6$, et donc que $P(n + 1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.

- Conclusion

On a montré que $P(1)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad 0 \leq a_n \leq 0,6}$$

v ROC au programme : inégalité de Bernoulli

Propriété 2 (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout réel $\alpha > 0$ et pour tout entier naturel n , on a :

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$



ROC 1 : Exigible

On fixe un réel $\alpha > 0$ et on montre par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Notons pour tout entier naturel $n \geq 0$ la propriété

$$P(n) : (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

- Initialisation

Pour $n = 0$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque :

$$(1 + \alpha)^0 = 1 \quad \text{et} \quad 1 + 0 \times \alpha = 1.$$

Donc $(1 + \alpha)^0 \geq 1 + 0 \times \alpha$.

- Hérédité

Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n + 1$.



Remarque

On admet que :

- $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$;
- $\alpha > 0$, donc $1 + \alpha > 0$.

Et on cherche à montrer que :

$$\boxed{(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\alpha} \quad \text{à prouver}$$

On applique l'hypothèse de récurrence. Comme $1 + \alpha > 0$, on peut multiplier l'inégalité par $1 + \alpha$ sans changer le sens de l'inégalité :

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)^{n+1} &= (1 + \alpha)^n (1 + \alpha) \\ &\geq (1 + n\alpha) (1 + \alpha) \\ &= 1 + \alpha + n\alpha + n\alpha^2 \\ &= 1 + (n + 1)\alpha + n\alpha^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)\alpha, \end{aligned}$$

car $n\alpha^2 \geq 0$.

On a alors montré que $(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\alpha$, et donc que $P(n + 1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.

- Conclusion

On a montré que $P(0)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier naturel n .

$$\boxed{\forall \alpha > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha}$$

**Repère historique**

L'inégalité de Bernoulli porte le nom de Jakob Bernoulli, mathématicien suisse de la fin du XVII^e siècle. Elle illustre parfaitement le rôle du raisonnement par récurrence : une inégalité simple au rang 0 se transmet ensuite à tous les rangs.

VI Application : pourquoi cette ROC sert aux suites**Propriété 3 (Conséquence utile)**

Si $q > 1$, alors la suite géométrique (q^n) tend vers $+\infty$.

**Démonstration**

Soit $q > 1$. On pose $\alpha = q - 1$. Alors $\alpha > 0$ et $q = 1 + \alpha$.
D'après l'inégalité de Bernoulli, pour tout entier naturel n :

$$q^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Or $\alpha > 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + n\alpha) = +\infty.$$

D'après le théorème de comparaison que l'on verra plus tard (chaque terme de la suite (q^n) est supérieur à $(1 + n\alpha)$ qui lui même tend vers $+\infty$) :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty.}$$

**À retenir pour le bac**

Dans une question de récurrence, il ne suffit pas d'écrire « on suppose que c'est vrai ». Il faut toujours préciser :

- le rang de départ ;
- la propriété étudiée ;
- l'hypothèse de récurrence ;
- le résultat à prouver au rang suivant.