

TD – EXERCICES

TD 2

Suites : généralités

Version sujet – Version imprimable

Sommaire du TD

I	Des listes Python aux suites	2
II	Définitions et modes de génération	3
III	Représentation graphique d'une suite	4
IV	Sens de variation d'une suite	5
V	Python : calculer des termes et chercher un seuil	8
VI	Première intuition de la notion de limite	8
VII	Bilan - Pour Préparer le Test	9
VIII	Automatismes du chapitre – Pour préparer le test	11
IX	Extraits du Bac 2026	13
X	Ouverture internationale – SAT	14
XI	Now We Can Talk : pour aller plus loin	15

Objectifs

- Passer d'une liste Python à la notation d'une suite et calculer des termes.
- Reconnaître les modes de génération : explicite, récurrence, algorithme, motif.
- Représenter graphiquement les termes d'une suite.
- Étudier le sens de variation à l'aide de $u_{n+1} - u_n$.
- Écrire ou compléter un programme Python pour calculer des termes ou chercher un seuil.
- Conjecturer, sur des exemples simples, le comportement d'une suite pour de grandes valeurs de n .

Thème I

Des listes Python aux suites

Exercice 1 **[!]** Bilan Lire une liste comme une suite

On exécute le programme suivant :

```
L = []
for n in range(6):
    L.append(3*n + 2)
print(L)
```

1. Donner la liste affichée.
2. On note u_n le terme de rang n . Donner u_0 , u_2 et u_5 .
3. Exprimer u_n en fonction de n .

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 2, page 2.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 3, page 2.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 2 **[+]** Consolidation Même travail, autres valeurs

```
L = []
for n in range(5):
    L.append(4*n - 1)
print(L)
```

1. Donner la liste affichée.
2. Donner v_0 , v_2 et v_4 .
3. Exprimer v_n en fonction de n .

Exercice 3 **[*]** Approfondissement Construire une liste à partir d'une récurrence

Compléter le programme afin qu'il construise la liste $[u_0, u_1, \dots, u_6]$ de la suite définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

```
u = 2
L = [u]
for n in range(6):
    u = .....
    L.append(.....)
print(L)
```

Thème II

Définitions et modes de génération

Exercice 4 [!] **Bilan** Explicite ou par récurrence ?

1. Pour $u_n = 7n + 1$, calculer les quatre premiers termes.

2. Pour la suite définie par

$$v_0 = 2, \quad v_{n+1} = 2v_n + 1,$$

calculer v_1 , v_2 et v_3 .

3. Pour chacune des deux suites, préciser son mode de génération.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 5, page 3.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 6, page 3.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 5 [+] **Consolidation** Même travail, autres valeurs

1. Pour $a_n = n^2 - 2n + 3$, calculer a_0 , a_1 , a_2 et a_3 .

2. Pour

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} = 3b_n - 2,$$

calculer b_1 , b_2 et b_3 .

3. Préciser le mode de génération de chaque suite.

Exercice 6 [*] **Approfondissement** Modéliser une situation

Pour chaque situation, définir une suite en précisant son premier terme et une relation de récurrence.

1. Une ville compte 10 000 habitants. Chaque année, 80 % des habitants restent et 500 nouveaux habitants arrivent.

2. Un capital vaut initialement 1 500 euros. Chaque année, sa valeur augmente de 4 % puis on retire 20 euros.

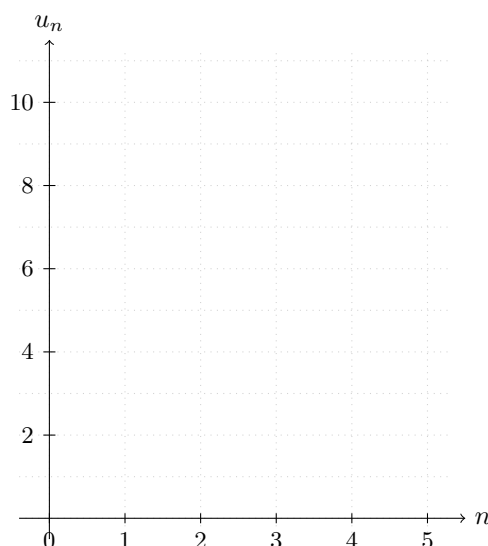
Thème III

Représentation graphique d'une suite

Exercice 7 **[!] Bilan** Représenter les premiers termes

On considère la suite définie par $u_n = n^2 - 2n + 2$.

1. Calculer u_0 , u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
2. Dans le repère ci-dessous, placer les points $(n; u_n)$ pour $0 \leq n \leq 4$.
3. La représentation graphique d'une suite est-elle une courbe continue ?

**Parcours A – Consolider**

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 8, page 4.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 9, page 5.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

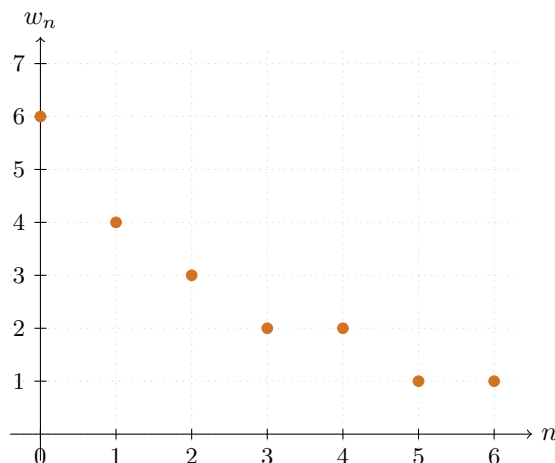
Exercice 8 **[+]** Consolidation Même travail, autres valeurs

On considère $v_n = 2n + 1$.

1. Calculer v_0 à v_4 .
2. Représenter les cinq points correspondants dans un repère.
3. Décrire l'allure des points.

Exercice 9 [*] Approfondissement Lire une suite sur un graphique

Le graphique ci-dessous représente les premiers termes d'une suite (w_n) .



1. Lire w_0 , w_2 , w_4 et w_6 .
2. La suite semble-t-elle croissante, décroissante ou ni l'une ni l'autre ?

Thème IV

Sens de variation d'une suite

Exercice 10 [!] Bilan Étudier $u_{n+1} - u_n$

On considère $u_n = n^2 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
2. Calculer et simplifier $u_{n+1} - u_n$.
3. En déduire le sens de variation de (u_n) .

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 11, page 5.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 12, page 6.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 11 [+] Consolidation Même travail, autres valeurs

On considère $v_n = n^2 + 4n - 1$.

1. Exprimer v_{n+1} .
2. Calculer $v_{n+1} - v_n$.
3. En déduire le sens de variation de (v_n) .

Exercice 12 [*] **Approfondissement Une différence avec des fractions**

On considère $w_n = \frac{n+1}{n+2}$.

1. Calculer $w_{n+1} - w_n$ et mettre au même dénominateur.
2. En déduire le sens de variation de (w_n) .

Exercice 13 [!] **Bilan Une suite de la forme $aq^n + b$**

On considère la suite (a_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$a_n = 5 \times 0,2^n + 3.$$

1. Calculer a_0 , a_1 et a_2 puis conjecturer le sens de variation de (a_n) .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} - a_n = 5 \times 0,2^n(0,2 - 1).$$

3. En déduire le sens de variation de (a_n) .

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 14, page 6.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 15, page 6.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 14 [+] **Consolidation Même méthode, autres valeurs**

On considère la suite (b_n) définie par

$$b_n = 4 \times 0,5^n - 2.$$

1. Calculer b_0 , b_1 et b_2 puis conjecturer son sens de variation.
2. Factoriser $b_{n+1} - b_n$ par $0,5^n$.
3. En déduire le sens de variation de (b_n) .

Exercice 15 [*] **Approfondissement Un coefficient négatif**

On considère la suite (c_n) définie par

$$c_n = 3 - 2 \times 1,4^n.$$

1. Calculer c_0 , c_1 et c_2 puis conjecturer son sens de variation.
2. Calculer puis factoriser $c_{n+1} - c_n$.
3. En déduire le sens de variation de (c_n) .

Exercice 16 **[!] Bilan Suite récurrente : utiliser un majorant**

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 10, \quad u_{n+1} = 0,9u_n + 5.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . Conjecturer le sens de variation de (u_n) .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = 0,1(50 - u_n).$$

3. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 50$. En déduire le sens de variation de (u_n) .

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 17, page 7.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 18, page 7.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 17 **[+] Consolidation Même méthode avec un minorant**

On considère la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 80, \quad v_{n+1} = 0,8v_n + 10.$$

1. Calculer v_1 , v_2 et v_3 . Conjecturer le sens de variation de (v_n) .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - v_n = 0,2(50 - v_n).$$

3. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 50$. En déduire le sens de variation de (v_n) .

Exercice 18 **[*] Approfondissement Une récurrence moins immédiate**

On considère la suite (w_n) définie par

$$w_0 = 100, \quad w_{n+1} = 1,5w_n - 20.$$

1. Calculer w_1 , w_2 et w_3 . Conjecturer le sens de variation de (w_n) .
2. Exprimer $w_{n+1} - w_n$ en fonction de w_n .
3. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 40$. Démontrer que (w_n) est croissante.

Exercice 19 **[*] Approfondissement Variation qui change de sens**

On considère la suite (t_n) définie par

$$t_n = (n+2) \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

1. Calculer t_0 , t_1 , t_2 et t_3 .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1} - t_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1-n}{4}.$$

3. En déduire les variations de la suite (t_n) .

Thème V

Python : calculer des termes et chercher un seuil

Exercice 20 **[!]** Bilan Calculer une suite récurrente en Python

On considère la suite définie par

$$u_0 = 4, \quad u_{n+1} = 1,5u_n + 2.$$

Compléter la fonction pour qu'elle renvoie u_n .

```
def u(n):
    U = 4
    for k in range(.....):
        U = .....
    return U
```

Puis calculer à la main u_1 et u_2 .

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 21, page 8.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 22, page 8.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 21 **[+]** Consolidation Même travail, autres valeurs

Pour $v_0 = 10$ et $v_{n+1} = 0,8v_n + 5$, compléter une fonction Python qui renvoie v_n , puis calculer v_1 et v_2 .

Exercice 22 **[*]** Approfondissement Chercher un seuil

On considère $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = 1,2u_n + 3$. Compléter le programme afin qu'il renvoie le plus petit rang n tel que $u_n \geq 100$.

```
def seuil():
    n = 0
    u = 20
    while .....:
        u = .....
        n = n + 1
    return n
```

Thème VI

Première intuition de la notion de limite

Exercice 23 Conjecturer un comportement

Pour chacune des suites suivantes, calculer quelques termes pour de grandes valeurs de n (ou raisonner directement), puis conjecturer son comportement lorsque n devient grand.

$$u_n = \frac{1}{n+1}, \quad v_n = n^2, \quad w_n = (-1)^n.$$

Thème VII

Bilan - Pour Préparer le Test

Exercice 24 [!] Bilan

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A – Étude d'une suite explicite

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$u_n = \frac{2n+1}{n+3}.$$

1. Calculer u_0 , u_1 et u_5 .
- 2.
2. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
2. b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+3)(n+4)}.$$

2. c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.

Partie B – Une suite quadratique

On considère la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$t_n = n^2 - 8n + 5.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- $$t_{n+1} - t_n = 2n - 7.$$
2. En déduire le sens de variation de la suite (t_n) .
 3. Déterminer la valeur minimale prise par la suite (t_n) .

Partie C – Une suite au comportement différent

On considère la suite (a_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite (a_n) .
2. La suite (a_n) est-elle croissante ? décroissante ? Justifier.
3. Représenter dans un repère les points de coordonnées

$$(n; a_n)$$

pour $0 \leq n \leq 5$.

Décrire le comportement que l'on observe.

4. Conjecturer la limite de la suite (a_n) .

Partie D – Une suite définie de deux façons et Python

On considère la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 25 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 0,8v_n + 12 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer v_1 , v_2 et v_3 .
2. On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$v_n < 60.$$

Étudier le sens de variation de la suite (v_n) .

3. On admet désormais que la suite (v_n) peut aussi s'écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 60 - 35 \times 0,8^n.$$

3. a. Retrouver v_0 , v_1 et v_2 à l'aide de cette expression.
3. b. Retrouver le sens de variation de (v_n) en utilisant cette fois l'expression explicite.
4. On souhaite calculer un terme de la suite à l'aide de Python.
Compléter la fonction suivante afin que `terme(n)` renvoie v_n .

```
1 def terme(n):  
2     v = .....  
3     for k in range(.....):  
4         v = .....  
5     return v
```

5. Que renvoie l'instruction

`terme(3)` ?

6. Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie la liste

$$[v_0, v_1, \dots, v_N].$$

```
1 def liste_termes(N):  
2     v = 25  
3     L = [v]  
4     for k in range(.....):  
5         v = .....  
6         L.append(.....)  
7     return L
```

7. On cherche maintenant le premier terme de la suite supérieur ou égal à une valeur donnée A , avec

$$25 < A < 60.$$

Compléter la fonction de seuil suivante.

```
1 def seuil(A):  
2     v = .....  
3     n = 0  
4     while .....:  
5         v = .....  
6         n = .....  
7     return n
```

8.
8. a. Expliquer précisément ce que renvoie la fonction `seuil(A)`.
8. b. Déterminer la valeur renvoyée par `seuil(50)` et vérifier le résultat en donnant les deux termes consécutifs utiles.

Thème VIII

Automatismes du chapitre – Pour préparer le test

Exercice 25 [FLASH] Automatismes QCM – Bac Première 2026

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Question 1

Source bac : Première spécialité, Asie 2026 – exercice 1, partie A, question 1 – question adaptée

En 2020, le niveau d'un lac est de 1100 mètres. On estime qu'il baisse de 1 % chaque année. On note u_n son niveau, en mètres, n années après 2020.

La valeur de u_1 est :

- | | |
|---------|---------|
| a) 1089 | c) 1111 |
| b) 1099 | d) 990 |

Question 2

Source bac : Première spécialité, Asie 2026 – exercice 1, partie A, question 2.a – question adaptée

Avec les mêmes notations, quelle relation traduit correctement l'évolution annuelle du niveau du lac ?

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| a) $u_{n+1} = u_n - 0,01$ | c) $u_{n+1} = 1,01u_n$ |
| b) $u_{n+1} = 0,99u_n$ | d) $u_{n+1} = u_n - 11$ |

Question 3

Source bac : Première spécialité, sujet zéro 2 – exercice 1, question 1 – question adaptée

On considère la suite définie par

$$u_0 = 10\,000, \quad u_{n+1} = 1,08u_n - 300.$$

La valeur de u_1 est :

- | | |
|-----------|-----------|
| a) 10 800 | c) 10 080 |
| b) 10 500 | d) 9 700 |

Question 4

Source bac : Première spécialité, Centres étrangers 2026 – exercice 1, partie A – question adaptée

La hauteur d'un arbre est modélisée par une suite (u_n) telle que $u_0 = 1$ et que l'arbre grandit de 0,4 mètre chaque année. Quelle relation de récurrence convient ?

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| a) $u_{n+1} = 0,4u_n$ | c) $u_{n+1} = u_n + 0,4$ |
| b) $u_{n+1} = 1,4u_n$ | d) $u_{n+1} = u_n + 1,4$ |

Question 5

Source bac : Première spécialité, Métropole 2026 – exercice 3, affirmation 2 – question adaptée

On considère la suite définie par

$$u_n = 2^{-n}.$$

Pour tout entier naturel n , le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à :

- | | |
|------------------|-------------------|
| a) 2 | c) -2 |
| b) $\frac{1}{2}$ | d) $-\frac{1}{2}$ |

Question 6

Source bac : Première spécialité, Polynésie 2026 – exercice 1, partie B, question 3.a – question adaptée

On utilise le programme suivant pour déterminer le premier rang n tel que $u_n \geq k$:

```
u = 400
n = 0
while .....:
    n = n + 1
    u = 1.025*u
```

Quelle condition faut-il écrire dans la boucle `while` ?

- | | |
|---------------|------------|
| a) $u < k$ | c) $u > k$ |
| b) $u \leq k$ | d) $n < k$ |

Thème IX

Extraits du Bac 2026



Épreuve du baccalauréat

À l'épreuve anticipée de mathématiques de Première, la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 26 [BAC] D'après Bac 2026 Niveau d'un lac – Asie 2026

Source bac : Première spécialité, Asie, 15 juin 2026 – exercice 1, partie A – questions adaptées

En 2020, le niveau d'un lac est de 1100 mètres. On estime qu'il baisse de 1 % chaque année. On note u_n son niveau n années après 2020 et $u_0 = 1100$.

1. Calculer u_1 et interpréter le résultat.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Écrire le calcul permettant d'estimer le niveau du lac en 2023, sans effectuer le calcul.
4. Compléter le programme qui affiche le nombre d'années à partir duquel le niveau devient inférieur à 1020 mètres.

```
u = 1100
n = 0
while .....:
    n = n + 1
    u = .....
print(n)
```

Exercice 27 [BAC] D'après Bac 2026 Population d'une ville – sujet zéro 2

Source bac : Première spécialité, sujet zéro 2 – exercice 1 – questions adaptées

On modélise une population par

$$u_0 = 10\,000, \quad u_{n+1} = 1,08u_n - 300.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Expliquer en une phrase le rôle des nombres 1,08 et 300 dans ce modèle.
3. Compléter une fonction Python qui renvoie les $n + 1$ premiers termes de la suite.

Exercice 28 [BAC] D'après Bac 2026 Seuil en Python – Polynésie 2026

Source bac : Première spécialité, Polynésie, 12 juin 2026 – exercice 1, partie B – questions adaptées

En 2025, un club accueille 400 clients. On modélise le nombre de clients par une suite (u_n) vérifiant

$$u_0 = 400, \quad u_{n+1} = 1,025u_n.$$

On souhaite déterminer le premier rang pour lequel $u_n \geq k$.

1. Compléter la fonction Python suivante.

```
def seuil(k):
    u = 400
    n = 0
    while .....:
        n = .....
        u = .....
    return .....
```

2. Expliquer ce que renvoie `seuil(600)` dans le contexte de l'exercice.

Thème X

Ouverture internationale – SAT

Les questions suivantes sont issues de ressources officielles du College Board. Pour ce chapitre, les exercices pertinents relèvent du SAT ; les suites et séries d'AP Calculus BC dépassent largement le programme de Première.

Exercice 29 ★ SAT – Interpreting a term in a discrete model

Source bac : SAT – College Board, Official SAT Practice Test #4, Math, Module 1, question 16

The function

$$f(x) = 206(1.034)^x$$

models the value, in dollars, of a certain bank account by the end of each year from 1957 through 1972, where x is the number of years after 1957.

Which of the following is the best interpretation of “ $f(5)$ is approximately equal to 243” in this context ?

- A. The value of the bank account is estimated to be approximately 5 dollars greater in 1962 than in 1957.
- B. The value of the bank account is estimated to be approximately 243 dollars in 1962.
- C. The value, in dollars, of the bank account is estimated to be approximately 5 times greater in 1962 than in 1957.
- D. The value of the bank account is estimated to increase by approximately 243 dollars every 5 years between 1957 and 1972.

Exercice 30 ★ ★ SAT – Exponential decrease

Source bac : SAT – College Board, Official SAT Practice Test #2, Math, Module 1, question 23

For the function q , the value of $q(x)$ decreases by 45 % for every increase in the value of x by 1. If $q(0) = 14$, which equation defines q ?

- A. $q(x) = 0.55(14)^x$
- B. $q(x) = 1.45(14)^x$
- C. $q(x) = 14(0.55)^x$
- D. $q(x) = 14(1.45)^x$

Thème XI

Now We Can Talk : pour aller plus loin

Exercice 31 ★ **Fibonacci – From rabbits to a sequence**

Au XIII^e siècle, Fibonacci étudie un problème de reproduction de lapins. On considère ici le modèle simplifié suivant :

- au début du premier mois, on dispose d'un couple de jeunes lapins ;
- un couple devient adulte au bout d'un mois ;
- à partir du mois suivant, chaque couple adulte engendre chaque mois un nouveau couple ;
- aucun lapin ne meurt.

On note F_n le nombre de couples de lapins présents au début du n -ième mois.

On prend

$$F_1 = 1 \quad \text{et} \quad F_2 = 1.$$

1. Expliquer pourquoi

$$F_3 = 2 \quad \text{et} \quad F_4 = 3.$$

2. Calculer F_5 , F_6 , F_7 et F_8 .

Que semble-t-on devoir additionner pour obtenir chaque nouveau terme ?

3. Traduire cette observation par une relation de récurrence.

4. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la liste des N premiers termes de la suite de Fibonacci.

```

1 def fibonacci(N):
2     a = 1
3     b = 1
4     L = [a, b]
5     for k in range(.....):
6         c = .....
7         L.append(c)
8         a = .....
9         b = .....
10    return L

```

5. Que renvoie l'instruction

`fibonacci(10)` ?

Exercice 32 ★ ★ **Syracuse – A sequence with a mystery**

On choisit un entier naturel non nul u_0 .

On construit ensuite une suite (u_n) de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Cette suite est appelée suite de Syracuse.

1. On choisit

$$u_0 = 10.$$

Calculer les termes successifs jusqu'à obtenir pour la première fois la valeur 1.

2. La suite obtenue à partir de $u_0 = 10$ est-elle monotone ?

Justifier avec deux comparaisons seulement.

3. On appelle temps de vol le plus petit entier n tel que

$$u_n = 1.$$

Quel est le temps de vol de la suite issue de 10 ?

4. Compléter la fonction suivante, qui renvoie la trajectoire de Syracuse d'un entier a , jusqu'à l'obtention de 1.

```

1 def syracuse(a):
2     u = a
3     L = [u]
4     while .....:
5         if u % 2 == 0:
6             u = .....
7         else:
8             u = .....
9         L.append(u)
10    return L

```

5. Écrire une fonction `temps_vol(a)` qui renvoie uniquement le temps de vol de la trajectoire issue de a .

```

1 def temps_vol(a):
2     u = a
3     n = 0
4     while u != 1:
5         if u % 2 == 0:
6             u = .....
7         else:
8             u = .....
9         n = .....
10    return n

```

6. Tester mentalement ou à l'aide de Python plusieurs valeurs initiales.

Quelle conjecture célèbre ces expériences suggèrent-elles ?

Attention : une conjecture n'est pas un théorème.

Exercice 33 ★★ ★ The Tower of Hanoi – Can you beat the puzzle ?

Le jeu des tours de Hanoï comporte trois tiges et n disques de diamètres différents.

Au départ, les disques sont empilés sur la première tige, du plus grand au plus petit.

On souhaite transférer toute la tour sur la troisième tige en respectant les règles suivantes :

- on ne déplace qu'un seul disque à la fois ;
- on ne pose jamais un disque sur un disque plus petit.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note u_n le nombre minimal de déplacements nécessaires pour déplacer une tour de n disques.

1. Déterminer u_1 , u_2 puis u_3 .

2. On considère une tour de $n + 1$ disques.

Expliquer pourquoi tout déplacement de cette tour impose successivement :

- de déplacer les n petits disques ;
- de déplacer le plus grand disque ;
- de replacer les n petits disques.

En déduire que

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

3. À l'aide de cette relation, calculer u_4 , u_5 et u_6 .

Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .

4. On considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = 2^n - 1.$$

Vérifier que

$$v_1 = u_1$$

et que la suite (v_n) satisfait également

$$v_{n+1} = 2v_n + 1.$$

Que peut-on en conclure à ce stade ?

5. Pour la suite de l'exercice, on admet désormais que

$$u_n = 2^n - 1.$$

Compléter la fonction suivante afin qu'elle calcule u_n à partir de la relation de récurrence.

```
1 def hanoi(n):  
2     u = .....  
3     for k in range(.....):  
4         u = .....  
5     return u
```

6. Un joueur réussit à effectuer exactement deux déplacements par seconde, sans jamais commettre d'erreur.

6. a. Estimer le temps minimal nécessaire pour résoudre une tour de 20 disques.

6. b. Estimer, en années, le temps nécessaire pour une tour de 40 disques.

On prendra

$$1 \text{ année} = 365 \text{ jours.}$$

7. Final challenge.

Le joueur dispose exactement de 24 heures.

Quel est le plus grand nombre de disques pour lequel il peut terminer le jeu à raison de deux déplacements par seconde ?

↩ Fin du TD ↪