

COURS

Chapitre 4

Variables aléatoires

Version élève

Sommaire du chapitre

I	Variable aléatoire réelle	2
II	Loi de probabilité d'une variable aléatoire	3
III	Répétitions d'épreuves de Bernoulli	5
IV	Espérance mathématique	7
V	Variance et écart-type	9
VI	Linéarité de l'espérance et mise équitable	11
VII	Simulation avec Python	13
VIII	Bilan du chapitre	14



Objectifs du chapitre

- Définir une variable aléatoire réelle sur un univers fini.
- Déterminer et exploiter sa loi de probabilité.
- Calculer et interpréter une espérance, une variance et un écart-type.
- Répéter jusqu'à 4 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes et exploiter l'arbre associé.
- Utiliser la linéarité de l'espérance.
- Utiliser l'espérance pour étudier un jeu et déterminer une mise équitable.
- Simuler une variable aléatoire et expérimenter la fluctuation des moyennes d'échantillons autour de l'espérance.

I Variable aléatoire réelle

Définition 1 (Variable aléatoire réelle (*random variable*))

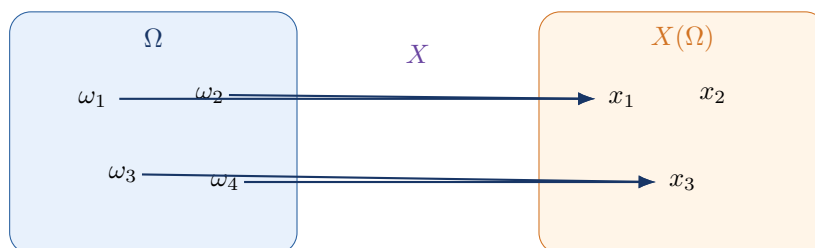
Soit Ω un univers fini associé à une expérience aléatoire.

Définir une **variable aléatoire réelle** X sur Ω , c'est associer à chaque issue $\omega \in \Omega$ un nombre réel $X(\omega)$.

Autrement dit, X est une fonction :

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

L'ensemble des valeurs effectivement prises par X est noté $X(\Omega)$.



I.1 Fil rouge : un jeu avec une urne



Étape 1 – Définir le gain algébrique

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : 4 portent le numéro 1, 3 le numéro 2, 2 le numéro 3 et 1 le numéro 4.

Le joueur paie une **mise de 3 euros**, puis tire une boule au hasard. Le numéro tiré détermine le lot reçu.

Jeu de l'urne – variable aléatoire X				
Mise pour jouer : 3 €		On note X le gain algébrique du joueur.		
	1 Nombre de boules : 4 Lot reçu : 0 € Gain algébrique : -3 €	2 Nombre de boules : 3 Lot reçu : 2 € Gain algébrique : -1 €	3 Nombre de boules : 2 Lot reçu : 4 € Gain algébrique : 1 €	4 Nombre de boules : 1 Lot reçu : 6 € Gain algébrique : 3 €
	Total : 10 boules			

On note X le gain algébrique du joueur :

$$X = \text{lot reçu} - \text{mise}.$$

Ainsi :

$$X(\Omega) = \dots\dots\dots$$

Par exemple, si le joueur tire une boule portant le numéro 3, il reçoit 4 euros mais son gain algébrique vaut

$$4 - 3 = 1 \text{ euro.}$$

I.2 Événements liés à une variable aléatoire

Définition 2 (Événements associés à X)

Soit X une variable aléatoire réelle.

- $\{X = a\}$ est l'ensemble des issues pour lesquelles X prend la valeur a ;
- $\{X \leq a\}$ est l'ensemble des issues pour lesquelles X prend une valeur inférieure ou égale à a .

On définit de même $\{X < a\}$, $\{X \geq a\}$ et $\{X > a\}$.



Fil rouge – traduire des événements

Dans le jeu de l'urne :

- $\{X = -1\}$ signifie « tirer une boule portant le numéro » ;
- $\{X \geq 1\}$ signifie « tirer une boule portant le numéro » ;
- $\{X < 0\}$ signifie « tirer une boule portant le numéro 1 ou 2 ».



Attention à la notation

X désigne une fonction, tandis que $X(\omega)$ désigne le nombre réel associé à une issue ω .
Une écriture comme $P(X \geq 1)$ désigne la probabilité de l'événement $\{X \geq 1\}$.

II Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 3 (Loi de probabilité)

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs distinctes $x_1, \dots, x_m$.

Sa **loi de probabilité** est la donnée des probabilités $P(X = x_i)$. On la présente généralement sous la forme :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_m
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_m

avec $p_i = P(X = x_i)$.

Propriété 1 (Somme des probabilités)

Les événements $\{X = x_1\}, \dots, \{X = x_m\}$ forment une partition de l'univers. Ainsi :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m = 1.$$

 Étape 2 – Construire la loi de X

Jeu de l'urne – variable aléatoire X

Mise pour jouer : 3 €

On note X le gain algébrique du joueur.



1

Nombre de boules : 4

Lot reçu : 0 €

Gain algébrique : -3 €

2

Nombre de boules : 3

Lot reçu : 2 €

Gain algébrique : -1 €

3

Nombre de boules : 2

Lot reçu : 4 €

Gain algébrique : 1 €

4

Nombre de boules : 1

Lot reçu : 6 €

Gain algébrique : 3 €

Total : 10 boules

Mise : 3 euros. On note X le gain algébrique :

$X = \text{lot reçu} - 3.$

La loi de X sera complétée au fur et à mesure du cours.

Comme toutes les boules sont équiprobables, la loi de X est :

x_i	-3	-1	1	3	Total
$P(X = x_i)$					1

Par exemple :

$$P(X \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 3)$$
$$=$$

$P(X \geq 1) = ...$

III Répétitions d'épreuves de Bernoulli



Point important du programme

En Première, on travaille la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, avec

$$n \leq 4.$$

On construit les probabilités à partir de l'arbre. **La loi binomiale générale n'est pas introduite à ce stade.**

III.1 Trois répétitions identiques et indépendantes

On répète trois fois une même épreuve de Bernoulli. On note S le succès et E l'échec, avec

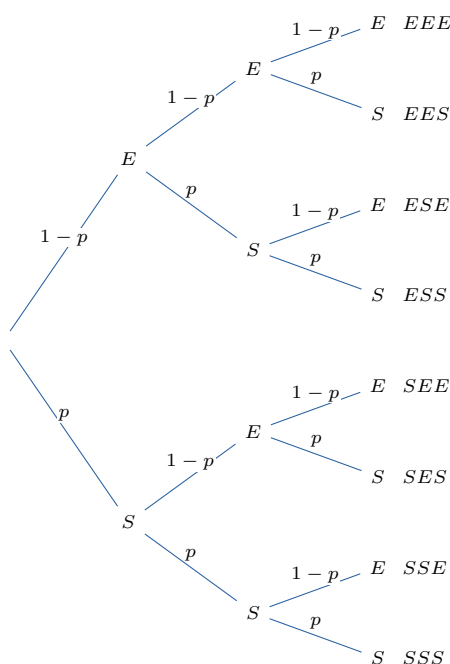
$$P(S) = p \quad \text{et} \quad P(E) = 1 - p.$$

On définit la variable aléatoire

$$Y = \text{nombre de succès obtenus au cours des trois épreuves.}$$

Ainsi :

$$Y(\Omega) = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}.$$



Méthode

Pour déterminer $P(Y = k)$:

1. on repère les chemins contenant exactement k succès ;
2. grâce à l'indépendance, on multiplie les probabilités des branches sur chaque chemin ;
3. on additionne les probabilités des chemins correspondants.

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$				



Pourquoi les coefficients 1, 3, 3, 1 ?

Ils viennent du **nombre de chemins** de l'arbre :

$$1 ; 3 ; 3 ; 1.$$

Par exemple, exactement deux succès sont obtenus sur les trois chemins *SSE*, *SES* et *ESS*.

III.2 Quatre répétitions : savoir compter les chemins



Application avec $p = 0,7$

On répète quatre fois la même épreuve de Bernoulli, indépendamment, avec $P(S) = 0,7$. On note Z le nombre de succès obtenus.

Les valeurs possibles sont

$$Z(\Omega) = \dots\dots\dots$$

Les nombres de chemins donnant respectivement 0, 1, 2, 3 et 4 succès sont :

k	0	1	2	3	4
nombre de chemins	1	4	6	4	1

Pour exactement trois succès, les quatre chemins sont *SSSE*, *SSES*, *SESS* et *ESSS* ; chacun a pour probabilité $0,7^3 \times 0,3$. Ainsi :

$$P(Z = 3) = 4 \times 0,7^3 \times 0,3$$

$P(Z = 3) = \dots\dots\dots$

IV

Espérance mathématique

Définition 4 (Espérance *(expected value)*)

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_m$ avec $P(X = x_i) = p_i$.
L'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^m x_i p_i.$$

Interprétation

L'espérance est une **moyenne théorique**. Sur un grand nombre de répétitions de la même expérience, la moyenne des valeurs observées tend à se rapprocher de $E(X)$.
L'espérance n'est pas nécessairement une valeur effectivement prise par X .

Étape 3 – Espérance du gain

Jeu de l'urne – variable aléatoire X

Mise pour jouer : 3 €

On note X le gain algébrique du joueur.



1

Nombre de boules : 4

Lot reçu : 0 €

Gain algébrique : -3 €

2

Nombre de boules : 3

Lot reçu : 2 €

Gain algébrique : -1 €

3

Nombre de boules : 2

Lot reçu : 4 €

Gain algébrique : 1 €

4

Nombre de boules : 1

Lot reçu : 6 €

Gain algébrique : 3 €

Total : 10 boules

x_i	-3	-1	1	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

À partir de la loi de X :

$$E(X) = \dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots$$
$$= \dots\dots\dots$$
$$E(X) = \dots\dots\dots$$

Ainsi, sur un grand nombre de parties, le joueur

Définition 5 (Jeu équitable)

Un jeu d'argent modélisé par une variable aléatoire de gain X est dit **équitable** lorsque

$$E(X) = 0.$$

**Et dans un vrai casino ?**

Dans un casino, les jeux sont généralement conçus de sorte que l'**espérance du gain du joueur soit négative**. L'**avantage de la maison** (*house edge*) correspond à la perte moyenne théorique du joueur, exprimée en pourcentage de sa mise.

Considérons un joueur qui mise 100 euros sur un **pari à chances simples**, par exemple sur la couleur **rouge**. Pour ce type de pari :

- si la boule tombe sur une case rouge, le joueur gagne 100 euros ;
- sinon, il perd sa mise de 100 euros.

Les paris **rouge/noir**, **pair/impair** ou **1–18/19–36** fonctionnent selon le même principe.

Roulette européenne :

La roulette européenne possède 37 cases :

18 rouges, 18 noires, 1 zéro.

Le zéro n'étant ni rouge ni noir, une mise sur rouge est perdue lorsque la boule tombe sur le zéro. Si X désigne le gain algébrique du joueur, alors :

$$X = \begin{cases} 100 & \text{avec la probabilité } \frac{18}{37}, \\ -100 & \text{avec la probabilité } \frac{19}{37}. \end{cases}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E(X) &= 100 \times \frac{18}{37} - 100 \times \frac{19}{37} \\ &= 100 \times \frac{-1}{37} \end{aligned}$$

$$E(X) \approx -2,70 \text{ €}$$

L'avantage du casino est donc d'environ

$$2,70 \text{ \%}.$$

Roulette américaine :

La roulette américaine possède 38 cases :

18 rouges, 18 noires, 0 et 00.

Ni 0 ni 00 n'étant rouges, le joueur gagne avec la probabilité $\frac{18}{38}$ et perd avec la probabilité $\frac{20}{38}$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} E(X) &= 100 \times \frac{18}{38} - 100 \times \frac{20}{38} \\ &= 100 \times \frac{-2}{38} \end{aligned}$$

$$E(X) \approx -5,26 \text{ €}$$

L'avantage du casino est donc d'environ

$$5,26 \text{ \%}.$$

Une espérance de $-2,70$ euros ne signifie pas que le joueur perd 2,70 euros à chaque partie.

Cela signifie que, sur un très grand nombre de parties identiques avec une mise de 100 euros, la perte moyenne théorique est d'environ 2,70 euros par partie.

V Variance et écart-type

Définition 6 (Variance (*variance*))

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_m$, avec $P(X = x_i) = p_i$.

La **variance** de X est :

$$V(X) = \sum_{i=1}^m p_i (x_i - E(X))^2.$$

Propriété 2 (Formule de König–Huygens)

On peut aussi calculer la variance grâce à :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2,$$

où

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^m x_i^2 P(X = x_i).$$

Définition 7 (Écart-type (*standard deviation*))

L'**écart-type** de X est défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$



Interprétation

La variance et l'écart-type mesurent la dispersion des valeurs de X autour de son espérance. L'écart-type s'exprime dans la même unité que X .



Étape 4 – Variance et écart-type du gain

Jeu de l'urne – variable aléatoire X

Mise pour jouer : **3 €** On note X le gain algébrique du joueur.



1
Nombre de boules : 4
Lot reçu : 0 €
Gain algébrique : -3 €

2
Nombre de boules : 3
Lot reçu : 2 €
Gain algébrique : -1 €

3
Nombre de boules : 2
Lot reçu : 4 €
Gain algébrique : 1 €

4
Nombre de boules : 1
Lot reçu : 6 €
Gain algébrique : 3 €

Total : 10 boules

Mise : 3 euros. On note X le gain algébrique :

$$X = \text{lot reçu} - 3.$$

La loi de X sera complétée au fur et à mesure du cours.

Nous avons $E(X) = -1$. Calculons d'abord $E(X^2)$:

x_i	-3	-1	1	3	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= (-3)^2 \times \frac{4}{10} + (-1)^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{2}{10} + 3^2 \times \frac{1}{10} \\
 &= \frac{36 + 3 + 2 + 9}{10}
 \end{aligned}$$

$E(X^2) = \dots\dots\dots$

D'après la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
 &= 5 - (-1)^2
 \end{aligned}$$

$V(X) = \dots\dots\dots$

Enfin :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$\sigma(X) = \dots\dots\dots$

VI Linéarité de l'espérance et mise équitable

Propriété 3 (Linéarité de l'espérance)

Soit X une variable aléatoire et soient a et b deux réels. Alors :

$$\boxed{E(aX + b) = aE(X) + b.}$$



Cette propriété permet notamment d'étudier directement l'effet d'un changement de mise sur le gain moyen, sans reconstruire toute la loi.



On conserve les mêmes boules et les mêmes lots, mais la mise de 3 euros est remplacée par une mise de m euros.

Jeu de l'urne – variable aléatoire X

Mise pour jouer : $m \text{ €}$

On note X le gain algébrique du joueur.

1	2	3	4
Nombre de boules : 4	Nombre de boules : 3	Nombre de boules : 2	Nombre de boules : 1
Lot reçu : 0 €	Lot reçu : 2 €	Lot reçu : 4 €	Lot reçu : 6 €
Gain algébrique : $-m \text{ €}$	Gain algébrique : $2 - m \text{ €}$	Gain algébrique : $4 - m \text{ €}$	Gain algébrique : $6 - m \text{ €}$

Total : 10 boules

On note G_m le nouveau gain algébrique du joueur.

Déterminer la valeur de m pour laquelle le jeu est équitable.

Méthode 1 – En reconstruisant la loi de G_m

Compléter la loi de G_m , puis calculer son espérance en fonction de m .

g	$-m$	$2-m$	$4-m$	$6-m$
$P(G_m = g)$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Méthode 2 (Difficile) – En utilisant la linéarité de l'espérance

Si L désigne le lot reçu, alors, dans le jeu initial,

$$X = L - 3,$$

donc

$$L = X + 3.$$

Avec une mise de m euros :

$$\begin{aligned} G_m &= L - m \\ &= X + 3 - m. \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(G_m) &= E(X + 3 - m) \\ &= E(X) + 3 - m \\ &= -1 + 3 - m \end{aligned}$$

$$\boxed{E(G_m) = 2 - m}$$

Le jeu est équitable lorsque $E(G_m) = 0$. Ainsi :

$$2 - m = 0$$

$$\boxed{m = 2}$$

On retrouve bien une mise équitable de 2 euros.

VII Simulation avec Python

Définition 8 (La fonction `random()`)

Après l'instruction

```
from random import random,
```

la fonction `random()` renvoie un nombre choisi aléatoirement dans $[0 ; 1[$.

Ainsi, si $0 \leq p \leq 1$, le test `random() < p` se réalise avec probabilité p .



Fil rouge – simuler une partie

La loi du gain est

x	-3	-1	1	3
$P(X = x)$	0,4	0,3	0,2	0,1

On partage donc $[0 ; 1[$ en intervalles de longueurs 0,4, 0,3, 0,2 et 0,1.

```
from random import random
def gain_urne():
    tirage = random()
    if tirage < 0.4:
        return -3
    elif tirage < 0.7:
        return -1
    elif tirage < 0.9:
        return 1
    else:
        return 3
```

En répétant cette simulation un grand nombre de fois, la moyenne des gains observés doit se rapprocher de $E(X) = -1$.

VII.1 Moyennes d'échantillons : expérimentation

Pour le fil rouge, on a

$$\mu = E(X) = -1 \quad \text{et} \quad \sigma = 2.$$

Une moyenne calculée sur un échantillon de n parties simulées fluctue autour de μ . Le programme demande notamment d'expérimenter, sur N échantillons, la proportion des cas où

$$|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Ici, cela devient simplement

$$|m + 1| \leq \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Cette expérimentation peut être menée avec Python ou un tableur ; elle prolonge directement la simulation du jeu ci-dessus.

VIII Bilan du chapitre

Propriété 4 (À connaître)

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, \dots, x_m$, avec $P(X = x_i) = p_i$.

1. Répétitions de Bernoulli, $n \leq 4$: la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités de ses branches ; pour obtenir $P(Y = k)$, on additionne les probabilités des chemins comportant exactement k succès.

2. Loi de probabilité

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1.$$

3. Espérance

$$E(X) = \sum_{i=1}^m x_i p_i.$$

4. Variance et formule de König–Huygens

$$V(X) = \sum_{i=1}^m p_i (x_i - E(X))^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

5. Écart-type

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

6. Linéarité de l'espérance

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

↩ **Fin du cours** ↪