

COURS

Chapitre 3

Probabilités conditionnelles et indépendance

Version élève

Sommaire du chapitre

I	Probabilités conditionnelles	2
II	Arbres pondérés et probabilités totales	4
III	Indépendance de deux événements	7
IV	Succession de deux épreuves indépendantes	8
V	Répétition d'épreuves de Bernoulli	9
VI	Simulation avec Python	11
VII	Bilan – Probabilités conditionnelles et indépendance	13

I Probabilités conditionnelles



Bayes, de Moivre et Laplace

Les probabilités conditionnelles apparaissent dans des travaux de Bayes et de Moivre au XVIII^e siècle, puis sont développées par Laplace. Elles interviennent aujourd'hui dans les tests médicaux, le contrôle de qualité, la fiabilité ou le diagnostic.



Objectifs du chapitre

- Calculer et interpréter une probabilité conditionnelle.
- Utiliser un arbre pondéré et la formule des probabilités totales.
- Utiliser ou justifier l'indépendance de deux événements.
- Représenter deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.
- Pour $n \leq 4$, représenter la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes afin de calculer des probabilités.

I.1 Définition

Définition 1 (Probabilité conditionnelle (*conditional probability*))

Soient A et B deux événements d'un même univers tels que $P(A) \neq 0$. La probabilité de B sachant que A est réalisé se note $P_A(B)$ et

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$



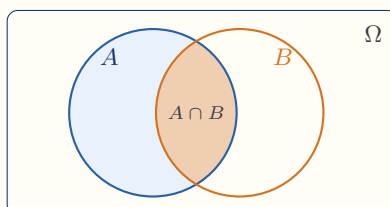
Comprendre le conditionnement

Lorsque l'on sait que l'événement A est réalisé, on ne considère plus que les issues qui appartiennent à A : **A devient le nouvel univers de référence.**

Parmi les issues de A , celles qui réalisent aussi B sont exactement les issues de $A \cap B$. La formule

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

compare donc la probabilité de $A \cap B$ à celle de A .



Notation française et notation internationale

$P_A(B)$ signifie : « probabilité de B sachant A ». Le conditionnement porte sur l'événement écrit en indice. Dans la littérature internationale, et notamment aux États-Unis, on utilise généralement la notation

$$P(B | A).$$

Ainsi,

$$P_A(B) = P(B | A).$$

La notation $P(B | A)$ a également été utilisée en France : à la fin des années 1990, les sujets du baccalauréat employaient encore $P(B/A)$; en 1998, les notations $P(B/A)$ et $P_A(B)$ étaient explicitement admises. La notation $P_A(B)$ s'est ensuite imposée dans les programmes français.

? Exercice 1

Une usine produit des articles. On note F l'événement « l'article présente un défaut de fabrication » et E l'événement « l'article présente un défaut d'emballage ». On sait que $P(F) = 0,06$, $P(E) = 0,08$ et $P(F \cup E) = 0,12$. Un article choisi au hasard présente un défaut d'emballage. Quelle est la probabilité qu'il présente aussi un défaut de fabrication ?



Corrigé

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1.2 Formule des probabilités composées



Formule des probabilités composées (multiplication rule)

Pour $P(A) \neq 0$,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Si $P(B) \neq 0$, on a également

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A).$$



Formule de Bayes (Bayes' theorem / Bayes' rule)

Lorsque $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, les deux écritures de $P(A \cap B)$ donnent

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) P(A)}{P(B)}.$$

Avec la notation internationale :

$$P(A | B) = \frac{P(B | A) P(A)}{P(B)}.$$

Il s'agit ici d'une conséquence directe de la définition d'une probabilité conditionnelle.



Une vaccination

Dans une population, 85% des individus sont vaccinés. Parmi les personnes vaccinées, 2% contractent malgré tout la maladie.

.....

.....

.....

.....

.....

II Arbres pondérés et probabilités totales

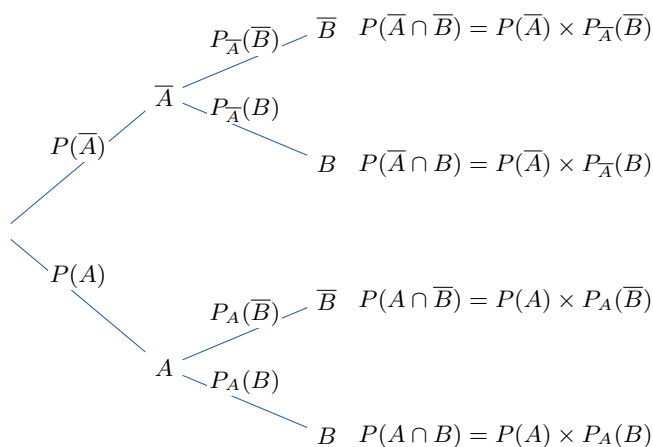
II.1 Lire et compléter un arbre pondéré



Les trois règles d'un arbre pondéré (*probability tree*)

Un arbre pondéré représente des événements successifs. Chaque branche porte une probabilité.

- Règle des nœuds** : la somme des probabilités portées par les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- Règle des chemins** : la probabilité d'un chemin complet est le produit des probabilités inscrites sur ce chemin. Un chemin complet représente l'intersection des événements rencontrés.
- Règle de la somme** : la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins complets, deux à deux incompatibles, qui réalisent cet événement.



II.2 Partition de l'univers

Définition 2 (Partition (*partition*))

Des événements $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω lorsque

- ils sont deux à deux incompatibles ;
- leur réunion est égale à Ω .

Autrement dit, chaque issue de Ω appartient à un et un seul des événements A_i .



Cas le plus fréquent

Pour tout événement A , les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de Ω .

11.3 Formule des probabilités totales

Théorème 1 (Formule des probabilités totales (*law of total probability*))

Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de Ω , alors pour tout événement B ,

$$\boxed{P(B) = P(A_1 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)}.$$

En utilisant les probabilités conditionnelles,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P_{A_i}(B).$$

Exercise 2

Le parc informatique d'une entreprise est composé de trois marques A , B et C . On sait que 60% des ordinateurs sont de marque A , 30% de marque B et les autres de marque C . Parmi eux, respectivement 15%, 20% et 50% sont des ordinateurs portables. On choisit au hasard la fiche d'un ordinateur. Quelle est la probabilité que ce soit celle d'un ordinateur portable?

 Corrigé

II.4 Probabilité inversée : utiliser Bayes

Exercise 3

Dans une population, 5% des personnes sont atteintes d'une maladie. Un test est positif chez 96% des personnes malades et chez 8% des personnes non malades. On choisit une personne au hasard et son test est positif. Quelle est la probabilité qu'elle soit réellement malade ?

 Corrigé

.....

.....

.....

.....

.....

III Indépendance de deux événements

III.1 Définition

Définition 3 (Événements indépendants (*independent events*))

Deux événements A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$



Interprétation

Dire que A et B sont indépendants signifie que savoir que l'un est réalisé ne modifie pas la probabilité de l'autre. Lorsque $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$,

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff P_A(B) = P(B) \iff P_B(A) = P(A).$$



Indépendants $\neq$ incompatibles

Deux événements **incompatibles** ne peuvent pas se produire simultanément :

$$A \cap B = \emptyset \implies P(A \cap B) = 0.$$

Deux événements **indépendants** vérifient au contraire

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

En particulier, si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors

$$P(A)P(B) > 0,$$

donc A et B ne peuvent pas être à la fois incompatibles et indépendants.



Tester une indépendance

On lance un dé équilibré à six faces. On note A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un multiple de 3 ».

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

IV

Succession de deux épreuves indépendantes



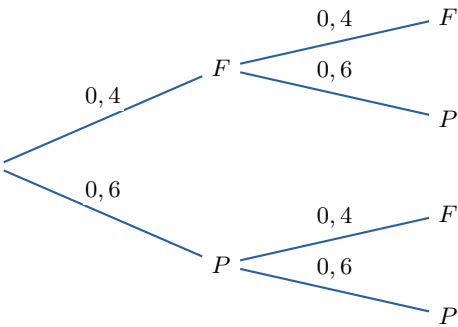
Deux épreuves indépendantes (*independent trials*)

Lorsque deux épreuves sont indépendantes, les probabilités de la seconde épreuve sont les mêmes quel que soit le résultat obtenu à la première. On peut représenter la succession par un arbre ou par un tableau.



Deux lancers d'une pièce biaisée

Une pièce donne pile avec la probabilité 0,6. On la lance deux fois, les deux lancers étant indépendants.



IV.1 Représentation par un tableau

	<i>P</i> au 2 ^e lancer	<i>F</i> au 2 ^e lancer
<i>P</i> au 1 ^{er} lancer	$0,6 \times 0,6$	$0,6 \times 0,4$
<i>F</i> au 1 ^{er} lancer	$0,4 \times 0,6$	$0,4 \times 0,4$



Arbre ou tableau

Pour deux épreuves indépendantes, le tableau est souvent compact. Pour trois ou quatre répétitions d'une même épreuve de Bernoulli, l'arbre est généralement plus naturel.

v Répétition d'épreuves de Bernoulli

V.1 Épreuve de Bernoulli

Définition 4 (Épreuve de Bernoulli (*Bernoulli trial*))

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne comportant que deux issues :

- un **succès** S (*success*), de probabilité p ;
- un **échec** E (*failure*), de probabilité $1 - p$.

V.2 Répéter une épreuve identique et indépendante

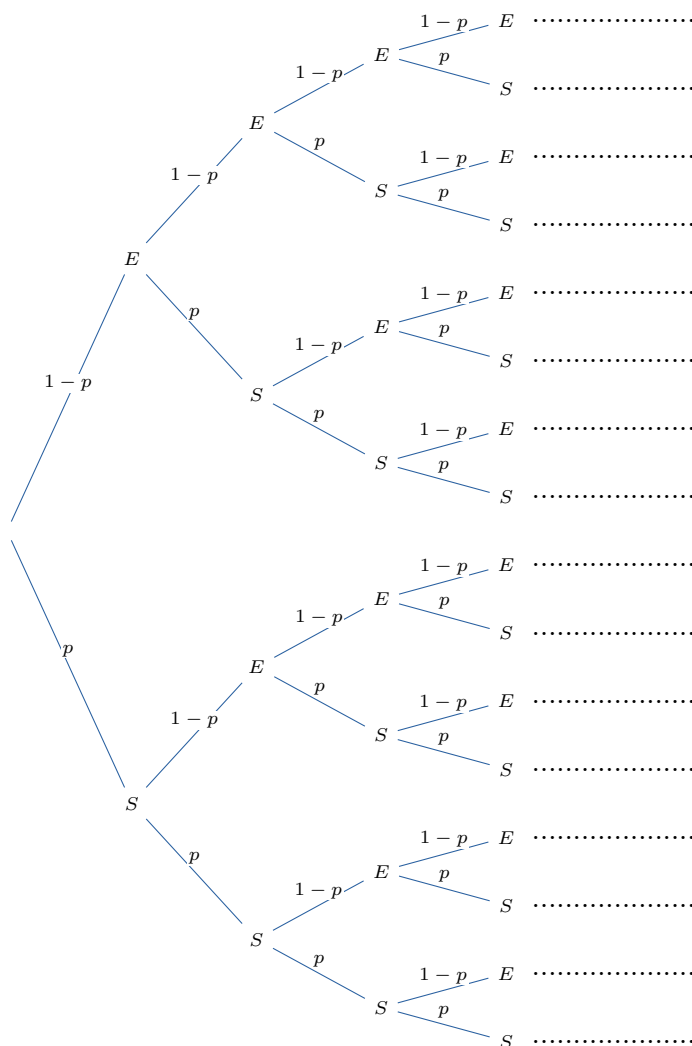


Répétition de n épreuves de Bernoulli

En Première, on étudie des répétitions de n épreuves de Bernoulli **identiques et indépendantes**, avec $n \leq 4$. À chaque niveau de l'arbre, on retrouve donc les mêmes probabilités p et $1 - p$.

V.3 Quatre répétitions : compter les succès

Pour quatre répétitions, l'arbre possède $2^4 = 16$ chemins. À l'extrémité de chaque chemin, on compte le nombre de succès obtenus.



Le tableau suivant est à **compléter** à partir du comptage des chemins de l'arbre. Il ne constitue pas une formule à apprendre : les coefficients 1, 4, 6, 4, 1 proviennent du nombre de chemins correspondants.

VI Simulation avec Python



La fonction `random()`

Après l'instruction

```
from random import random
```

la fonction `random()` permet de simuler le choix aléatoire d'un nombre décimal dans l'intervalle

$[0 ; 1[$.

Ainsi, si $p \in [0 ; 1]$, on peut écrire

```
tirage = random()
```

puis considérer que l'épreuve est un succès lorsque

```
tirage < p.
```

La probabilité que cette condition soit vérifiée est alors p .

```
from random import random

tirage = random()
print(tirage)
```



Simuler une épreuve de Bernoulli

Python permet de répéter un grand nombre de fois une épreuve de Bernoulli et de comparer la fréquence observée des succès à la probabilité théorique p .

```
from random import random

def simulation(p, n):
    succes = 0
    for i in range(n):
        tirage = random()
        if tirage < p:
            succes = succes + 1
    return succes / n
```



Lire le programme

- `tirage = random()` produit un nombre aléatoire dans $[0 ; 1[$;
- la condition `tirage < p` modélise un succès de probabilité p ;
- la variable `succes` compte le nombre de succès obtenus;
- après n répétitions, `succes / n` est la fréquence des succès observés.



Exercice 5

Que représente la valeur renvoyée par l'appel `simulation(0.7, 10000)` ? Doit-on obtenir exactement 0,7 ?

**Corrigé**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Simulation et modèle**

La fréquence obtenue varie d'une simulation à l'autre. Elle peut être proche de p , mais une simulation ne démontre pas une probabilité. Elle sert à expérimenter et à contrôler la cohérence d'un modèle.

**Algorithme au programme**

Le programme cite également la méthode de Monte-Carlo comme exemple d'algorithme. Elle pourra être rencontrée dans des activités ou des exercices, sans constituer une nouvelle notion théorique de ce chapitre.

VII Bilan – Probabilités conditionnelles et indépendance

1. Probabilité conditionnelle

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

avec $P(A) \neq 0$.

2. Arbre pondéré et probabilités composées

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

Dans un arbre : somme aux nœuds, produit le long d'un chemin, puis somme des chemins favorables.

3. Probabilités totales Si (A_i) est une partition de Ω ,

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P_{A_i}(B).$$

4. Indépendance

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Si $P(A) \neq 0$,

A et B indépendants $\iff P_A(B) = P(B)$.

5. Épreuves indépendantes Dans un arbre, les probabilités de l'épreuve suivante ne dépendent pas du chemin déjà parcouru.

6. Bernoulli Succès : p ; échec : $1 - p$. Pour $n \leq 4$, on construit l'arbre et on additionne les probabilités des chemins favorables.

Réflexes

- traduire précisément les événements ;
- sur un arbre, compléter d'abord les branches complémentaires ;
- multiplier le long d'un chemin ;
- additionner les chemins incompatibles qui réalisent l'événement ;
- pour « au moins un », penser à l'événement contraire.

Lexique essentiel

- probabilité conditionnelle : (*conditional probability*) ;
- arbre pondéré : (*probability tree*) ;
- indépendance : (*independence*) ;
- épreuve : (*trial*) ;
- succès / échec : (*success / failure*) ;
- événement contraire : (*complementary event*).