

TD – EXERCICES

TD 4

Variables aléatoires

Version corrigée

Sommaire du TD

I	Automatismes du chapitre	2
II	Variable aléatoire et loi de probabilité	4
III	Répétitions d'épreuves de Bernoulli	7
IV	Espérance, linéarité et jeu équitale	11
V	Variance et écart-type	16
VI	Simulation avec Python	19
VII	Premier Bilan	22
VIII	Extraits du Bac 2026	27

Objectifs

- Déterminer les valeurs prises par une variable aléatoire et sa loi de probabilité.
- Traduire un événement à l'aide d'une variable aléatoire.
- Construire la loi du nombre de succès lors de trois ou quatre répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli.
- Calculer et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire ; étudier l'équité d'un jeu.
- Calculer une variance et un écart-type à l'aide de la formule de König–Huygens.
- Utiliser la linéarité de l'espérance, notamment pour déterminer une mise équitale.
- Comprendre et compléter une simulation Python d'une variable aléatoire.

Thème I

Automatismes du chapitre

Exercice 1 [FLASH] Automatismes Questions rapides

Question 1. Une variable aléatoire X prend les valeurs -2 , 1 et 4 avec les probabilités respectives $0,5$, $0,3$ et $0,2$. Calculer $P(X \geq 1)$.



Corrigé

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= P(X = 1) + P(X = 4) \\ &= 0,3 + 0,2 \end{aligned}$$

$$P(X \geq 1) = 0,5$$

Question 2. On sait que $P(X = -1) = 0,25$, $P(X = 2) = 0,45$ et que X ne prend qu'une troisième valeur 5 . Déterminer $P(X = 5)$.



Corrigé

La somme des probabilités d'une loi vaut 1. Ainsi :

$$P(X = 5) = 1 - 0,25 - 0,45$$

$$P(X = 5) = 0,30$$

Question 3. Calculer l'espérance de la variable X de la question 1.



Corrigé

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \times 0,5 + 1 \times 0,3 + 4 \times 0,2 \\ &= -1 + 0,3 + 0,8 \end{aligned}$$

$$E(X) = 0,1$$

Question 4. On donne $E(Y) = 1$ et $E(Y^2) = 7$. Calculer $V(Y)$.



Corrigé

D'après la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= 7 - 1^2 \end{aligned}$$

$$V(Y) = 6$$

Question 5. On répète trois fois une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès $0,4$. Calculer la probabilité d'obtenir exactement deux succès.

**Corrigé**

Il existe trois chemins comportant exactement deux succès : SSE , SES et ESS . Chacun a pour probabilité $0,4^2 \times 0,6$. Donc :

$$P(\text{exactement 2 succès}) = 3 \times 0,4^2 \times 0,6$$

$$P(\text{exactement 2 succès}) = 0,288$$

Question 6. Un jeu donne un lot de 0 euro avec probabilité 0,5, de 4 euros avec probabilité 0,3 et de 10 euros avec probabilité 0,2. Quelle mise rend le jeu équitable ?

**Corrigé**

L'espérance du lot reçu vaut :

$$\begin{aligned} E(L) &= 0 \times 0,5 + 4 \times 0,3 + 10 \times 0,2 \\ &= 1,2 + 2 \end{aligned}$$

$$E(L) = 3,2$$

Pour que le gain algébrique moyen soit nul, la mise doit être égale à l'espérance du lot reçu :

$$3,20 \text{ euros.}$$

Thème II

Variable aléatoire et loi de probabilité

Exercice 2 **[!] Bilan D'une expérience à la loi d'une variable aléatoire**

Une roue comporte 10 secteurs de même taille : 5 secteurs bleus, 3 secteurs verts et 2 secteurs rouges. On fait tourner la roue une fois.

On définit la variable aléatoire X par :

$$X = -2 \text{ si la roue s'arrête sur bleu, } X = 1 \text{ sur vert, } X = 5 \text{ sur rouge.}$$

1. Déterminer $X(\Omega)$.



Corrigé

Les seules valeurs que peut prendre X sont -2 , 1 et 5 . Donc :

$$X(\Omega) = \{-2 ; 1 ; 5\}.$$

2. Décrire par une phrase l'événement $\{X \geq 1\}$, puis calculer sa probabilité.



Corrigé

L'événement $\{X \geq 1\}$ signifie que la roue s'arrête sur un secteur vert ou rouge. Ces événements sont incompatibles, donc :

$$P(X \geq 1) = \frac{3}{10} + \frac{2}{10}$$

$$P(X \geq 1) = \frac{1}{2}$$

3. Construire le tableau donnant la loi de probabilité de X .



Corrigé

Chaque secteur étant équiprobable :

x	-2	1	5
$P(X = x)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

4. Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité.



Corrigé

Les probabilités sont toutes comprises entre 0 et 1 et :

$$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = \frac{10}{10}$$

$$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} + \frac{2}{10} = 1$$

Ainsi, le tableau définit bien une loi de probabilité.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 3, page 5.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 4, page 5.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 3 **[+] Consolidation** Même travail, autres valeurs

Une boîte contient 12 jetons indiscernables au toucher : 6 noirs, 4 blancs et 2 rouges. On tire un jeton au hasard et on définit Y par

$Y = -1$ pour un jeton noir, $Y = 2$ pour un jeton blanc, $Y = 4$ pour un jeton rouge.

1. Déterminer $Y(\Omega)$.



Corrigé

$$Y(\Omega) = \{-1 ; 2 ; 4\}.$$

2. Construire la loi de probabilité de Y .



Corrigé

y	-1	2	4
$P(Y = y)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$

3. Calculer $P(Y > 0)$ et $P(Y \leq 2)$.



Corrigé

$$P(Y > 0) = \frac{4}{12} + \frac{2}{12} = \boxed{\frac{1}{2}},$$

$$P(Y \leq 2) = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} = \boxed{\frac{5}{6}}.$$

Exercice 4 **[*] Approfondissement** Retrouver une loi à partir d'une condition

Une variable aléatoire Z prend les valeurs -2 , 1 et 4 . On pose

$$P(Z = -2) = a, \quad P(Z = 1) = 2a,$$

et on sait que

$$P(Z \geq 1) = \frac{3}{4}.$$

1. Exprimer $P(Z = 4)$ en fonction de a .



Corrigé

La somme des probabilités vaut 1. Ainsi :

$$P(Z = 4) = 1 - a - 2a$$

$$\boxed{P(Z = 4) = 1 - 3a}$$

2. Déterminer a .

**Corrigé**

On a

$$\begin{aligned}P(Z \geq 1) &= P(Z = 1) + P(Z = 4) \\&= 2a + (1 - 3a) \\&= 1 - a.\end{aligned}$$

Or $P(Z \geq 1) = \frac{3}{4}$. Donc :

$$\begin{aligned}1 - a &= \frac{3}{4} \\ \boxed{a} &= \boxed{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

3. En déduire la loi de probabilité de Z .

**Corrigé**

Comme $a = \frac{1}{4}$:

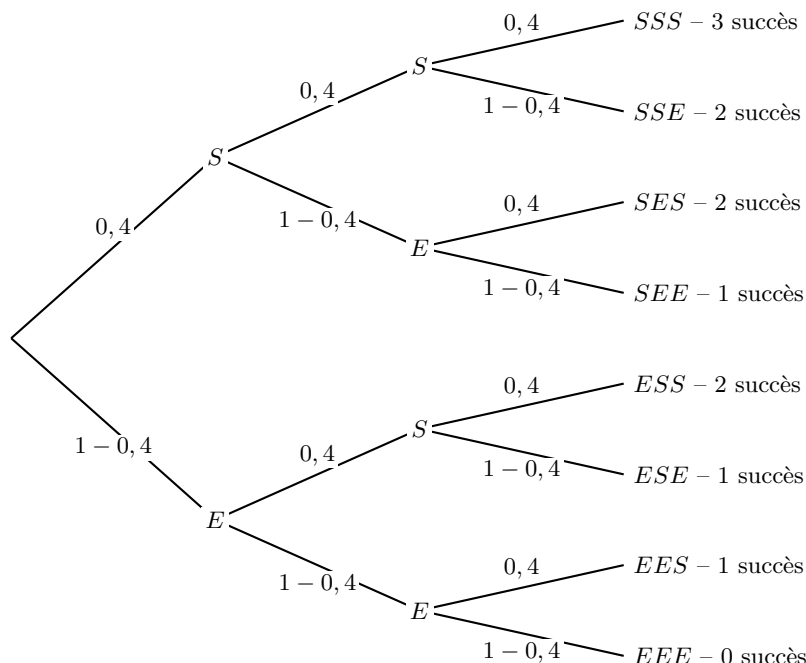
z	-2	1	4
$P(Z = z)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Thème III

Répétitions d'épreuves de Bernoulli

Exercice 5 [!] **Bilan** Trois répétitions : construire la loi du nombre de succès

On répète trois fois, de manière indépendante, une même épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est $p = 0,4$. On note X le nombre de succès obtenus.



1. Déterminer $X(\Omega)$.



Corrigé

Au cours de trois répétitions, on peut obtenir 0, 1, 2 ou 3 succès. Donc :

$$X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}.$$

2. Calculer $P(X = 0)$.



Corrigé

L'événement $\{X = 0\}$ correspond au seul chemin EEE . Par indépendance :

$$P(X = 0) = 0,6^3$$

$$P(X = 0) = 0,216$$

3. Justifier que $P(X = 1) = 3 \times 0,4 \times 0,6^2$, puis calculer cette probabilité.



Corrigé

Les trois chemins donnant exactement un succès sont SEE , ESE et EES . Chacun contient un succès et deux échecs, donc a pour probabilité $0,4 \times 0,6^2$. Ainsi :

$$P(X = 1) = 3 \times 0,4 \times 0,6^2$$

$$P(X = 1) = 0,432$$

4. Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$, puis dresser la loi de X .

**Corrigé**

Il existe trois chemins comportant exactement deux succès. Donc :

$$P(X = 2) = 3 \times 0,4^2 \times 0,6 = 0,288,$$

$$P(X = 3) = 0,4^3 = 0,064.$$

La loi de X est donc :

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,216	0,432	0,288	0,064

5. Calculer $P(X \geq 2)$.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= 0,288 + 0,064 \end{aligned}$$

$$P(X \geq 2) = 0,352$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 6, page 8.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 7, page 9.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 6 **[+]** **Consolidation** Même travail avec $p = 0,7$

On répète trois fois, de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès 0,7. On note Y le nombre de succès obtenus.

1. Déterminer $Y(\Omega)$.

**Corrigé**

$$Y(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}.$$

2. Calculer $P(Y = 0)$ et $P(Y = 3)$.

**Corrigé**

$$P(Y = 0) = 0,3^3 = 0,027,$$

$$P(Y = 3) = 0,7^3 = 0,343.$$

3. Calculer $P(Y = 1)$ puis $P(Y = 2)$ en justifiant le nombre de chemins.

**Corrigé**

Il existe trois chemins comportant exactement un succès et trois chemins comportant exactement deux succès. Donc :

$$P(Y = 1) = 3 \times 0,7 \times 0,3^2 = \boxed{0,189},$$

$$P(Y = 2) = 3 \times 0,7^2 \times 0,3 = \boxed{0,441}.$$

4. Vérifier que la somme des quatre probabilités vaut 1.

**Corrigé**

$$0,027 + 0,189 + 0,441 + 0,343 = 1.$$

La loi obtenue est donc cohérente.

Exercice 7 **[*] Approfondissement** Quatre répétitions : compter sans construire l'arbre entier

On répète quatre fois, de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès $p = 0,6$. On note Z le nombre de succès obtenus.

1. Déterminer $Z(\Omega)$.

**Corrigé**

$$Z(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}.$$

2. Combien de chemins donnent exactement trois succès ? En déduire $P(Z = 3)$.

**Corrigé**

Le seul échec peut occuper l'une des quatre positions. Il existe donc 4 chemins. Chacun a pour probabilité $0,6^3 \times 0,4$. Ainsi :

$$P(Z = 3) = 4 \times 0,6^3 \times 0,4$$

$$\boxed{P(Z = 3) = 0,3456}$$

3. Combien de chemins donnent exactement deux succès ? En déduire $P(Z = 2)$.

**Corrigé**

Les positions des deux succès peuvent être choisies de six manières :

$$SSEE, SESE, SEES, ESSE, ESES, EESS.$$

Donc :

$$P(Z = 2) = 6 \times 0,6^2 \times 0,4^2$$

$$\boxed{P(Z = 2) = 0,3456}$$

4. Calculer la probabilité d'obtenir au moins trois succès.

**Corrigé**

On a

$$\begin{aligned}P(Z \geqslant 3) &= P(Z = 3) + P(Z = 4) \\&= 0,3456 + 0,6^4 \\&= 0,3456 + 0,1296\end{aligned}$$

$$\boxed{P(Z \geqslant 3) = 0,4752}$$

Thème IV

Espérance, linéarité et jeu équitable

Exercice 8 [!] **Bilan Étudier un jeu et déterminer une mise équitable**

Une roue comporte 10 secteurs équiprobables. Cinq secteurs donnent un lot de 0 euro, trois secteurs un lot de 3 euros et deux secteurs un lot de 8 euros. Pour jouer, on paie une mise de 2 euros.

On note X le gain algébrique du joueur, c'est-à-dire

$$X = \text{lot reçu} - \text{mise}.$$

- Déterminer les valeurs prises par X et sa loi de probabilité.

**Corrigé**

Les gains sont respectivement -2 , 1 et 6 euros. Ainsi :

x	-2	1	6
$P(X = x)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

- Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \times \frac{5}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 6 \times \frac{2}{10} \\ &= -1 + 0,3 + 1,2 \end{aligned}$$

$$E(X) = 0,5$$

Sur un grand nombre de parties, le joueur gagne théoriquement en moyenne 0,50 euro par partie. Le jeu est donc favorable au joueur.

- On note L le lot reçu. Exprimer L en fonction de X , puis calculer $E(L)$ à l'aide de la linéarité de l'espérance.

**Corrigé**

Comme la mise initiale est de 2 euros :

$$X = L - 2,$$

donc

$$L = X + 2.$$

Par linéarité :

$$\begin{aligned} E(L) &= E(X + 2) \\ &= E(X) + 2 \\ &= 0,5 + 2 \end{aligned}$$

$$E(L) = 2,5$$

- On remplace la mise de 2 euros par une mise de m euros. On note G_m le nouveau gain algébrique. Exprimer $E(G_m)$ en fonction de m et déterminer la mise qui rend le jeu équitable.

**Corrigé**

On a

$$G_m = L - m.$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(G_m) &= E(L - m) \\ &= E(L) - m \end{aligned}$$

$$\boxed{E(G_m) = 2,5 - m}$$

Le jeu est équitable lorsque $E(G_m) = 0$. Ainsi :

$$2,5 - m = 0$$

$$\boxed{m = 2,5}$$

La mise équitable est donc de 2,50 euros.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 9, page 12.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 10, page 13.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 9 **[+] Consolidation** Même travail, autres lots

Une boîte contient 12 tickets : 6 tickets rapportent 0 euro, 4 tickets rapportent 3 euros et 2 tickets rapportent 9 euros. La mise est de 2 euros. On note Y le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer la loi de Y .

**Corrigé**

Les gains sont -2, 1 et 7 euros. Donc :

y	-2	1	7
$P(Y = y)$	$\frac{6}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$

2. Calculer $E(Y)$ et préciser si le jeu est favorable, équitable ou défavorable au joueur.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} E(Y) &= -2 \times \frac{6}{12} + 1 \times \frac{4}{12} + 7 \times \frac{2}{12} \\ &= -1 + \frac{1}{3} + \frac{7}{6} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{E(Y) = 0,5 > 0.}$$

Le jeu est favorable au joueur.

3. Déterminer la mise équitable en conservant les mêmes lots.

**Corrigé**

L'espérance du lot reçu vaut :

$$\begin{aligned} E(L) &= 0 \times \frac{6}{12} + 3 \times \frac{4}{12} + 9 \times \frac{2}{12} \\ &= 1 + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(L) = 2,5}$$

La mise équitable est donc :

$$\boxed{2,50 \text{ euros.}}$$

Exercice 10 **[*]** Approfondissement Deux méthodes pour retrouver une mise équitable

Une urne contient 20 boules : 12 noires, 6 blanches et 2 rouges. Un joueur mise m euros puis tire une boule au hasard. Il reçoit 0 euro pour une boule noire, 5 euros pour une boule blanche et 10 euros pour une boule rouge. On note G_m le gain algébrique.

1. Construire la loi de G_m .

**Corrigé**

Les gains possibles sont $-m$, $5 - m$ et $10 - m$. Donc :

g	$-m$	$5 - m$	$10 - m$
$P(G_m = g)$	$\frac{12}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{2}{20}$

2. À partir de cette loi, calculer $E(G_m)$ puis déterminer la mise équitable.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} E(G_m) &= (-m) \times \frac{12}{20} + (5 - m) \times \frac{6}{20} + (10 - m) \times \frac{2}{20} \\ &= \frac{-12m + 30 - 6m + 20 - 2m}{20} \\ &= \frac{50 - 20m}{20} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(G_m) = 2,5 - m}$$

Le jeu est équitable si $E(G_m) = 0$, donc :

$$\boxed{m = 2,5.}$$

3. Retrouver ce résultat en introduisant la variable aléatoire L donnant le lot reçu et en utilisant la linéarité de l'espérance.

**Corrigé**

On calcule d'abord :

$$\begin{aligned} E(L) &= 0 \times \frac{12}{20} + 5 \times \frac{6}{20} + 10 \times \frac{2}{20} \\ &= \frac{30 + 20}{20} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(L) = 2,5}$$

Or $G_m = L - m$. Par linéarité :

$$\begin{aligned} E(G_m) &= E(L) - m \\ &= 2,5 - m. \end{aligned}$$

On retrouve donc la mise équitable :

$$\boxed{m = 2,5.}$$

Exercice 11 **[+] Consolidation Une mise inconnue : reconstruire la loi**

Une boîte contient 15 tickets indiscernables au toucher : 8 tickets ne rapportent rien, 5 tickets rapportent 4 euros et 2 tickets rapportent 10 euros. Pour jouer, on paie une mise de m euros. On note G_m le gain algébrique du joueur.

1. Construire la loi de G_m .

**Corrigé**

Les gains possibles sont $-m$, $4 - m$ et $10 - m$. Ainsi :

g	$-m$	$4 - m$	$10 - m$
$P(G_m = g)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{2}{15}$

2. Calculer $E(G_m)$ en fonction de m .

**Corrigé**

$$\begin{aligned} E(G_m) &= (-m) \times \frac{8}{15} + (4 - m) \times \frac{5}{15} + (10 - m) \times \frac{2}{15} \\ &= \frac{-8m + 20 - 5m + 20 - 2m}{15} \\ &= \frac{40 - 15m}{15} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(G_m) = \frac{8}{3} - m}$$

3. Déterminer la mise qui rend le jeu équitable.

**Corrigé**

Le jeu est équitable lorsque $E(G_m) = 0$. On résout :

$$\frac{8}{3} - m = 0$$

$$\boxed{m = \frac{8}{3}}$$

La mise équitable est donc de $\boxed{\frac{8}{3}}$ euros, soit environ 2,67 euros.

Exercice 12 [*] Approfondissement Équité et équation du second degré

Une épreuve de Bernoulli a une probabilité de succès p , avec $0 < p < 1$. On la répète deux fois de manière indépendante. Le joueur paie 1 euro pour participer.

- s'il obtient deux succès, il reçoit 4 euros ;
- s'il obtient deux échecs, il reçoit 1 euro ;
- s'il obtient exactement un succès, il ne reçoit rien.

On note X le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer les trois valeurs prises par X et leurs probabilités.



Corrigé

Deux succès donnent le gain $4 - 1 = 3$, deux échecs le gain $1 - 1 = 0$ et exactement un succès le gain $0 - 1 = -1$. Par indépendance :

$$P(X = 3) = p^2, \quad P(X = 0) = (1 - p)^2,$$

et les deux chemins SE et ES donnent :

$$P(X = -1) = 2p(1 - p).$$

2. Montrer que

$$E(X) = 5p^2 - 2p.$$



Corrigé

$$\begin{aligned} E(X) &= 3p^2 + 0 \times (1 - p)^2 - 1 \times 2p(1 - p) \\ &= 3p^2 - 2p + 2p^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = 5p^2 - 2p}$$

3. Pour quelle valeur de p le jeu est-il équitable ?



Corrigé

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} 5p^2 - 2p &= 0 \\ p(5p - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Donc $p = 0$ ou $p = \frac{2}{5}$. Or $0 < p < 1$, donc :

$$\boxed{p = \frac{2}{5}}.$$

Thème V

Variance et écart-type

Exercice 13 **[!] Bilan** Calculer et interpréter une dispersion

Une variable aléatoire X a pour loi :

x	-2	0	2	4
$P(X = x)$	0,4	0,3	0,2	0,1

1. Calculer $E(X)$.



Corrigé

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \times 0,4 + 0 \times 0,3 + 2 \times 0,2 + 4 \times 0,1 \\ &= -0,8 + 0,4 + 0,4 \end{aligned}$$

$$E(X) = 0$$

2. Calculer $E(X^2)$.



Corrigé

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-2)^2 \times 0,4 + 0^2 \times 0,3 + 2^2 \times 0,2 + 4^2 \times 0,1 \\ &= 4 \times 0,4 + 4 \times 0,2 + 16 \times 0,1 \\ &= 1,6 + 0,8 + 1,6 \end{aligned}$$

$$E(X^2) = 4$$

3. En déduire $V(X)$ à l'aide de la formule de König-Huygens.



Corrigé

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 4 - 0^2 \end{aligned}$$

$$V(X) = 4$$

4. Calculer $\sigma(X)$ et interpréter cette valeur.



Corrigé

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \\ &= \sqrt{4} \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = 2$$

Les valeurs de X sont dispersées autour de l'espérance $E(X) = 0$ avec un écart-type égal à 2 unités.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 14, page 17.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 15, page 18.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 14 **[+]** Consolidation Même calcul avec une autre loi

Une variable aléatoire Y a pour loi :

y	0	2	4
$P(Y = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1. Calculer $E(Y)$ puis $E(Y^2)$.



Corrigé

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= 0 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} = \boxed{2}, \\
 E(Y^2) &= 0^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{2} + 4^2 \times \frac{1}{4} \\
 &= 2 + 4 \\
 &= \boxed{6}.
 \end{aligned}$$

2. Calculer $V(Y)$ puis $\sigma(Y)$.



Corrigé

$$\begin{aligned}
 V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\
 &= 6 - 2^2
 \end{aligned}$$

$$V(Y) = \boxed{2}$$

Puis :

$$\sigma(Y) = \sqrt{2}.$$

Ainsi :

$$\sigma(Y) = \sqrt{2} \approx \boxed{1,41}.$$

Exercice 15 [*] Approfondissement Deux jeux de même espérance mais de risques différents

On compare deux jeux dont le gain algébrique est modélisé par les variables A et B .

a	-2	2
$P(A = a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

b	-5	1
$P(B = b)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

1. Montrer que les deux jeux ont la même espérance.



Corrigé

$$E(A) = -2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \boxed{0},$$

$$E(B) = -5 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{5}{6} = \frac{-5 + 5}{6} = \boxed{0}.$$

Les deux jeux sont donc équitables.

2. Calculer $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$.



Corrigé

Comme les deux espérances sont nulles :

$$V(A) = E(A^2) = 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = 4,$$

$$\boxed{\sigma(A) = 2}$$

Pour B :

$$\begin{aligned} V(B) &= E(B^2) \\ &= 25 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{30}{6} = 5, \end{aligned}$$

$$\boxed{\sigma(B) = \sqrt{5}}$$

3. Quel jeu présente la dispersion la plus importante ?



Corrigé

On a

$$\sqrt{5} > 2.$$

Donc :

$$\boxed{\sigma(B) > \sigma(A)}.$$

Le jeu B présente une dispersion plus importante autour de l'espérance commune 0 ; il est donc plus variable.

Thème VI

Simulation avec Python

Exercice 16 [!] **Bilan** Simuler une variable aléatoire et estimer son espérance

On considère une variable aléatoire X telle que

$$P(X = -2) = 0,5, \quad P(X = 1) = 0,3, \quad P(X = 6) = 0,2.$$

On souhaite simuler une réalisation de X avec la fonction `random()`.

```
from random import random

def tirage_X():
    tirage = random()
    if tirage < 0.5:
        return -2
    elif tirage < 0.8:
        return 1
    else:
        return 6
```

1. Expliquer pourquoi la condition `tirage < 0.5` simule la valeur -2 avec probabilité $0,5$.

**Corrigé**

La fonction `random()` fournit un réel aléatoire dans $[0 ; 1[$. L'intervalle $[0 ; 0,5[$ a une longueur égale à $0,5$. Ainsi, la condition `tirage < 0.5` se réalise avec probabilité $0,5$.

2. Expliquer pourquoi le second test correspond à une probabilité égale à $0,3$.

**Corrigé**

Le second cas est obtenu lorsque

$$0,5 \leq \text{tirage} < 0,8.$$

L'intervalle $[0,5 ; 0,8[$ a pour longueur

$$0,8 - 0,5 = 0,3.$$

La valeur 1 est donc simulée avec probabilité $0,3$.

3. Calculer théoriquement $E(X)$.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \times 0,5 + 1 \times 0,3 + 6 \times 0,2 \\ &= -1 + 0,3 + 1,2 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = 0,5}$$

4. On répète `tirage_X()` un très grand nombre de fois et on calcule la moyenne des valeurs obtenues. Autour de quelle valeur s'attend-on à trouver cette moyenne ?

**Corrigé**

Sur un grand nombre de simulations, la moyenne expérimentale des valeurs obtenues est généralement proche de

l'espérance théorique. On s'attend donc à une moyenne proche de

0,5.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 17, page 20.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 18, page 21.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 17 **[+]** Consolidation Compléter une simulation et calculer une moyenne

On souhaite simuler n réalisations de la variable X de l'exercice précédent.

```
def moyenne_simulee(n):  
    somme = 0  
    for i in range(n):  
        somme = .....  
    return .....
```

1. Compléter les deux lignes manquantes.



Corrigé

Une complétion correcte est :

```
somme = somme + tirage_X()  
return somme / n
```

La première ligne ajoute chaque nouvelle réalisation de X à la somme ; la seconde renvoie la moyenne des n valeurs simulées.

2. Interpréter le résultat de `moyenne_simulee(10000)`.



Corrigé

La fonction renvoie la moyenne de 10 000 réalisations indépendantes simulées de X . Cette moyenne doit généralement être proche de l'espérance théorique $E(X) = 0,5$.

Exercice 18 [*] **Approfondissement Moyennes d'échantillons**

Pour la variable X précédente, on admet que $E(X) = 0,5$ et $\sigma(X) \approx 3,04$. Pour un échantillon de taille n , on note m la moyenne observée. Le cours propose d'expérimenter la relation

$$|m - E(X)| \leq \frac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}}.$$

1. Pour $n = 100$, calculer la borne $\frac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}} &\approx \frac{2 \times 3,04}{\sqrt{100}} \\ &= \frac{6,08}{10} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}} \approx 0,608}$$

2. Pour $n = 10\,000$, refaire le calcul.

**Corrigé**

$$\frac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}} \approx \frac{6,08}{100}$$

$$\boxed{\frac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}} \approx 0,0608}$$

3. Expliquer l'effet de l'augmentation de la taille de l'échantillon sur la moyenne expérimentale.

**Corrigé**

Lorsque n augmente, $\sqrt{n}$ augmente et la quantité $\frac{2\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ diminue. Les moyennes expérimentales ont donc tendance à être davantage concentrées autour de l'espérance $E(X)$.

Thème VII

Premier Bilan

Exercice 19 **[!] Bilan Sujet type complet**

Une urne contient 10 boules : 5 bleues, 3 vertes et 2 rouges. Un joueur tire une boule au hasard. Il reçoit 0 euro si elle est bleue, 4 euros si elle est verte et 9 euros si elle est rouge. La mise initiale est de 2 euros. On note X le gain algébrique du joueur.

1. Déterminer les valeurs prises par X et construire sa loi.



Corrigé

Les gains sont -2 , 2 et 7 euros. Donc :

x	-2	2	7
$P(X = x)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

2. Calculer $P(X > 0)$.



Corrigé

$$\begin{aligned} P(X > 0) &= P(X = 2) + P(X = 7) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{2}{10} \end{aligned}$$

$$P(X > 0) = \frac{1}{2}$$

3. Calculer $E(X)$ puis interpréter le résultat.



Corrigé

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \times \frac{5}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 7 \times \frac{2}{10} \\ &= -1 + 0,6 + 1,4 \end{aligned}$$

$$E(X) = 1$$

Sur un grand nombre de parties, le joueur gagne théoriquement en moyenne 1 euro par partie. Le jeu est donc favorable au joueur.

4. Calculer $E(X^2)$, puis $V(X)$ et $\sigma(X)$.



Corrigé

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-2)^2 \times \frac{5}{10} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 7^2 \times \frac{2}{10} \\ &= 2 + 1,2 + 9,8 \end{aligned}$$

$$E(X^2) = 13$$

D'après la formule de König–Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 13 - 1^2 \end{aligned}$$

$$V(X) = 12$$

Donc :

$$\sigma(X) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3,46.$$

5. Le jeu est répété trois fois de manière indépendante. On appelle « succès » l'événement « le joueur obtient un gain strictement positif » et on note Y le nombre de succès obtenus.

5. a. Justifier que la probabilité d'un succès vaut $\frac{1}{2}$.



Corrigé

D'après la question 2 :

$$P(X > 0) = \frac{1}{2}.$$

La probabilité d'un succès vaut donc $p = \frac{1}{2}$.

5. b. Déterminer la loi de Y en justifiant les coefficients utilisés.



Corrigé

Les trois parties sont indépendantes et $p = \frac{1}{2}$. Les nombres de chemins donnant 0, 1, 2 et 3 succès sont respectivement 1, 3, 3 et 1. Ainsi :

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

6. On conserve les mêmes lots, mais la mise de 2 euros est remplacée par une mise de m euros. On note G_m le nouveau gain algébrique.

6. a. Construire la loi de G_m .



Corrigé

Les gains deviennent $-m$, $4 - m$ et $9 - m$. Ainsi :

g	$-m$	$4 - m$	$9 - m$
$P(G_m = g)$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

6. b. Calculer $E(G_m)$ en fonction de m , puis déterminer la mise qui rend le jeu équitable.

**Corrigé**

À partir de la loi :

$$\begin{aligned} E(G_m) &= (-m) \times \frac{5}{10} + (4-m) \times \frac{3}{10} + (9-m) \times \frac{2}{10} \\ &= \frac{-5m + 12 - 3m + 18 - 2m}{10} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(G_m) = 3 - m}$$

Le jeu est équitable lorsque $E(G_m) = 0$. Donc :

$$3 - m = 0$$

$$\boxed{m = 3}$$

La mise équitable est de 3 euros.

6. c. Retrouver rapidement ce résultat avec la linéarité de l'espérance.

**Corrigé**

Si L désigne le lot reçu, alors, pour la mise initiale de 2 euros :

$$X = L - 2,$$

donc $L = X + 2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} E(L) &= E(X) + 2 \\ &= 1 + 2 \\ &= 3. \end{aligned}$$

Avec une mise m , $G_m = L - m$. Par linéarité :

$$E(G_m) = E(L) - m = 3 - m.$$

On retrouve donc :

$$\boxed{m = 3 \text{ euros.}}$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 20, page 25.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 21, page 26.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 20 **[+] Consolidation**

Une urne contient 12 boules : 6 bleues, 4 vertes et 2 rouges. Le joueur reçoit respectivement 0, 3 ou 9 euros et paie une mise de 2 euros. On note X son gain algébrique.

1. Construire la loi de X .

**Corrigé**

x	-2	1	7
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2. Calculer $E(X)$.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 7 \times \frac{1}{6} \\ &= -1 + \frac{2}{6} + \frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{1}{2}$$

3. Calculer $V(X)$ puis $\sigma(X)$.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 4 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 49 \times \frac{1}{6} \\ &= 2 + \frac{2}{6} + \frac{49}{6} \\ &= \frac{63}{6} = \frac{21}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} V(X) &= \frac{21}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{42}{4} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$V(X) = \frac{41}{4}$$

Donc :

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{41}}{2} \approx 3,20.$$

4. Déterminer la mise équitable en conservant les mêmes lots.

**Corrigé**

L'espérance du lot reçu vaut $E(L) = E(X) + 2 = 0,5 + 2 = 2,5$. La mise équitable est donc

$$2,50 \text{ euros.}$$

Exercice 21 [*] **Approfondissement Une donnée inconnue dans la loi**

Un jeu a trois gains possibles : -2 , 1 et 5 euros. On note X le gain algébrique. On sait que

$$P(X = -2) = p, \quad P(X = 1) = \frac{1}{2},$$

et que le jeu est équitable.

1. Exprimer $P(X = 5)$ en fonction de p .

**Corrigé**

La somme des probabilités vaut 1. Donc :

$$P(X = 5) = 1 - p - \frac{1}{2}$$

$$P(X = 5) = \frac{1}{2} - p$$

2. Traduire l'équité du jeu par une équation portant sur p .

**Corrigé**

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X) = 0$. Or :

$$E(X) = -2p + 1 \times \frac{1}{2} + 5 \left(\frac{1}{2} - p \right).$$

Ainsi :

$$-2p + \frac{1}{2} + 5 \left(\frac{1}{2} - p \right) = 0.$$

3. Déterminer p puis la loi de X .

**Corrigé**

$$\begin{aligned} -2p + \frac{1}{2} + \frac{5}{2} - 5p &= 0 \\ 3 - 7p &= 0 \end{aligned}$$

$$p = \frac{3}{7}$$

Alors :

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{7} \\ &= \frac{7}{14} - \frac{6}{14} \end{aligned}$$

$$P(X = 5) = \frac{1}{14}$$

La loi est donc :

x	-2	1	5
$P(X = x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{14}$

Thème VIII

En route vers le BAC

Les exercices ci-dessous sont adaptés d'exercices officiels de l'épreuve anticipée de mathématiques 2026. Ils sont recentrés sur les notions de ce chapitre.

Exercice 22 [BAC] D'après Bac 2026 Amérique du Nord 2026 – exercice complet

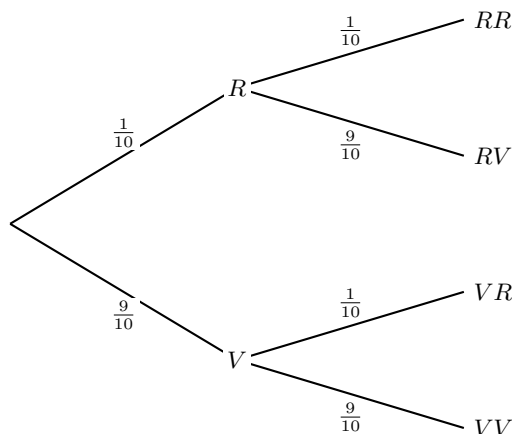
Source bac : D'après Bac Première Spécialité Mathématiques 2026 – Amérique du Nord – exercice 1.

Lors d'une fête foraine, une urne contient 10 boules, rouges ou vertes, indiscernables au toucher. Pour jouer, le joueur paie 1 euro. Il effectue ensuite deux tirages successifs **avec remise**. Il reçoit 3 euros s'il obtient deux boules rouges, 1 euro s'il obtient deux boules vertes et rien dans les autres cas.

Partie A – L'urne contient une boule rouge et neuf boules vertes

On note R_1 l'événement « la première boule tirée est rouge » et R_2 l'événement « la deuxième boule tirée est rouge ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré correspondant à cette expérience.


Corrigé

À chaque tirage :

$$P(R) = \frac{1}{10} \quad \text{et} \quad P(V) = \frac{9}{10}.$$

La boule étant remise après le premier tirage, les probabilités du second tirage sont identiques à celles du premier.

2. On note X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

2. a. Donner les valeurs prises par X .


Corrigé

- deux rouges : le joueur reçoit 3 euros et a payé 1 euro, donc le gain vaut 2 ;
- deux vertes : il reçoit 1 euro, donc le gain vaut 0 ;
- une boule de chaque couleur : il ne reçoit rien, donc le gain vaut -1 .

Ainsi :

$$X(\Omega) = \{-1 ; 0 ; 2\}.$$

2. b. Montrer que $P(X = -1) = \frac{18}{100}$.

**Corrigé**

Le gain -1 correspond aux deux chemins RV et VR . Ainsi :

$$P(X = -1) = \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{10}$$

$$P(X = -1) = \frac{18}{100}$$

2. c. Construire la loi de probabilité de X .

**Corrigé**

$$P(X = 2) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100},$$

$$P(X = 0) = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100}.$$

Donc :

x	-1	0	2
$P(X = x)$	$\frac{18}{100}$	$\frac{81}{100}$	$\frac{1}{100}$

2. d. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} E(X) &= -1 \times \frac{18}{100} + 0 \times \frac{81}{100} + 2 \times \frac{1}{100} \\ &= \frac{-18 + 2}{100} \end{aligned}$$

$$E(X) = -0,16$$

Sur un grand nombre de parties, le joueur perd théoriquement en moyenne 0,16 euro par partie. Le jeu est donc défavorable au joueur.

Partie B – La composition de l'urne varie

L'urne contient maintenant n boules rouges et $10 - n$ boules vertes, avec n entier et $0 \leq n \leq 10$. On conserve les mêmes règles du jeu et on note Y le gain algébrique du joueur.

1. Démontrer que

$$E(Y) = \frac{4n^2 - 20n}{100}.$$

**Corrigé**

On a :

$$P(R) = \frac{n}{10} \quad \text{et} \quad P(V) = \frac{10 - n}{10}.$$

Les gains sont toujours 2 pour RR , 0 pour VV et -1 lorsqu'une boule de chaque couleur est obtenue. Ainsi :

$$\begin{aligned}P(Y = 2) &= \left(\frac{n}{10}\right)^2 = \frac{n^2}{100}, \\P(Y = 0) &= \left(\frac{10-n}{10}\right)^2 = \frac{(10-n)^2}{100}, \\P(Y = -1) &= 2 \times \frac{n}{10} \times \frac{10-n}{10} = \frac{2n(10-n)}{100}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}E(Y) &= 2 \times \frac{n^2}{100} - \frac{2n(10-n)}{100} \\&= \frac{2n^2 - 20n + 2n^2}{100}\end{aligned}$$

$$E(Y) = \frac{4n^2 - 20n}{100}$$

2. Pour quelles valeurs de n le jeu est-il équitable ?



Corrigé

Le jeu est équitable lorsque $E(Y) = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{4n^2 - 20n}{100} &= 0 \\4n^2 - 20n &= 0 \\4n(n - 5) &= 0.\end{aligned}$$

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul. Donc :

$$n = 0 \quad \text{ou} \quad n = 5.$$

Ces deux valeurs appartiennent à $\{0, 1, \dots, 10\}$. Ainsi :

$$n = 0 \text{ ou } n = 5.$$

Partie C – Une mise inconnue

On revient à l'urne de la partie A : une boule rouge et neuf boules vertes. Les lots restent 3 euros pour deux rouges, 1 euro pour deux vertes et 0 euro sinon, mais la mise vaut maintenant m euros. On note G_m le nouveau gain algébrique.

1. Construire la loi de G_m .



Corrigé

Les gains sont $3 - m$, $1 - m$ et $-m$. Les probabilités sont celles calculées dans la partie A :

g	$-m$	$1 - m$	$3 - m$
$P(G_m = g)$	$\frac{18}{100}$	$\frac{81}{100}$	$\frac{1}{100}$

2. Déterminer la mise m pour laquelle le jeu est équitable.



Corrigé

$$\begin{aligned}
 E(G_m) &= (-m) \times \frac{18}{100} + (1-m) \times \frac{81}{100} + (3-m) \times \frac{1}{100} \\
 &= \frac{-18m + 81 - 81m + 3 - m}{100} \\
 &= \frac{84 - 100m}{100}
 \end{aligned}$$

$$E(G_m) = 0,84 - m$$

Le jeu est équitable lorsque $E(G_m) = 0$. Donc :

$$m = 0,84 \text{ euro.}$$

Exercice 23 [BAC] D'après Bac 2026 Cinéma : probabilités conditionnelles, variable aléatoire et répétitions

Source bac : D'après Bac Première Spécialité Mathématiques 2026 – Antilles-Guyane – exercice 2 ; prolongement final original adapté au programme de Première.

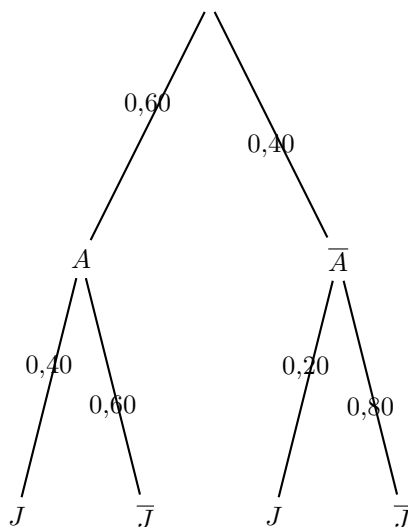
Dans un cinéma, 60 % des spectateurs sont abonnés. Parmi les abonnés, 40 % sont jeunes ; parmi les non-abonnés, 20 % sont jeunes.

On choisit au hasard un spectateur et on note :

- A l'événement : « le spectateur est abonné » ;
- J l'événement : « le spectateur est jeune ».

Partie A – Probabilités conditionnelles

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant.



Corrigé

On a :

$$P(A) = 0,60 \quad \text{et} \quad P(\bar{A}) = 0,40.$$

De plus :

$$P_A(J) = 0,40, \quad P_A(\bar{J}) = 0,60,$$

et

$$P_{\bar{A}}(J) = 0,20, \quad P_{\bar{A}}(\bar{J}) = 0,80.$$

2. Calculer $P(A \cap J)$.



Corrigé

D'après la règle du produit le long d'une branche :

$$\begin{aligned} P(A \cap J) &= P(A) \times P_A(J) \\ &= 0,60 \times 0,40 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(A \cap J) = 0,24}$$

3. Montrer que $P(J) = 0,32$.



Corrigé

Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(J) &= P(A \cap J) + P(\bar{A} \cap J) \\ &= P(A) \times P_A(J) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(J) \\ &= 0,60 \times 0,40 + 0,40 \times 0,20 \\ &= 0,24 + 0,08 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(J) = 0,32}$$

4. On sait que le spectateur choisi est jeune. Calculer la probabilité qu'il soit abonné.



Corrigé

La probabilité cherchée est $P_J(A)$. Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} P_J(A) &= \frac{P(A \cap J)}{P(J)} \\ &= \frac{0,24}{0,32} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_J(A) = 0,75}$$

Partie B – Variable aléatoire

Un non-abonné paie 5 euros. Un abonné non jeune paie 2 euros et un abonné jeune ne paie rien.
On note X la variable aléatoire donnant le prix, en euros, payé par un spectateur choisi au hasard.

1. Déterminer les valeurs prises par X , puis construire sa loi de probabilité.



Corrigé

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs :

$$\boxed{X(\Omega) = \{0 ; 2 ; 5\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(A \cap J) \\ &= 0,24, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(A \cap \bar{J}) \\ &= 0,60 \times 0,60 \\ &= 0,36, \end{aligned}$$

et

$$P(X = 5) = P(\bar{A}) = 0,40.$$

La loi de X est donc :

x	0	2	5
$P(X = x)$	0,24	0,36	0,40

2. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.



Corrigé

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,24 + 2 \times 0,36 + 5 \times 0,40 \\ &= 0,72 + 2 \end{aligned}$$

$$E(X) = 2,72$$

Sur un grand nombre de spectateurs choisis dans les mêmes conditions, le prix moyen théorique payé est donc de

$$2,72 \text{ euros par spectateur.}$$

Partie C – Répétition de l'expérience

On choisit maintenant trois spectateurs de manière indépendante. On appelle « succès » l'événement : « le spectateur paie strictement moins de 5 euros ».

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus parmi les trois spectateurs.

1. Justifier que la probabilité d'un succès vaut 0,60.



Corrigé

Un spectateur paie strictement moins de 5 euros exactement lorsqu'il est abonné. Ainsi :

$$p = P(A) = 0,60.$$

2. Déterminer les valeurs prises par Y , puis construire sa loi de probabilité. On justifiera les coefficients utilisés.



Corrigé

On peut obtenir 0, 1, 2 ou 3 succès. Ainsi :

$$Y(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}.$$

La probabilité d'un succès vaut 0,60 et celle d'un échec vaut 0,40.

- Aucun succès :

$$P(Y = 0) = 0,40^3 = 0,064.$$

- Exactement un succès : il existe trois positions possibles pour l'unique succès. Donc :

$$P(Y = 1) = 3 \times 0,60 \times 0,40^2 = 0,288.$$

- Exactement deux succès : il existe trois positions possibles pour l'unique échec. Donc :

$$P(Y = 2) = 3 \times 0,60^2 \times 0,40 = 0,432.$$

- Trois succès :

$$P(Y = 3) = 0,60^3 = 0,216.$$

La loi de Y est donc :

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	0,064	0,288	0,432	0,216

3. Calculer la probabilité qu'au moins deux des trois spectateurs paient strictement moins de 5 euros.



Corrigé

L'événement demandé est $Y \geq 2$. Donc :

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= P(Y = 2) + P(Y = 3) \\ &= 0,432 + 0,216 \end{aligned}$$

$$P(Y \geq 2) = 0,648$$

4. Calculer $E(Y)$ et interpréter ce résultat.



Corrigé

D'après la loi de Y :

$$\begin{aligned} E(Y) &= 0 \times 0,064 + 1 \times 0,288 + 2 \times 0,432 + 3 \times 0,216 \\ &= 0,288 + 0,864 + 0,648 \end{aligned}$$

$$E(Y) = 1,8$$

Sur un grand nombre de groupes de trois spectateurs, on compte donc en moyenne

$$1,8 \text{ spectateur payant moins de 5 euros par groupe de trois.}$$

Exercice 24

[BAC] D'après Bac 2015 Développement durable : probabilités conditionnelles et répétitions

Source bac : D'après Bac ES/L 2015 – Antilles-Guyane – exercice 3 ; partie sur les répétitions adaptée au programme de Première sans utiliser la loi binomiale.

Une enquête est réalisée auprès des élèves d'un lycée afin de connaître leur sensibilité au développement durable et leur pratique du tri sélectif.

On sait que :

- 70 % des élèves sont sensibles au développement durable ;
- parmi les élèves sensibles au développement durable, 80 % pratiquent le tri sélectif ;
- parmi les élèves qui ne sont pas sensibles au développement durable, 10 % pratiquent le tri sélectif.

On choisit un élève au hasard dans le lycée et on note :

- S l'événement : « l'élève est sensible au développement durable » ;
- T l'événement : « l'élève pratique le tri sélectif ».

Partie A – Probabilités conditionnelles

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

**Corrigé**

On a :

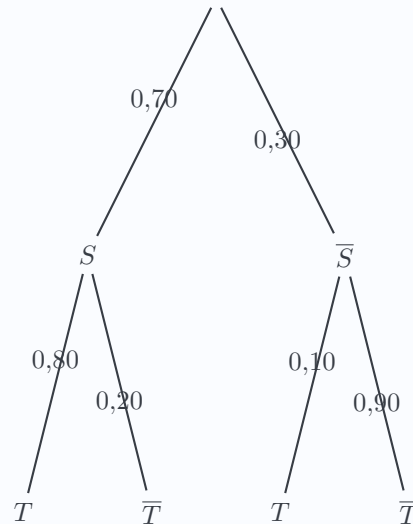
$$P(S) = 0,70 \quad \text{et} \quad P(\bar{S}) = 0,30.$$

De plus :

$$P_S(T) = 0,80, \quad P_S(\bar{T}) = 0,20,$$

et

$$P_{\bar{S}}(T) = 0,10, \quad P_{\bar{S}}(\bar{T}) = 0,90.$$



2. Calculer la probabilité qu'un élève soit sensible au développement durable et pratique le tri sélectif.

**Corrigé**

La probabilité cherchée est $P(S \cap T)$. D'après la règle du produit le long d'une branche :

$$\begin{aligned} P(S \cap T) &= P(S) \times P_S(T) \\ &= 0,70 \times 0,80 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(S \cap T) = 0,56}$$

3. Montrer que la probabilité qu'un élève pratique le tri sélectif est égale à 0,59.

**Corrigé**

Les événements S et $\bar{S}$ forment une partition de l'univers. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(S \cap T) + P(\bar{S} \cap T) \\ &= P(S) \times P_S(T) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(T) \\ &= 0,70 \times 0,80 + 0,30 \times 0,10 \\ &= 0,56 + 0,03 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(T) = 0,59}$$

4. On choisit un élève qui ne pratique pas le tri sélectif. Calculer la probabilité qu'il soit sensible au développement durable.

**Corrigé**

On cherche $P_{\overline{T}}(S)$. On a :

$$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - 0,59 = 0,41.$$

De plus :

$$P(S \cap \overline{T}) = 0,70 \times 0,20 = 0,14.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P_{\overline{T}}(S) &= \frac{P(S \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} \\ &= \frac{0,14}{0,41} \\ &\approx 0,341. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{P_{\overline{T}}(S) \approx 0,34.}$$

Partie B – Répétition de l'expérience et variable aléatoire

On choisit maintenant successivement et de manière indépendante quatre élèves du lycée. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves qui pratiquent le tri sélectif parmi les quatre élèves choisis.

1. Déterminer les valeurs prises par X .

**Corrigé**

Parmi quatre élèves, le nombre d'élèves pratiquant le tri sélectif peut être égal à 0, 1, 2, 3 ou 4. Ainsi :

$$\boxed{X(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}.}$$

2. Calculer $P(X = 0)$.

**Corrigé**

La probabilité qu'un élève ne pratique pas le tri sélectif vaut

$$1 - 0,59 = 0,41.$$

Les quatre choix étant indépendants :

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 0,41^4 \\ &\approx 0,0283. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{P(X = 0) \approx 0,03.}$$

3. Calculer $P(X = 1)$ en justifiant le coefficient utilisé.

**Corrigé**

Il existe quatre positions possibles pour l'unique élève pratiquant le tri sélectif. Chaque configuration a pour probabilité

$$0,59 \times 0,41^3.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= 4 \times 0,59 \times 0,41^3 \\ &\approx 0,1627. \end{aligned}$$

Donc :

$$P(X = 1) \approx 0,16.$$

4. En déduire la probabilité qu'au moins deux des quatre élèves choisis pratiquent le tri sélectif.



Corrigé

L'événement « au moins deux élèves pratiquent le tri sélectif » est $X \geq 2$. Son événement contraire est $X \leq 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - 0,41^4 - 4 \times 0,59 \times 0,41^3 \\ &\approx 0,8091. \end{aligned}$$

Donc :

$$P(X \geq 2) \approx 0,81.$$

↩ **Fin du TD** ↪