

TD – EXERCICES

TD 2

Suites : généralités

Version corrigée – Version imprimable

Sommaire du TD

I	Des listes Python aux suites	2
II	Définitions et modes de génération	4
III	Représentation graphique d'une suite	6
IV	Sens de variation d'une suite	8
V	Python : calculer des termes et chercher un seuil	14
VI	Première intuition de la notion de limite	15
VII	Bilan - Pour Préparer le Test	16
VIII	Automatismes du chapitre – Pour préparer le test	24
IX	Extraits du Bac 2026	27
X	Ouverture internationale – SAT	29
XI	Now We Can Talk : pour aller plus loin	30

Objectifs

- Passer d'une liste Python à la notation d'une suite et calculer des termes.
- Reconnaître les modes de génération : explicite, récurrence, algorithme, motif.
- Représenter graphiquement les termes d'une suite.
- Étudier le sens de variation à l'aide de $u_{n+1} - u_n$.
- Écrire ou compléter un programme Python pour calculer des termes ou chercher un seuil.
- Conjecturer, sur des exemples simples, le comportement d'une suite pour de grandes valeurs de n .

Thème I

Des listes Python aux suites

Exercice 1 [!] **Bilan Lire une liste comme une suite**

On exécute le programme suivant :

```
L = []
for n in range(6):
    L.append(3*n + 2)
print(L)
```

1. Donner la liste affichée.
2. On note u_n le terme de rang n . Donner u_0 , u_2 et u_5 .
3. Exprimer u_n en fonction de n .

**Corrigé**

1. À l'issue de la boucle, on obtient

$$L = [2, 5, 8, 11, 14, 17].$$

2. La liste est indexée à partir de 0, donc

$$u_0 = 2, \quad u_2 = 8, \quad u_5 = 17.$$

3. À l'itération de rang n , le programme ajoute $3n + 2$ à la liste. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 3n + 2.$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 2, page 2.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 3, page 3.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 2 [+] **Consolidation Même travail, autres valeurs**

```
L = []
for n in range(5):
    L.append(4*n - 1)
print(L)
```

1. Donner la liste affichée.
2. Donner v_0 , v_2 et v_4 .
3. Exprimer v_n en fonction de n .

**Corrigé**

1. La boucle parcourt les entiers 0, 1, 2, 3, 4. On obtient

$$[-1, 3, 7, 11, 15].$$

2. Ainsi,

$$v_0 = -1, \quad v_2 = 7, \quad v_4 = 15.$$

3. À l'itération de rang n , le programme ajoute $4n - 1$. Donc

$$v_n = 4n - 1.$$

Exercice 3 [*] Approfondissement Construire une liste à partir d'une récurrence

Compléter le programme afin qu'il construise la liste $[u_0, u_1, \dots, u_6]$ de la suite définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

```
u = 2
L = [u]
for n in range(6):
    u = .....
    L.append(.....)
print(L)
```



Corrigé

On écrit $u = 2*u + 1$ puis `L.append(u)`. La liste obtenue est

$$[2, 5, 11, 23, 47, 95, 191].$$

Thème II

Définitions et modes de génération

Exercice 4 [!] **Bilan** Explicite ou par récurrence ?

1. Pour $u_n = 7n + 1$, calculer les quatre premiers termes.

2. Pour la suite définie par

$$v_0 = 2, \quad v_{n+1} = 2v_n + 1,$$

calculer v_1 , v_2 et v_3 .

3. Pour chacune des deux suites, préciser son mode de génération.

**Corrigé**

1. La suite (u_n) est définie explicitement. On remplace successivement n par 0, 1, 2 et 3 :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 8, \quad u_2 = 15, \quad u_3 = 22.$$

2. La suite (v_n) est définie par récurrence :

$$v_1 = 2v_0 + 1 = 5,$$

$$v_2 = 2v_1 + 1 = 11,$$

$$v_3 = 2v_2 + 1 = 23.$$

Ainsi,

$$v_1 = 5, \quad v_2 = 11, \quad v_3 = 23.$$

3. (u_n) est définie explicitement, tandis que (v_n) est définie par récurrence.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 5, page 4.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 6, page 5.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 5 [+] **Consolidation** Même travail, autres valeurs

1. Pour $a_n = n^2 - 2n + 3$, calculer a_0 , a_1 , a_2 et a_3 .

2. Pour

$$b_0 = 1, \quad b_{n+1} = 3b_n - 2,$$

calculer b_1 , b_2 et b_3 .

3. Préciser le mode de génération de chaque suite.

**Corrigé**

1. En utilisant l'expression explicite de a_n :

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 6.$$

2. On utilise successivement la relation de récurrence :

$$b_1 = 3b_0 - 2 = 1,$$

$$b_2 = 3b_1 - 2 = 1,$$

$$b_3 = 3b_2 - 2 = 1.$$

Donc

$$b_1 = b_2 = b_3 = 1.$$

3. (a_n) est définie explicitement ; (b_n) est définie par récurrence.

Exercice 6 [*] Approfondissement Modéliser une situation

Pour chaque situation, définir une suite en précisant son premier terme et une relation de récurrence.

1. Une ville compte 10 000 habitants. Chaque année, 80 % des habitants restent et 500 nouveaux habitants arrivent.
2. Un capital vaut initialement 1 500 euros. Chaque année, sa valeur augmente de 4 % puis on retire 20 euros.



Corrigé

1. On note u_n la population après n années. Chaque année, 80 % de la population reste, puis 500 habitants arrivent. Ainsi

$$u_0 = 10\,000 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0,8u_n + 500.$$

2. On note v_n la valeur du capital après n années. Une hausse de 4 % correspond au coefficient multiplicateur 1,04, puis on retire 20 euros. Donc

$$v_0 = 1\,500 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 1,04v_n - 20.$$

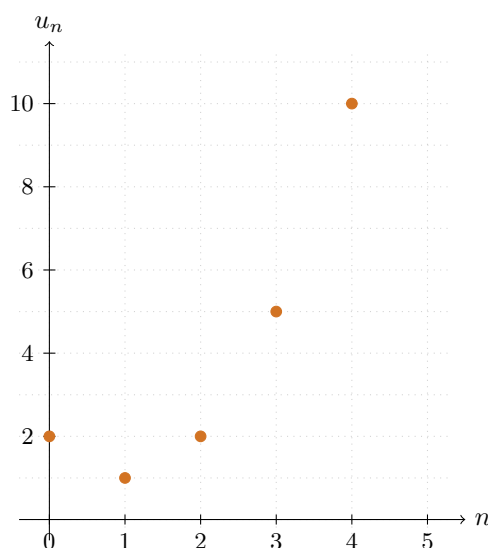
Thème III

Représentation graphique d'une suite

Exercice 7 **[!] Bilan** Représenter les premiers termes

On considère la suite définie par $u_n = n^2 - 2n + 2$.

1. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4 .
2. Dans le repère ci-dessous, placer les points $(n; u_n)$ pour $0 \leq n \leq 4$.
3. La représentation graphique d'une suite est-elle une courbe continue ?



Corrigé

1. $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 5, u_4 = 10$.
2. Les points sont $(0; 2), (1; 1), (2; 2), (3; 5)$ et $(4; 10)$.
3. Non : une suite est représentée par des points isolés d'abscisses entières.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 8, page 6.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 9, page 8.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 8 **[+]** Consolidation Même travail, autres valeurs

On considère $v_n = 2n + 1$.

1. Calculer v_0 à v_4 .
2. Représenter les cinq points correspondants dans un repère.
3. Décrire l'allure des points.



Corrigé

1.

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 3, \quad v_2 = 5, \quad v_3 = 7, \quad v_4 = 9$$

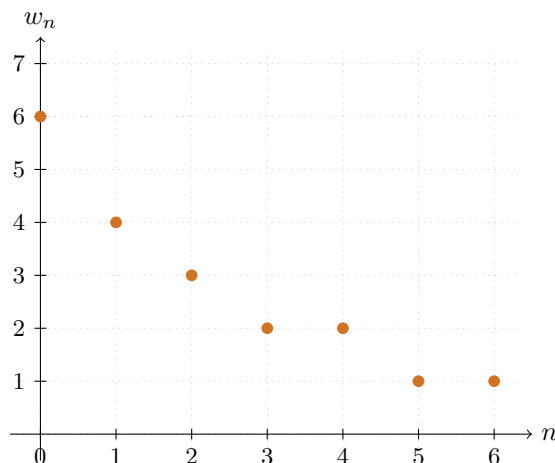
2. Les points à placer sont

$(0 ; 1)$, $(1 ; 3)$, $(2 ; 5)$, $(3 ; 7)$, $(4 ; 9)$.

3. Ces cinq points sont alignés. Ils restent cependant isolés : la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe continue.

Exercice 9 [*] **Approfondissement Lire une suite sur un graphique**

Le graphique ci-dessous représente les premiers termes d'une suite (w_n) .



1. Lire w_0 , w_2 , w_4 et w_6 .
2. La suite semble-t-elle croissante, décroissante ou ni l'une ni l'autre ?

**Corrigé**

1. D'après le graphique,

$$w_0 = 6, \quad w_2 = 3, \quad w_4 = 2, \quad w_6 = 1.$$

2. Sur les rangs représentés, les valeurs ne croissent jamais lorsque n augmente. On conjecture donc que la suite (w_n) est décroissante.

Thème IV**Sens de variation d'une suite****Exercice 10** [!] **Bilan Étudier** $u_{n+1} - u_n$

On considère $u_n = n^2 + 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
2. Calculer et simplifier $u_{n+1} - u_n$.
3. En déduire le sens de variation de (u_n) .

**Corrigé**

- 1.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)^2 + 2(n+1) \\ &= n^2 + 4n + 3. \end{aligned}$$

- 2.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= n^2 + 4n + 3 - (n^2 + 2n) \\ &= 2n + 3. \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n + 3 > 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc

$$(u_n) \text{ est strictement croissante.}$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 11, page 9.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 12, page 9.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 11 **[+] Consolidation** Même travail, autres valeurs

On considère $v_n = n^2 + 4n - 1$.

1. Exprimer v_{n+1} .
2. Calculer $v_{n+1} - v_n$.
3. En déduire le sens de variation de (v_n) .

**Corrigé**

1.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= (n+1)^2 + 4(n+1) - 1 \\ &= n^2 + 6n + 4. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= n^2 + 6n + 4 - (n^2 + 4n - 1) \\ &= 2n + 5. \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n + 5 > 0$. Par conséquent,

(v_n) est strictement croissante.

Exercice 12 **[*] Approfondissement** Une différence avec des fractions

On considère $w_n = \frac{n+1}{n+2}$.

1. Calculer $w_{n+1} - w_n$ et mettre au même dénominateur.
2. En déduire le sens de variation de (w_n) .

**Corrigé**

1.

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{1}{(n+2)(n+3)}. \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+2)(n+3) > 0$. Ainsi

$$w_{n+1} - w_n > 0,$$

donc

(w_n) est strictement croissante.

Exercice 13 **Bilan** Une suite de la forme $aq^n + b$

On considère la suite (a_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$a_n = 5 \times 0,2^n + 3.$$

1. Calculer a_0 , a_1 et a_2 puis conjecturer le sens de variation de (a_n) .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$a_{n+1} - a_n = 5 \times 0,2^n(0,2 - 1).$$

3. En déduire le sens de variation de (a_n) .

**Corrigé**

$$a_0 = 8,$$

$$a_1 = 4,$$

$$a_2 = 3,2.$$

On conjecture que (a_n) est décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 5 \times 0,2^{n+1} + 3 - (5 \times 0,2^n + 3) \\ &= 5 \times 0,2^n(0,2 - 1) \\ &= -4 \times 0,2^n. \end{aligned}$$

Or $0,2^n > 0$, donc $a_{n+1} - a_n < 0$.

La suite (a_n) est strictement décroissante.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 14, page 10.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 15, page 11.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 14 **Consolidation** Même méthode, autres valeurs

On considère la suite (b_n) définie par

$$b_n = 4 \times 0,5^n - 2.$$

1. Calculer b_0 , b_1 et b_2 puis conjecturer son sens de variation.
2. Factoriser $b_{n+1} - b_n$ par $0,5^n$.
3. En déduire le sens de variation de (b_n) .

**Corrigé**

$b_0 = 2$, $b_1 = 0$ et $b_2 = -1$. De plus,

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= 4 \times 0,5^{n+1} - 2 - (4 \times 0,5^n - 2) \\ &= -2 \times 0,5^n < 0. \end{aligned}$$

Ainsi (b_n) est strictement décroissante.

Exercice 15 [*] **Approfondissement Un coefficient négatif**

On considère la suite (c_n) définie par

$$c_n = 3 - 2 \times 1,4^n.$$

1. Calculer c_0 , c_1 et c_2 puis conjecturer son sens de variation.
2. Calculer puis factoriser $c_{n+1} - c_n$.
3. En déduire le sens de variation de (c_n) .

**Corrigé**

$c_0 = 1$, $c_1 = 0,2$ et $c_2 = -0,92$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} c_{n+1} - c_n &= -2 \times 1,4^{n+1} + 2 \times 1,4^n \\ &= -2 \times 1,4^n (1,4 - 1) \\ &= -0,8 \times 1,4^n < 0. \end{aligned}$$

Donc (c_n) est strictement décroissante.

Exercice 16 [!] **Bilan Suite récurrente : utiliser un majorant**

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 10, \quad u_{n+1} = 0,9u_n + 5.$$

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 . Conjecturer le sens de variation de (u_n) .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} - u_n = 0,1(50 - u_n).$$

3. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 50$. En déduire le sens de variation de (u_n) .

**Corrigé**

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,9 \times 10 + 5 = 14, \\ u_2 &= 0,9 \times 14 + 5 = 17,6, \\ u_3 &= 0,9 \times 17,6 + 5 = 20,84. \end{aligned}$$

On conjecture que (u_n) est croissante.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 0,9u_n + 5 - u_n \\ &= -0,1u_n + 5 \\ &= 0,1(50 - u_n). \end{aligned}$$

Or $u_n \leq 50$, donc $50 - u_n \geq 0$. Ainsi

$$u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

La suite (u_n) est croissante.

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 17, page 12.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 18, page 12.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 17 **[+]** Consolidation Même méthode avec un minorant

On considère la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 80, \quad v_{n+1} = 0,8v_n + 10.$$

1. Calculer v_1 , v_2 et v_3 . Conjecturer le sens de variation de (v_n) .
2. Montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} - v_n = 0,2(50 - v_n).$$

3. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 50$. En déduire le sens de variation de (v_n) .

**Corrigé**

$$\begin{aligned} v_1 &= 74, \\ v_2 &= 69,2, \\ v_3 &= 65,36. \end{aligned}$$

On conjecture que (v_n) est décroissante. De plus,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 0,8v_n + 10 - v_n \\ &= 0,2(50 - v_n). \end{aligned}$$

Comme $v_n \geq 50$, on a $50 - v_n \leq 0$, donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$.

La suite (v_n) est décroissante.

Exercice 18 **[*]** Approfondissement Une récurrence moins immédiate

On considère la suite (w_n) définie par

$$w_0 = 100, \quad w_{n+1} = 1,5w_n - 20.$$

1. Calculer w_1 , w_2 et w_3 . Conjecturer le sens de variation de (w_n) .
2. Exprimer $w_{n+1} - w_n$ en fonction de w_n .
3. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 40$. Démontrer que (w_n) est croissante.

**Corrigé**

$$\begin{aligned} w_1 &= 130, \\ w_2 &= 175, \\ w_3 &= 242,5. \end{aligned}$$

On conjecture que (w_n) est croissante. Or

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= 1,5w_n - 20 - w_n \\ &= 0,5w_n - 20 \\ &= 0,5(w_n - 40). \end{aligned}$$

Comme $w_n \geq 40$, on a $w_n - 40 \geq 0$. Ainsi $w_{n+1} - w_n \geq 0$ et

La suite (w_n) est croissante.

Exercice 19 [*] **Approfondissement Variation qui change de sens**

On considère la suite (t_n) définie par

$$t_n = (n+2) \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

1. Calculer t_0 , t_1 , t_2 et t_3 .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1} - t_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1-n}{4}.$$

3. En déduire les variations de la suite (t_n) .

**Corrigé**

On a $t_0 = 2$, $t_1 = \frac{9}{4}$, $t_2 = \frac{9}{4}$ et $t_3 = \frac{135}{64}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= (n+3) \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - (n+2) \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3(n+3)}{4} - (n+2)\right) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1-n}{4}. \end{aligned}$$

Comme $\left(\frac{3}{4}\right)^n > 0$, le signe est celui de $1-n$. Ainsi $t_1 > t_0$, $t_2 = t_1$, puis la suite est strictement décroissante à partir du rang 2.

Thème V

Python : calculer des termes et chercher un seuil

Exercice 20 **[!] Bilan** Calculer une suite récurrente en Python

On considère la suite définie par

$$u_0 = 4, \quad u_{n+1} = 1,5u_n + 2.$$

Compléter la fonction pour qu'elle renvoie u_n .

```
def u(n):
    U = 4
    for k in range(.....):
        U = .....
    return U
```

Puis calculer à la main u_1 et u_2 .

**Corrigé**

La boucle doit effectuer exactement n mises à jour de la relation de récurrence. On complète donc par `range(n)` et `U = 1.5*U + 2`.

Autrement dit, on remplace les pointillés par `n` puis par `1.5*U + 2`.

Enfin,

$$u_1 = 8 \quad \text{et} \quad u_2 = 14.$$

Parcours A – Consolider

Si l'exercice bilan n'est pas encore réussi, faire l'exercice 21, page 14.

Objectif : refaire un exercice très proche avec d'autres valeurs.

Parcours B – Approfondissement

Si l'exercice bilan est réussi, faire l'exercice 22, page 15.

Objectif : mobiliser les mêmes compétences dans une situation moins guidée.

Exercice 21 **[+] Consolidation** Même travail, autres valeurs

Pour $v_0 = 10$ et $v_{n+1} = 0,8v_n + 5$, compléter une fonction Python qui renvoie v_n , puis calculer v_1 et v_2 .

**Corrigé**

On initialise `V = 10`, puis on répète n fois l'instruction `V = 0.8*V + 5` et on renvoie `V`. De plus,

$$v_1 = 0,8 \times 10 + 5 = 13,$$

$$v_2 = 0,8 \times 13 + 5 = 15,4.$$

Ainsi,

$$v_1 = 13 \quad \text{et} \quad v_2 = 15,4.$$

Exercice 22 [*] **Approfondissement Chercher un seuil**

On considère $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = 1,2u_n + 3$. Compléter le programme afin qu'il renvoie le plus petit rang n tel que $u_n \geq 100$.

```
def seuil():  
    n = 0  
    u = 20  
    while .....:  
        u = .....  
        n = n + 1  
    return n
```

**Corrigé**

La boucle doit continuer tant que le seuil 100 n'est pas atteint. On complète donc par $u < 100$ et $u = 1.2*u + 3$. On remplace donc les pointillés par $u < 100$ puis $1.2*u + 3$. La fonction renvoie ainsi le plus petit entier n tel que $u_n \geq 100$.

Thème VI**Première intuition de la notion de limite****Exercice 23** **Conjecturer un comportement**

Pour chacune des suites suivantes, calculer quelques termes pour de grandes valeurs de n (ou raisonner directement), puis conjecturer son comportement lorsque n devient grand.

$$u_n = \frac{1}{n+1}, \quad v_n = n^2, \quad w_n = (-1)^n.$$

**Corrigé**

On conjecture que u_n se rapproche de 0, que v_n devient arbitrairement grand, tandis que w_n alterne entre 1 et -1 et n'a pas de limite.

Thème VII

Bilan - Pour Préparer le Test

Exercice 24 [!] Bilan

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A – Étude d'une suite explicite

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$u_n = \frac{2n+1}{n+3}.$$

1. Calculer u_0 , u_1 et u_5 .



Corrigé

En utilisant l'expression de u_n , on obtient :

$$\begin{aligned}u_0 &= \frac{1}{3}, \\u_1 &= \frac{3}{4}, \\u_5 &= \frac{11}{8}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_0 = \frac{1}{3}, \quad u_1 = \frac{3}{4}, \quad u_5 = \frac{11}{8}.$$

2.
2. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .
2. b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+3)(n+4)}.$$

2. c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .



Corrigé

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+3} \\&= \frac{2n+3}{n+4}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$u_{n+1} = \frac{2n+3}{n+4}.$$

2. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} \\ &= \frac{(2n+3)(n+3) - (2n+1)(n+4)}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{2n^2 + 9n + 9 - (2n^2 + 9n + 4)}{(n+3)(n+4)} \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+3)(n+4)}$$

2. c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n+3 > 0 \quad \text{et} \quad n+4 > 0.$$

Donc

$$u_{n+1} - u_n > 0.$$

Par conséquent,

la suite (u_n) est strictement croissante.

3. Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.



Corrigé

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 2 - u_n &= 2 - \frac{2n+1}{n+3} \\ &= \frac{2(n+3) - (2n+1)}{n+3} \\ &= \frac{5}{n+3}. \end{aligned}$$

Or

$$n+3 > 0,$$

donc

$$2 - u_n > 0.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n < 2.$$

Par conséquent,

la suite (u_n) est majorée par 2.

Partie B – Une suite quadratique

On considère la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$t_n = n^2 - 8n + 5.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1} - t_n = 2n - 7.$$

**Corrigé**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= (n+1)^2 - 8(n+1) + 5 - (n^2 - 8n + 5) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 8n - 8 + 5 - n^2 + 8n - 5 \end{aligned}$$

$$\boxed{t_{n+1} - t_n = 2n - 7}$$

2. En déduire le sens de variation de la suite (t_n) .

**Corrigé**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1} - t_n = 2n - 7.$$

Or

$$2n - 7 < 0 \iff n < \frac{7}{2}.$$

Comme n est un entier naturel :

$$t_{n+1} - t_n < 0 \quad \text{pour } n \leq 3,$$

et

$$t_{n+1} - t_n > 0 \quad \text{pour } n \geq 4.$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l} (t_n) \text{ est strictement décroissante jusqu'au rang 4,} \\ (t_n) \text{ est strictement croissante à partir du rang 4.} \end{array}}$$

3. Déterminer la valeur minimale prise par la suite (t_n) .

**Corrigé**

D'après l'étude précédente, le minimum est atteint au rang 4.

Or

$$\begin{aligned} t_4 &= 4^2 - 8 \times 4 + 5 \\ &= 16 - 32 + 5 \\ &= -11. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\min_{n \in \mathbb{N}} t_n = t_4 = -11}.$$

Partie C – Une suite au comportement différent

On considère la suite (a_n) définie, pour tout entier naturel n , par

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

1. Calculer les six premiers termes de la suite (a_n) .

**Corrigé**

On obtient :

$$\begin{array}{lll} a_0 = 1, & a_1 = -\frac{1}{2}, & a_2 = \frac{1}{3}, \\ a_3 = -\frac{1}{4}, & a_4 = \frac{1}{5}, & a_5 = -\frac{1}{6}. \end{array}$$

2. La suite (a_n) est-elle croissante ? décroissante ? Justifier.



Corrigé

On a

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$a_1 < a_0 \quad \text{mais} \quad a_2 > a_1.$$

La suite n'est donc ni croissante ni décroissante.

La suite (a_n) n'est pas monotone.

3. Représenter dans un repère les points de coordonnées

$$(n; a_n)$$

pour $0 \leq n \leq 5$.

Décrire le comportement que l'on observe.



Corrigé

Les termes de rang pair sont positifs et les termes de rang impair sont négatifs.

De plus, leur valeur absolue

$$|a_n| = \frac{1}{n+1}$$

devient de plus en plus petite.

Les points sont donc alternativement situés au-dessus et au-dessous de l'axe des abscisses et semblent se rapprocher de cet axe.

4. Conjecturer la limite de la suite (a_n) .



Corrigé

D'après les valeurs calculées et la représentation graphique, les termes semblent se rapprocher de 0.

On conjecture donc que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

.

Partie D– Une suite définie de deux façons et Python

On considère la suite (v_n) définie par

$$v_0 = 25 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 0,8v_n + 12 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer v_1 , v_2 et v_3 .

**Corrigé**

La suite étant définie par récurrence, on calcule successivement :

$$\begin{aligned}
 v_1 &= 0,8v_0 + 12 \\
 &= 0,8 \times 25 + 12 \\
 &= 32, \\
 v_2 &= 0,8v_1 + 12 \\
 &= 0,8 \times 32 + 12 \\
 &= 37,6, \\
 v_3 &= 0,8v_2 + 12 \\
 &= 0,8 \times 37,6 + 12 \\
 &= 42,08.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$v_1 = 32, \quad v_2 = 37,6, \quad v_3 = 42,08.$$

2. On admet que, pour tout entier naturel n ,

$$v_n < 60.$$

Étudier le sens de variation de la suite (v_n) .

**Corrigé**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= 0,8v_n + 12 - v_n \\
 &= 12 - 0,2v_n
 \end{aligned}$$

$$v_{n+1} - v_n = 0,2(60 - v_n)$$

Or, par hypothèse,

$$v_n < 60.$$

Donc

$$60 - v_n > 0.$$

Comme $0,2 > 0$, on en déduit

$$v_{n+1} - v_n > 0.$$

Par conséquent,

$$\text{la suite } (v_n) \text{ est strictement croissante.}$$

3. On admet désormais que la suite (v_n) peut aussi s'écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = 60 - 35 \times 0,8^n.$$

3. a. Retrouver v_0 , v_1 et v_2 à l'aide de cette expression.

3. b. Retrouver le sens de variation de (v_n) en utilisant cette fois l'expression explicite.

**Corrigé**

3. a.

$$\begin{aligned}
 v_0 &= 60 - 35 \times 0,8^0 = 25, \\
 v_1 &= 60 - 35 \times 0,8 = 32, \\
 v_2 &= 60 - 35 \times 0,8^2 = 37,6.
 \end{aligned}$$

On retrouve bien les valeurs obtenues avec la relation de récurrence.

3. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= 60 - 35 \times 0,8^{n+1} - (60 - 35 \times 0,8^n) \\ &= 35 \times 0,8^n - 35 \times 0,8^{n+1} \\ &= 35 \times 0,8^n (1 - 0,8) \end{aligned}$$

$$v_{n+1} - v_n = 7 \times 0,8^n$$

Or

$$0,8^n > 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi,

$$v_{n+1} - v_n > 0.$$

On retrouve donc

la suite (v_n) est strictement croissante.

4. On souhaite calculer un terme de la suite à l'aide de Python.

Compléter la fonction suivante afin que `terme(n)` renvoie v_n .

```
1 def terme(n):
2     v = 25
3     for k in range(n):
4         v = 0.8*v + 12
5     return v
```



Corrigé

On initialise la variable v avec

$$v_0 = 25.$$

Pour passer d'un terme au suivant, on utilise la relation

$$v_{n+1} = 0,8v_n + 12.$$

La boucle doit être exécutée n fois pour passer de v_0 à v_n .

L'algorithme complété est donc celui donné ci-dessus.

5. Que renvoie l'instruction

`terme(3)` ?



Corrigé

La fonction `terme(n)` renvoie le terme v_n .

Or

$$v_3 = 42,08.$$

Ainsi,

$$\text{terme}(3) = 42,08.$$

6. Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie la liste

$$[v_0, v_1, \dots, v_N].$$

```

1 def liste_termes(N):
2     v = 25
3     L = [v]
4     for k in range(N):
5         v = 0.8*v + 12
6         L.append(v)
7     return L

```

**Corrigé**

La liste contient déjà v_0 .

Pour obtenir ensuite

$$v_1, v_2, \dots, v_N,$$

il faut effectuer N passages dans la boucle.

À chaque étape, on calcule le terme suivant puis on l'ajoute à la liste.

L'algorithme complété est donc celui donné ci-dessus.

7. On cherche maintenant le premier terme de la suite supérieur ou égal à une valeur donnée A , avec

$$25 < A < 60.$$

Compléter la fonction de seuil suivante.

```

1 def seuil(A):
2     v = 25
3     n = 0
4     while v < A:
5         v = 0.8*v + 12
6         n = n + 1
7     return n

```

**Corrigé**

On initialise

$$n = 0 \quad \text{et} \quad v = v_0 = 25.$$

On cherche le premier rang pour lequel

$$v_n \geq A.$$

La boucle doit donc continuer tant que

$$v < A.$$

À chaque passage, on calcule le terme suivant et on augmente le rang de 1.

L'algorithme complété est celui donné ci-dessus.

8.

8. a. Expliquer précisément ce que renvoie la fonction `seuil(A)`.
 8. b. Déterminer la valeur renvoyée par `seuil(50)` et vérifier le résultat en donnant les deux termes consécutifs utiles.

**Corrigé**

8. a. Puisque la suite (v_n) est strictement croissante, la fonction `seuil(A)` renvoie

le plus petit entier n tel que $v_n \geq A$.

8. b. On calcule :

$$v_4 = 45,664,$$

$$v_5 = 48,5312,$$

$$v_6 = 50,82496.$$

Ainsi,

$$v_5 < 50 \leq v_6.$$

Le premier terme supérieur ou égal à 50 est donc v_6 .

Par conséquent,

$$\boxed{\text{seuil}(50) = 6}.$$

Thème VIII

Automatismes du chapitre – Pour préparer le test

Exercice 25 [FLASH] Automatismes QCM – Bac Première 2026

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est correcte.

Question 1

Source bac : Première spécialité, Asie 2026 – exercice 1, partie A, question 1 – question adaptée

En 2020, le niveau d'un lac est de 1100 mètres. On estime qu'il baisse de 1 % chaque année. On note u_n son niveau, en mètres, n années après 2020.

La valeur de u_1 est :

- | | |
|---------|---------|
| a) 1089 | c) 1111 |
| b) 1099 | d) 990 |



Corrigé

Une baisse de 1 % correspond au coefficient multiplicateur 0,99.

$$u_1 = 1100 \times 0,99 = 1089.$$

Réponse a)

Question 2

Source bac : Première spécialité, Asie 2026 – exercice 1, partie A, question 2.a – question adaptée

Avec les mêmes notations, quelle relation traduit correctement l'évolution annuelle du niveau du lac ?

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| a) $u_{n+1} = u_n - 0,01$ | c) $u_{n+1} = 1,01u_n$ |
| b) $u_{n+1} = 0,99u_n$ | d) $u_{n+1} = u_n - 11$ |



Corrigé

Chaque année, le niveau est multiplié par $1 - 0,01 = 0,99$. Ainsi,

$$u_{n+1} = 0,99u_n.$$

Réponse b)

Question 3

Source bac : Première spécialité, sujet zéro 2 – exercice 1, question 1 – question adaptée

On considère la suite définie par

$$u_0 = 10\,000, \quad u_{n+1} = 1,08u_n - 300.$$

La valeur de u_1 est :

- | | |
|-----------|-----------|
| a) 10 800 | c) 10 080 |
| b) 10 500 | d) 9 700 |



Corrigé

$$\begin{aligned} u_1 &= 1,08u_0 - 300 \\ &= 1,08 \times 10\,000 - 300 \\ &= 10\,500. \end{aligned}$$

Réponse b)

Question 4

Source bac : Première spécialité, Centres étrangers 2026 – exercice 1, partie A – question adaptée

La hauteur d'un arbre est modélisée par une suite (u_n) telle que $u_0 = 1$ et que l'arbre grandit de 0,4 mètre chaque année. Quelle relation de récurrence convient ?

- | | |
|-----------------------|--------------------------|
| a) $u_{n+1} = 0,4u_n$ | c) $u_{n+1} = u_n + 0,4$ |
| b) $u_{n+1} = 1,4u_n$ | d) $u_{n+1} = u_n + 1,4$ |



Corrigé

Une hausse annuelle de 0,4 mètre signifie que l'on ajoute 0,4 à chaque terme :

$$u_{n+1} = u_n + 0,4.$$

Réponse c)

Question 5

Source bac : Première spécialité, Métropole 2026 – exercice 3, affirmation 2 – question adaptée

On considère la suite définie par

$$u_n = 2^{-n}.$$

Pour tout entier naturel n , le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à :

- | | |
|------------------|-------------------|
| a) 2 | c) -2 |
| b) $\frac{1}{2}$ | d) $-\frac{1}{2}$ |

**Corrigé**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{2^{-(n+1)}}{2^{-n}} \\ &= 2^{-1} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Réponse b)

Question 6

Source bac : Première spécialité, Polynésie 2026 – exercice 1, partie B, question 3.a – question adaptée

On utilise le programme suivant pour déterminer le premier rang n tel que $u_n \geq k$:

```
u = 400
n = 0
while .....:
    n = n + 1
    u = 1.025*u
```

Quelle condition faut-il écrire dans la boucle **while** ?

- | | |
|---------------|------------|
| a) $u < k$ | c) $u > k$ |
| b) $u \leq k$ | d) $n < k$ |

**Corrigé**

La boucle doit se poursuivre tant que le seuil n'est pas atteint, c'est-à-dire tant que $u < k$.

Réponse a)

Thème IX

Extraits du Bac 2026



Épreuve du baccalauréat

À l'épreuve anticipée de mathématiques de Première, la calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 26 [BAC] D'après Bac 2026 Niveau d'un lac – Asie 2026

Source bac : Première spécialité, Asie, 15 juin 2026 – exercice 1, partie A – questions adaptées

En 2020, le niveau d'un lac est de 1100 mètres. On estime qu'il baisse de 1 % chaque année. On note u_n son niveau n années après 2020 et $u_0 = 1100$.

1. Calculer u_1 et interpréter le résultat.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
3. Écrire le calcul permettant d'estimer le niveau du lac en 2023, sans effectuer le calcul.
4. Compléter le programme qui affiche le nombre d'années à partir duquel le niveau devient inférieur à 1020 mètres.

```
u = 1100
n = 0
while .....:
    n = n + 1
    u = .....
print(n)
```



Corrigé

1. Une baisse de 1 % correspond au coefficient multiplicateur 0,99 :

$$u_1 = 1100 \times 0,99 = 1089 \text{ m}.$$

Le modèle prévoit donc un niveau de 1089 m en 2021.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 0,99u_n.$$

3. L'année 2023 correspond au rang 3. Le calcul demandé est donc

$$1100 \times 0,99^3.$$

4. Le programme doit continuer tant que le niveau reste supérieur ou égal à 1020 m : on complète par $u \geq 1020$ puis $u = 0.99*u$.

Exercice 27 [BAC] D'après Bac 2026 Population d'une ville – sujet zéro 2

Source bac : Première spécialité, sujet zéro 2 – exercice 1 – questions adaptées

On modélise une population par

$$u_0 = 10\,000, \quad u_{n+1} = 1,08u_n - 300.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Expliquer en une phrase le rôle des nombres 1,08 et 300 dans ce modèle.
3. Compléter une fonction Python qui renvoie les $n + 1$ premiers termes de la suite.

**Corrigé**

1.

$$u_1 = 1,08 \times 10\,000 - 300 = 10\,500,$$

$$u_2 = 1,08 \times 10\,500 - 300 = 11\,040.$$

Ainsi,

$$u_1 = 10\,500 \quad \text{et} \quad u_2 = 11\,040.$$

2. Le coefficient 1,08 correspond à une augmentation de 8 %, puis le terme -300 modélise le retrait de 300 habitants.
3. Une fonction correcte initialise u à 10 000, ajoute ce premier terme à la liste, puis répète la mise à jour $u \leftarrow 1,08u - 300$ autant de fois que nécessaire.

Exercice 28 [BAC] D'après Bac 2026 Seuil en Python – Polynésie 2026

Source bac : Première spécialité, Polynésie, 12 juin 2026 – exercice 1, partie B – questions adaptées

En 2025, un club accueille 400 clients. On modélise le nombre de clients par une suite (u_n) vérifiant

$$u_0 = 400, \quad u_{n+1} = 1,025u_n.$$

On souhaite déterminer le premier rang pour lequel $u_n \geq k$.

1. Compléter la fonction Python suivante.

```
def seuil(k):
    u = 400
    n = 0
    while .....:
        n = .....
        u = .....
    return .....
```

2. Expliquer ce que renvoie `seuil(600)` dans le contexte de l'exercice.

**Corrigé**

1. Pour obtenir le plus petit rang tel que $u_n \geq k$, la boucle doit continuer tant que $u < k$. On complète par

$$u < k, \quad n + 1, \quad 1.025*u, \quad n.$$

2. `seuil(600)` renvoie le plus petit entier n pour lequel le modèle prévoit au moins 600 clients, c'est-à-dire le nombre d'années après 2025 nécessaire pour atteindre ce seuil.

Thème X

Ouverture internationale – SAT

Les questions suivantes sont issues de ressources officielles du College Board. Pour ce chapitre, les exercices pertinents relèvent du SAT ; les suites et séries d'AP Calculus BC dépassent largement le programme de Première.

Exercice 29 ★ SAT – Interpreting a term in a discrete model

Source bac : SAT – College Board, Official SAT Practice Test #4, Math, Module 1, question 16

The function

$$f(x) = 206(1.034)^x$$

models the value, in dollars, of a certain bank account by the end of each year from 1957 through 1972, where x is the number of years after 1957.

Which of the following is the best interpretation of “ $f(5)$ is approximately equal to 243” in this context ?

- A. The value of the bank account is estimated to be approximately 5 dollars greater in 1962 than in 1957.
- B. The value of the bank account is estimated to be approximately 243 dollars in 1962.
- C. The value, in dollars, of the bank account is estimated to be approximately 5 times greater in 1962 than in 1957.
- D. The value of the bank account is estimated to increase by approximately 243 dollars every 5 years between 1957 and 1972.

**Corrigé**

Here, x is the number of years after 1957. Therefore $x = 5$ corresponds to 1962, and $f(5) \approx 243$ means that the estimated account value in 1962 is about 243 dollars.

Answer B

Exercice 30 ★ ★ SAT – Exponential decrease

Source bac : SAT – College Board, Official SAT Practice Test #2, Math, Module 1, question 23

For the function q , the value of $q(x)$ decreases by 45 % for every increase in the value of x by 1. If $q(0) = 14$, which equation defines q ?

- A. $q(x) = 0.55(14)^x$
- B. $q(x) = 1.45(14)^x$
- C. $q(x) = 14(0.55)^x$
- D. $q(x) = 14(1.45)^x$

**Corrigé**

A decrease of 45 % corresponds to the multiplier

$$1 - 0.45 = 0.55.$$

Since $q(0) = 14$, the initial value is 14. Hence

$q(x) = 14(0.55)^x$

Answer C

Thème XI

Now We Can Talk : pour aller plus loin

Exercice 31 ★ **Fibonacci – From rabbits to a sequence**

Au XIII^e siècle, Fibonacci étudie un problème de reproduction de lapins. On considère ici le modèle simplifié suivant :

- au début du premier mois, on dispose d'un couple de jeunes lapins ;
- un couple devient adulte au bout d'un mois ;
- à partir du mois suivant, chaque couple adulte engendre chaque mois un nouveau couple ;
- aucun lapin ne meurt.

On note F_n le nombre de couples de lapins présents au début du n -ième mois.

On prend

$$F_1 = 1 \quad \text{et} \quad F_2 = 1.$$

1. Expliquer pourquoi

$$F_3 = 2 \quad \text{et} \quad F_4 = 3.$$

**Corrigé**

Au début du troisième mois, le couple initial est devenu adulte et engendre un nouveau couple. On a donc

$$F_3 = 2.$$

Au début du quatrième mois :

- les deux couples présents au mois précédent sont toujours présents ;
- seul le couple le plus ancien est alors en mesure d'engendrer un nouveau couple.

Ainsi,

$$F_4 = 2 + 1 = 3.$$

Donc

$$F_3 = 2 \quad \text{et} \quad F_4 = 3.$$

2. Calculer F_5 , F_6 , F_7 et F_8 .

Que semble-t-on devoir additionner pour obtenir chaque nouveau terme ?

**Corrigé**

On obtient successivement :

$$F_5 = 3 + 2 = 5,$$

$$F_6 = 5 + 3 = 8,$$

$$F_7 = 8 + 5 = 13,$$

$$F_8 = 13 + 8 = 21.$$

Les premiers termes sont donc

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21.$$

Chaque terme semble être obtenu en additionnant les deux termes précédents.

3. Traduire cette observation par une relation de récurrence.

**Corrigé**

Pour obtenir le nombre de couples présents au mois $n + 2$:

- les F_{n+1} couples déjà présents au mois précédent restent présents ;
- les couples capables de se reproduire correspondent aux F_n couples présents deux mois auparavant.

On obtient donc

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Cette relation est valable pour tout entier $n \geq 1$.

4. Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la liste des N premiers termes de la suite de Fibonacci.

```

1 def fibonacci(N):
2     a = 1
3     b = 1
4     L = [a, b]
5     for k in range(N-2):
6         c = a + b
7         L.append(c)
8         a = b
9         b = c
10    return L

```

**Corrigé**

Les variables **a** et **b** contiennent deux termes consécutifs.

Le terme suivant est donc

$$c = a + b.$$

Une fois ce terme calculé, on décale les deux valeurs :

$$a \leftarrow b \quad \text{puis} \quad b \leftarrow c.$$

Comme les deux premiers termes sont déjà placés dans la liste, il reste à calculer $N - 2$ termes.
L'algorithme complété est celui donné ci-dessus.

5. Que renvoie l'instruction

`fibonacci(10) ?`

**Corrigé**

En poursuivant la relation

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,$$

on obtient

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.$$

Ainsi,

$$\text{fibonacci}(10) = [1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55].$$

Exercice 32 ★★ Syracuse – A sequence with a mystery

On choisit un entier naturel non nul u_0 .

On construit ensuite une suite (u_n) de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Cette suite est appelée suite de Syracuse.

1. On choisit

$$u_0 = 10.$$

Calculer les termes successifs jusqu'à obtenir pour la première fois la valeur 1.



Corrigé

On applique successivement la règle définissant la suite :

$$u_0 = 10,$$

$$u_1 = 5,$$

$$u_2 = 16,$$

$$u_3 = 8,$$

$$u_4 = 4,$$

$$u_5 = 2,$$

$$u_6 = 1.$$

Ainsi, la trajectoire issue de 10 est

$$10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1.$$

2. La suite obtenue à partir de $u_0 = 10$ est-elle monotone ?

Justifier avec deux comparaisons seulement.



Corrigé

On a

$$u_1 = 5 < u_0 = 10,$$

mais

$$u_2 = 16 > u_1 = 5.$$

La suite commence donc par décroître puis augmenter.

Par conséquent,

$$\text{la suite n'est pas monotone.}$$

3. On appelle temps de vol le plus petit entier n tel que

$$u_n = 1.$$

Quel est le temps de vol de la suite issue de 10 ?



Corrigé

D'après les valeurs précédentes,

$$u_6 = 1$$

et aucun des termes

$$u_0, u_1, \dots, u_5$$

n'est égal à 1.

Le temps de vol est donc

$$6.$$

4. Compléter la fonction suivante, qui renvoie la trajectoire de Syracuse d'un entier a , jusqu'à l'obtention de 1.

```

1 def syracuse(a):
2     u = a
3     L = [u]
4     while u != 1:
5         if u % 2 == 0:
6             u = u // 2
7         else:
8             u = 3*u + 1
9         L.append(u)
10    return L

```



Corrigé

La condition

$$u \% 2 == 0$$

signifie que u est pair.

Dans ce cas, on remplace u par

$$\frac{u}{2}.$$

Sinon u est impair et on le remplace par

$$3u + 1.$$

La boucle doit continuer tant que la valeur 1 n'a pas été atteinte, d'où la condition

$$u != 1.$$

L'algorithme complété est donc celui donné ci-dessus.

5. Écrire une fonction `temps_vol(a)` qui renvoie uniquement le temps de vol de la trajectoire issue de a .

```

1 def temps_vol(a):
2     u = a
3     n = 0
4     while u != 1:
5         if u % 2 == 0:
6             u = u // 2
7         else:
8             u = 3*u + 1
9         n = n + 1
10    return n

```



Corrigé

La variable n compte le nombre de transformations effectuées.

Elle est initialisée à 0 et augmente de 1 à chaque calcul d'un nouveau terme.

Lorsque la valeur 1 est atteinte, n est donc exactement le temps de vol.

6. Tester mentalement ou à l'aide de Python plusieurs valeurs initiales.

Quelle conjecture célèbre ces expériences suggèrent-elles ?

Attention : une conjecture n'est pas un théorème.



Corrigé

Les expériences numériques suggèrent que, quelle que soit la valeur initiale entière strictement positive choisie, la trajectoire finit toujours par atteindre 1.

C'est la conjecture de Syracuse :

Toute trajectoire issue d'un entier strictement positif atteint 1.

Cette affirmation a été vérifiée pour un très grand nombre de valeurs initiales, mais elle n'est pas démontrée dans le cas général.

Exercice 33 ★★★ **The Tower of Hanoi – Can you beat the puzzle ?**

Le jeu des tours de Hanoï comporte trois tiges et n disques de diamètres différents.

Au départ, les disques sont empilés sur la première tige, du plus grand au plus petit.

On souhaite transférer toute la tour sur la troisième tige en respectant les règles suivantes :

- on ne déplace qu'un seul disque à la fois ;
- on ne pose jamais un disque sur un disque plus petit.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note u_n le nombre minimal de déplacements nécessaires pour déplacer une tour de n disques.

1. Déterminer u_1 , u_2 puis u_3 .

**Corrigé**

Pour un seul disque, un déplacement suffit :

$$u_1 = 1.$$

Pour deux disques :

- on déplace le petit disque ;
- on déplace le grand disque ;
- on replace le petit disque sur le grand.

Donc

$$u_2 = 3.$$

Pour trois disques :

- déplacer les deux petits disques nécessite au minimum $u_2 = 3$ déplacements ;
- déplacer le plus grand disque nécessite 1 déplacement ;
- replacer les deux petits disques nécessite encore 3 déplacements.

Ainsi,

$$u_3 = 3 + 1 + 3 = 7.$$

Finalement,

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 3, \quad u_3 = 7.$$

2. On considère une tour de $n + 1$ disques.

Expliquer pourquoi tout déplacement de cette tour impose successivement :

- de déplacer les n petits disques ;
- de déplacer le plus grand disque ;
- de replacer les n petits disques.

En déduire que

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

**Corrigé**

Le plus grand disque est initialement situé sous les n autres. Pour pouvoir le déplacer, il est donc nécessaire de déplacer auparavant les n petits disques sur la tige intermédiaire.

Cette première étape nécessite au minimum

$$u_n$$

déplacements.

On peut alors déplacer le plus grand disque, ce qui nécessite un déplacement.

Enfin, il faut transférer les n petits disques sur le plus grand : cela nécessite à nouveau au minimum

$$u_n$$

déplacements.

Ainsi,

$$u_{n+1} = u_n + 1 + u_n$$

$$\boxed{u_{n+1} = 2u_n + 1}$$

3. À l'aide de cette relation, calculer u_4 , u_5 et u_6 .
Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .



Corrigé

On calcule successivement :

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15,$$

$$u_5 = 2u_4 + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31,$$

$$u_6 = 2u_5 + 1 = 2 \times 31 + 1 = 63.$$

Ainsi,

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 15, \quad 31, \quad 63.$$

On remarque que

$$1 = 2^1 - 1, \quad 3 = 2^2 - 1, \quad 7 = 2^3 - 1, \quad 15 = 2^4 - 1.$$

On conjecture donc

$$\boxed{u_n = 2^n - 1}.$$

Il s'agit à ce stade d'une conjecture obtenue à partir des premiers termes.

4. On considère la suite (v_n) définie par

$$v_n = 2^n - 1.$$

Vérifier que

$$v_1 = u_1$$

et que la suite (v_n) satisfait également

$$v_{n+1} = 2v_n + 1.$$

Que peut-on en conclure à ce stade ?



Corrigé

On a

$$v_1 = 2^1 - 1 = 1 = u_1.$$

De plus, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 2^{n+1} - 1 \\ &= 2 \times 2^n - 1 \\ &= 2(2^n - 1) + 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} = 2v_n + 1}$$

La formule conjecturée est donc compatible avec la valeur initiale et avec la relation de récurrence obtenue. Cela constitue un argument très convaincant, mais la démonstration formelle de l'égalité

$$u_n = 2^n - 1$$

pour tout n sera faite plus tard à l'aide d'un raisonnement adapté.

5. Pour la suite de l'exercice, on admet désormais que

$$u_n = 2^n - 1.$$

Compléter la fonction suivante afin qu'elle calcule u_n à partir de la relation de récurrence.

```

1 def hanoi(n):
2     u = 1
3     for k in range(n-1):
4         u = 2*u + 1
5     return u

```

**Corrigé**

On initialise avec

$$u = u_1 = 1.$$

Pour obtenir u_n à partir de u_1 , il faut calculer successivement

$$u_2, u_3, \dots, u_n,$$

soit $n - 1$ nouveaux termes.

À chaque étape, on utilise

$$u_{k+1} = 2u_k + 1.$$

L'algorithme complété est donc celui donné ci-dessus.

6. Un joueur réussit à effectuer exactement deux déplacements par seconde, sans jamais commettre d'erreur.

6. a. Estimer le temps minimal nécessaire pour résoudre une tour de 20 disques.

6. b. Estimer, en années, le temps nécessaire pour une tour de 40 disques.

On prendra

$$1 \text{ année} = 365 \text{ jours.}$$

**Corrigé**

6. a. Pour 20 disques,

$$\begin{aligned} u_{20} &= 2^{20} - 1 \\ &= 1\,048\,575. \end{aligned}$$

À raison de deux déplacements par seconde, la durée minimale est

$$\frac{1\,048\,575}{2} = 524\,287,5$$

secondes.

En jours :

$$\frac{524\,287,5}{24 \times 3600} \simeq 6,07.$$

Il faudrait donc environ

$$\boxed{6,1 \text{ jours}}.$$

6. b. Pour 40 disques,

$$u_{40} = 2^{40} - 1 = 1\,099\,511\,627\,775.$$

À raison de deux déplacements par seconde, la durée vaut environ

$$5,50 \times 10^{11}$$

secondes.

Une année représente

$$365 \times 24 \times 3600 = 31\,536\,000$$

secondes.

Ainsi,

$$\frac{5,50 \times 10^{11}}{31\,536\,000} \simeq 1,74 \times 10^4.$$

Il faudrait donc environ

$$\boxed{17\,400 \text{ ans}}.$$

7. Final challenge.

Le joueur dispose exactement de 24 heures.

Quel est le plus grand nombre de disques pour lequel il peut terminer le jeu à raison de deux déplacements par seconde ?

**Corrigé**

En 24 heures, le joueur peut effectuer

$$2 \times 24 \times 3600 = 172\,800$$

déplacements.

On cherche donc le plus grand entier n tel que

$$2^n - 1 \leq 172\,800.$$

Or,

$$2^{17} - 1 = 131\,071$$

et

$$2^{18} - 1 = 262\,143.$$

Ainsi,

$$131\,071 \leq 172\,800 < 262\,143.$$

Par conséquent,

$$\boxed{n = 17}.$$

Le joueur peut donc terminer une tour de 17 disques en moins de 24 heures, mais pas une tour de 18 disques.

↩️ Fin du TD ➡️