

TD – EXERCICES

TD 4

Variables aléatoires

Version élève

Sommaire du TD

I	Automatismes du chapitre	2
II	Variable aléatoire et loi de probabilité	3
III	Répétitions d'épreuves de Bernoulli	6
IV	Espérance, linéarité et jeu équitale	9
V	Variance et écart-type	14
VI	Simulation avec Python	17
VII	Premier Bilan	20
VIII	En route vers le BAC	23

Objectifs

- Déterminer les valeurs prises par une variable aléatoire et sa loi de probabilité.
- Traduire un événement à l'aide d'une variable aléatoire.
- Construire la loi du nombre de succès lors de trois ou quatre répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli.
- Calculer et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire ; étudier l'équité d'un jeu.
- Calculer une variance et un écart-type à l'aide de la formule de König–Huygens.
- Utiliser la linéarité de l'espérance, notamment pour déterminer une mise équitale.
- Comprendre et compléter une simulation Python d'une variable aléatoire.

Automatismes du chapitre

Exercise 1

Question 6. Un jeu donne un lot de 0 euro avec probabilité 0,5, de 4 euros avec probabilité 0,3 et de 10 euros avec probabilité 0,2. Quelle mise rend le jeu équitable?

This image shows a full page of dot grid paper. The background is white, and it is covered with a regular pattern of small, dark grey dots. The dots are arranged in straight horizontal and vertical lines, creating a grid of small squares across the entire page. There are no margins, text, or other markings present.

Thème II

Variable aléatoire et loi de probabilité

Exercice 2 Bilan D'une expérience à la loi d'une variable aléatoire

Une roue comporte 10 secteurs de même taille : 5 secteurs bleus, 3 secteurs verts et 2 secteurs rouges. On fait tourner la roue une fois.

On définit la variable aléatoire X par :

$X = -2$ si la roue s'arrête sur bleu, $X = 1$ sur vert, $X = 5$ sur rouge.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Décrire par une phrase l'événement $\{X \geq 1\}$, puis calculer sa probabilité.
3. Construire le tableau donnant la loi de probabilité de X .
4. Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité.

[illegible]

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 4, page 5.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Une boîte contient 12 jetons indiscernables au toucher : 6 noirs, 4 blancs et 2 rouges. On tire un jeton au hasard et on définit Y par

$Y = -1$ pour un jeton noir, $Y = 2$ pour un jeton blanc, $Y = 4$ pour un jeton rouge.

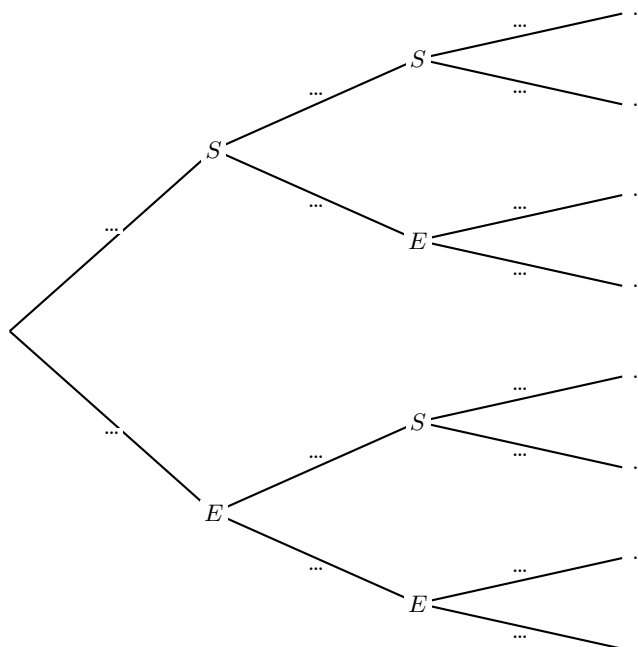
1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Construire la loi de probabilité de Y .
3. Calculer $P(Y > 0)$ et $P(Y \leq 2)$.

Thème III

Répétitions d'épreuves de Bernoulli

Exercice 5 Bilan Trois répétitions : construire la loi du nombre de succès

On répète trois fois, de manière indépendante, une même épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p = 0,4$. On note X le nombre de succès obtenus.



1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Calculer $P(X = 0)$.
3. Justifier que $P(X = 1) = 3 \times 0,4 \times 0,6^2$, puis calculer cette probabilité.
4. Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$, puis dresser la loi de X .
5. Calculer $P(X \geq 2)$.

[illegible]

Parcours A – Consolidation

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 6, page 7.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 7, page 8.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 6 **[+]** Consolidation Même travail avec $p = 0,7$

On répète trois fois, de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès 0,7. On note Y le nombre de succès obtenus.

1. Déterminer $Y(\Omega)$.
2. Calculer $P(Y = 0)$ et $P(Y = 3)$.
3. Calculer $P(Y = 1)$ puis $P(Y = 2)$ en justifiant le nombre de chemins.
4. Vérifier que la somme des quatre probabilités vaut 1.

[illegible]

On répète quatre fois, de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès $p = 0,6$. On note Z le nombre de succès obtenus.

1. Déterminer $Z(\Omega)$.
2. Combien de chemins donnent exactement trois succès? En déduire $P(Z = 3)$.
3. Combien de chemins donnent exactement deux succès? En déduire $P(Z = 2)$.
4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins trois succès.

Thème IV

Espérance, linéarité et jeu équitable

Exercice 8 [!] Bilan Étudier un jeu et déterminer une mise équitable

Une roue comporte 10 secteurs équiprobables. Cinq secteurs donnent un lot de 0 euro, trois secteurs un lot de 3 euros et deux secteurs un lot de 8 euros. Pour jouer, on paie une mise de 2 euros.

On note X le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire

$$X = \text{lot reçu} - \text{mise.}$$

1. Déterminer les valeurs prises par X et sa loi de probabilité.
2. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.
3. On note L le lot reçu. Exprimer L en fonction de X , puis calculer $E(L)$ à l'aide de la linéarité de l'espérance.
4. On remplace la mise de 2 euros par une mise de m euros. On note G_m le nouveau gain algébrique. Exprimer $E(G_m)$ en fonction de m et déterminer la mise qui rend le jeu équitable.

[illegible]

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 10, page 11.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Une boîte contient 12 tickets : 6 tickets rapportent 0 euro, 4 tickets rapportent 3 euros et 2 tickets rapportent 9 euros. La mise est de 2 euros. On note Y le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de Y .
2. Calculer $E(Y)$ et préciser si le jeu est favorable, équitable ou défavorable au joueur.
3. Déterminer la mise équitable en conservant les mêmes lots.

Exercice 10 [*] Approfondissement Deux méthodes pour retrouver une mise équi-

Une urne contient 20 boules : 12 noires, 6 blanches et 2 rouges. Un joueur mise m euros puis tire une boule au hasard. Il reçoit 0 euro pour une boule noire, 5 euros pour une boule blanche et 10 euros pour une boule rouge. On note G_m le gain algébrique.

1. Construire la loi de G_m .
2. À partir de cette loi, calculer $E(G_m)$ puis déterminer la mise équitable.
3. Retrouver ce résultat en introduisant la variable aléatoire L donnant le lot reçu et en utilisant la linéarité de l'espérance.

Exercice 11

Une boîte contient 15 tickets indiscernables au toucher : 8 tickets ne rapportent rien, 5 tickets rapportent 4 euros et 2 tickets rapportent 10 euros. Pour jouer, on paie une mise de m euros. On note G_m le gain algébrique du joueur.

1. Construire la loi de G_m .
2. Calculer $E(G_m)$ en fonction de m .
3. Déterminer la mise qui rend le jeu équitable.

Exercice 12 [*] Approfondissement Équité et équation du second degré

Une épreuve de Bernoulli a une probabilité de succès p , avec $0 < p < 1$. On la répète deux fois de manière indépendante. Le joueur paie 1 euro pour participer.

- s'il obtient deux succès, il reçoit 4 euros ;
- s'il obtient deux échecs, il reçoit 1 euro ;
- s'il obtient exactement un succès, il ne reçoit rien.

On note X le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer les trois valeurs prises par X et leurs probabilités.
2. Montrer que

$$E(X) = 5p^2 - 2p.$$

- 3.** Pour quelle valeur de p le jeu est-il équitable ?

Variance et écart-type

[!] Bilan Calculer et interpréter une dispersion

Une variable aléatoire X a pour loi :

x	-2	0	2	4
$P(X = x)$	$0,4$	$0,3$	$0,2$	$0,1$

1. Calculer $E(X)$.
2. Calculer $E(X^2)$.
3. En déduire $V(X)$ à l'aide de la formule de König–Huygens.
4. Calculer $\sigma(X)$ et interpréter cette valeur.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 15, page 16.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Une variable aléatoire Y a pour loi :

y	0	2	4
$P(Y = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1. Calculer $E(Y)$ puis $E(Y^2)$.
2. Calculer $V(Y)$ puis $\sigma(Y)$.

[illegible]

On compare deux jeux dont le gain algébrique est modélisé par les variables A et B .

b	-5	1
$P(B = b)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

1. Montrer que les deux jeux ont la même espérance.
2. Calculer $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$.
3. Quel jeu présente la dispersion la plus importante?

Thème VI

Simulation avec Python

Exercice 16 [!] Bilan Simuler une variable aléatoire et estimer son espérance

On considère une variable aléatoire X telle que

$$P(X = -2) = 0,5, \quad P(X = 1) = 0,3, \quad P(X = 6) = 0,2.$$

On souhaite simuler une réalisation de X avec la fonction `random()`.

```
from random import random

def tirage_X():
    tirage = random()
    if tirage < 0.5:
        return -2
    elif tirage < 0.8:
        return 1
    else:
        return 6
```

1. Expliquer pourquoi la condition `tirage < 0.5` simule la valeur -2 avec probabilité $0,5$.
2. Expliquer pourquoi le second test correspond à une probabilité égale à $0,3$.
3. Calculer théoriquement $E(X)$.
4. On répète `tirage_X()` un très grand nombre de fois et on calcule la moyenne des valeurs obtenues. Autour de quelle valeur s'attend-on à trouver cette moyenne ?

Parcours A – Consolidation

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 17,
page 18.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 18, page 19.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 17 [+] Consolidation Compléter une simulation et calculer une moyenne

On souhaite simuler n réalisations de la variable X de l'exercice précédent.

```
def moyenne_simulee(n):
    somme = 0
    for i in range(n):
        somme = .....
    return .....
```

1. Compléter les deux lignes manquantes.
2. Interpréter le résultat de `moyenne_simulee(10000)`.

[illegible]

Exercice 18 [*] Approfondissement Moyennes d'échantillons

Pour la variable X précédente, on admet que $E(X) = 0,5$ et $\sigma(X) \approx 3,04$. Pour un échantillon de taille n , on note m la moyenne observée. Le cours propose d'expérimenter la relation

$$|m - E(X)| \leq \frac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}}.$$

1. Pour $n = 100$, calculer la borne $\frac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.
2. Pour $n = 10\,000$, refaire le calcul.
3. Expliquer l'effet de l'augmentation de la taille de l'échantillon sur la moyenne expérimentale.

Thème VII

Premier Bilan

Exercice 19 [!] Bilan Sujet type complet

Une urne contient 10 boules : 5 bleues, 3 vertes et 2 rouges. Un joueur tire une boule au hasard. Il reçoit 0 euro si elle est bleue, 4 euros si elle est verte et 9 euros si elle est rouge. La mise initiale est de 2 euros. On note X le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer les valeurs prises par X et construire sa loi.
2. Calculer $P(X > 0)$.
3. Calculer $E(X)$ puis interpréter le résultat.
4. Calculer $E(X^2)$, puis $V(X)$ et $\sigma(X)$.
5. Le jeu est répété trois fois de manière indépendante. On appelle « succès » l'événement « le joueur obtient un gain strictement positif » et on note Y le nombre de succès obtenus.
 5. a. Justifier que la probabilité d'un succès vaut $\frac{1}{2}$.
 5. b. Déterminer la loi de Y en justifiant les coefficients utilisés.
6. On conserve les mêmes lots, mais la mise de 2 euros est remplacée par une mise de m euros. On note G_m le nouveau gain algébrique.
 6. a. Construire la loi de G_m .
 6. b. Calculer $E(G_m)$ en fonction de m , puis déterminer la mise qui rend le jeu équitable.
 6. c. Retrouver rapidement ce résultat avec la linéarité de l'espérance.

[illegible]

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 21, page 22.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercise 20 [+] Consolidation

Une urne contient 12 boules : 6 bleues, 4 vertes et 2 rouges. Le joueur reçoit respectivement 0, 3 ou 9 euros et paie une mise de 2 euros. On note X son gain algébrique.

1. Construire la loi de X .
2. Calculer $E(X)$.
3. Calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$.
4. Déterminer la mise équitable en conservant les mêmes lots.

Exercice 21 [*] Approfondissement Une donnée inconnue dans la loi

Un jeu a trois gains possibles : -2 , 1 et 5 euros. On note X le gain algébrique. On sait que

$$P(X = -2) = p, \quad P(X = 1) = \frac{1}{2},$$

et que le jeu est équitable.

1. Exprimer $P(X = 5)$ en fonction de p .
2. Traduire l'équité du jeu par une équation portant sur p .
3. Déterminer p puis la loi de X .

Thème VIII

En route vers le BAC

Les exercices ci-dessous sont adaptés d'exercices officiels de l'épreuve anticipée de mathématiques 2026. Ils sont recentrés sur les notions de ce chapitre.

Exercice 22 [BAC] D'après Bac 2026 Amérique du Nord 2026 – exercice complet

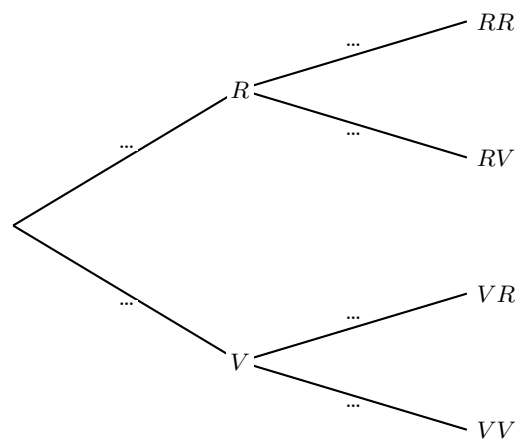
Source bac : D'après Bac Première Spécialité Mathématiques 2026 – Amérique du Nord – exercice 1.

Lors d'une fête foraine, une urne contient 10 boules, rouges ou vertes, indiscernables au toucher. Pour jouer, le joueur paie 1 euro. Il effectue ensuite deux tirages successifs **avec remise**. Il reçoit 3 euros s'il obtient deux boules rouges, 1 euro s'il obtient deux boules vertes et rien dans les autres cas.

Partie A – L'urne contient une boule rouge et neuf boules vertes

On note R_1 l'événement « la première boule tirée est rouge » et R_2 l'événement « la deuxième boule tirée est rouge ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré correspondant à cette expérience.



2. On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

2. a. Donner les valeurs prises par X .

2. b. Montrer que $P(X = -1) = \frac{18}{100}$.

2. c. Construire la loi de probabilité de X .

2. d. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Partie B – La composition de l'urne varie

L'urne contient maintenant n boules rouges et $10 - n$ boules vertes, avec n entier et $0 \leq n \leq 10$. On conserve les mêmes règles du jeu et on note Y le gain algébrique du joueur.

1. Démontrer que

$$E(Y) = \frac{4n^2 - 20n}{100}.$$

2. Pour quelles valeurs de n le jeu est-il équitable ?

Partie C – Une mise inconnue

On revient à l'urne de la partie A : une boule rouge et neuf boules vertes. Les lots restent 3 euros pour deux rouges, 1 euro pour deux vertes et 0 euro sinon, mais la mise vaut maintenant m euros. On note G_m le nouveau gain algébrique.

1. Construire la loi de G_m .

2. Déterminer la mise m pour laquelle le jeu est équitable.

Exercice 23 [BAC] D'après Bac 2026 Cinéma : probabilités conditionnelles, variable aléatoire et répétitions

Source bac : D'après Bac Première Spécialité Mathématiques 2026 – Antilles-Guyane – exercice 2 ; prolongement final original adapté au programme de Première.

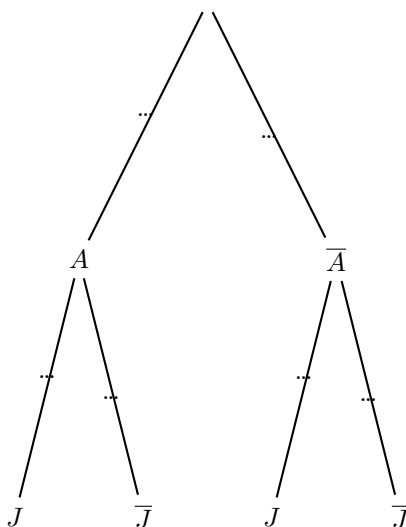
Dans un cinéma, 60 % des spectateurs sont abonnés. Parmi les abonnés, 40 % sont jeunes ; parmi les non-abonnés, 20 % sont jeunes.

On choisit au hasard un spectateur et on note :

- A l'événement : « le spectateur est abonné » ;
- J l'événement : « le spectateur est jeune ».

Partie A – Probabilités conditionnelles

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



2. Calculer $P(A \cap J)$.
3. Montrer que $P(J) = 0,32$.
4. On sait que le spectateur choisi est jeune. Calculer la probabilité qu'il soit abonné.

Partie B – Variable aléatoire

Un non-abonné paie 5 euros. Un abonné non jeune paie 2 euros et un abonné jeune ne paie rien.

On note X la variable aléatoire donnant le prix, en euros, payé par un spectateur choisi au hasard.

1. Déterminer les valeurs prises par X , puis construire sa loi de probabilité.
2. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Partie C – Répétition de l'expérience

On choisit maintenant trois spectateurs de manière indépendante. On appelle « succès » l'événement : « le spectateur paie strictement moins de 5 euros ».

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus parmi les trois spectateurs.

1. Justifier que la probabilité d'un succès vaut 0,60.
2. Déterminer les valeurs prises par Y , puis construire sa loi de probabilité. On justifiera les coefficients utilisés.
3. Calculer la probabilité qu'au moins deux des trois spectateurs paient strictement moins de 5 euros.
4. Calculer $E(Y)$ et interpréter ce résultat.

.....

Source bac : D'après Bac ES/L 2015 – Antilles-Guyane – exercice 3 ; partie sur les répétitions adaptée au programme de Première sans utiliser la loi binomiale.

On sait que :

- 70 % des élèves sont sensibles au développement durable ;
- parmi les élèves sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif ;
- parmi les élèves qui ne sont pas sensibles au développement durable, 10 % pratiquent le tri sélectif.

- S l'événement : « l'élève est sensible au développement durable » ;
- T l'événement : « l'élève pratique le tri sélectif ».

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer la probabilité qu'un élève soit sensible au développement durable et pratique le tri sélectif.
3. Montrer que la probabilité qu'un élève pratique le tri sélectif est égale à 0,59.
4. On choisit un élève qui ne pratique pas le tri sélectif. Calculer la probabilité qu'il soit sensible au développement durable.

On choisit maintenant successivement et de manière indépendante quatre élèves du lycée. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves qui pratiquent le tri sélectif parmi les quatre élèves choisis.

- Déterminer les valeurs prises par X .
- Calculer $P(X = 0)$.
- Calculer $P(X = 1)$ en justifiant le coefficient utilisé.
- En déduire la probabilité qu'au moins deux des quatre élèves choisis pratiquent le tri sélectif.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The dots are small and evenly spaced along each line, creating a guide for handwriting or drawing. There are approximately 20 lines across the page.

↩ **Fin du TD** ↪