Math93.com

Pourcentages

Première ES

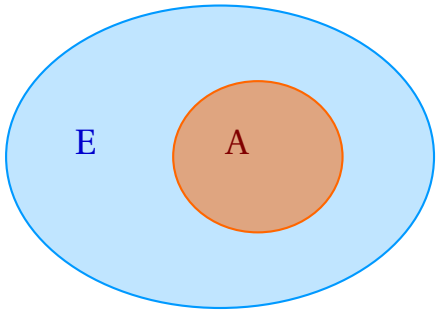
I Pourcentages et proportions

I.1 Définition : calculer un pourcentage

Définition 1 (Pourcentage d'une partie par rapport à un tout)

Soit A une partie d'un ensemble E.
On note card E et card A les nombres d'éléments de respectivement E et A.
La proportion des éléments de A par rapport à ceux de E est le quotient p :

$$p = \frac{\text{card } A}{\text{card } E} \in [0\ ;\ 1]$$



I.2 Exemple : parts de marché

En 2013, il s'est vendu dans le monde 1 004,2 millions de smartphones (plus d'un milliard). Le leader est Samsung avec 313,9 millions de ventes suivi par Apple avec 154,3 millions d'appareils vendus.
En 2013, le pourcentage (ou la proportion) de smatphones Samsung parmi tous les smartphones vendus est donc, arrondi au dix-millième ou au centième de pour-cent :

$$p_S = \frac{313{,}9 \times 10^6}{1\,004{,}2 \times 10^6} = \frac{313{,}9}{1\,004{,}2} \approx 0{,}3126 \text{ soit } \boxed{p_S \approx 31{,}26\ \%}$$

Source : lefigaro.fr

Remarque

La proportion p_S peut s'écrire indifféremment

$$p_S \approx 0{,}3126 \text{ ou } p_S \approx 31{,}26\% \text{ ou } p_S \approx \frac{31{,}26}{100}$$

Remarque

Il faut que les deux termes du quotient soient de **même « unité »**, ne pas mélanger millions et milliers et milliards par exemple !

I.3 Définition : appliquer un pourcentage

Définition 2 (Pourcentage d'une quantité)

Prendre t % d'un nombre c'est le multiplier $\frac{t}{100}$.

I.4 Exemple : Reçus au bac ES 2014

Sur les 108 192 candidats présents aux épreuves du baccalauréat de la série ES en 2014, 89,66 % ont été reçus. Cela représente donc 97 004 candidats admis car :

$$89,66\ \% \times 108\,192 = \frac{89,66}{100} \times 108\,192 = 0,8966 \times 108\,192 \approx \underline{97\,004}$$

Source : math93.com

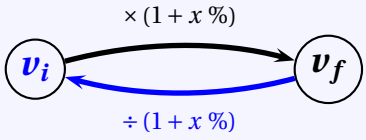
II Pourcentages et évolutions

II.1 Propriété : augmenter ou diminuer de x %

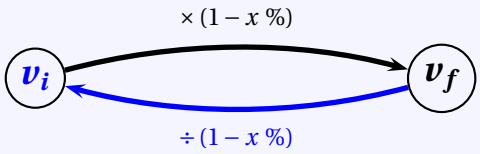
Propriété 1

Soit x un nombre strictement positif.

1. Augmenter une quantité V de x % c'est la multiplier par $k = (1 + x\ \%)$.



2. Diminuer une quantité V de x % c'est la multiplier par $k = (1 - x\ \%)$.



Preuve

1. Augmenter une quantité V de x % c'est lui ajouter x % de V. Elle passe donc d'une valeur initiale $V = v_i$ à une valeur finale $v_f = v_i + v_i \times x\ \%$. Or après factorisation on obtient :

$$v_f = v_i + v_i \times x\ \% = v_i \times \left(1 + x\ \%\right) = v_i \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) = v_i \times \frac{100 + x}{100}$$

2. Diminuer une quantité V de x % c'est lui soustraire x % de V. Elle passe donc d'une valeur initiale $V = v_i$ à une valeur finale $v_f = v_i - v_i \times x\ \%$. Or après factorisation on obtient :

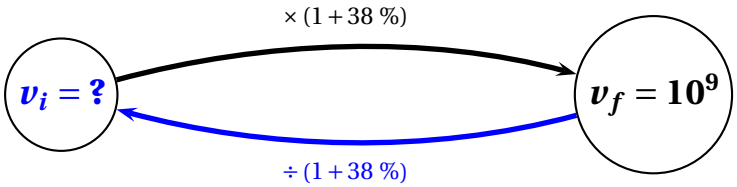
$$v_f = v_i - v_i \times x\ \% = v_i \times \left(1 - x\ \%\right) = v_i \times \left(1 - \frac{x}{100}\right) = v_i \times \frac{100 - x}{100}$$

II.2 Exemple

Sur un site on peut lire :
« Les smartphones ont battu tous les records en 2013. Un peu plus d'un milliard de téléphones intelligents ont été vendus l'an dernier, soit 38 % *de plus qu'en 2012 [...] »*

Source : lefigaro.fr

On peut alors évaluer le nombre de smatrphones vendus en 2012.



En 2012 il s'est donc vendu environ 725 millions de smartphones car :

$$v_i = 10^9 \div (1 + 38\ \%) = 10^9 \div 1,38 \approx 724\,637\,681$$

II.3 Définition : pourcentage d'évolution

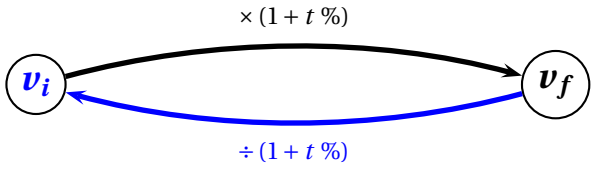
Définition 3

Soit une quantité qui évolue d'une valeur initiale v_i à une valeur finale v_f.

1. Le rapport $\dfrac{v_f - v_i}{v_i}$ s'appelle **taux d'évolution** ou **variation relative** de v_i à v_f.
2. Soit t le réel (positif ou négatif) tel que :

$$\frac{v_f - v_i}{v_i} = \frac{t}{100} = t\,\%$$

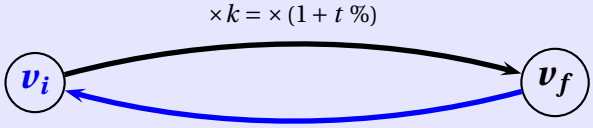
On dit que t % est le **pourcentage d'évolution** ou **taux d'évolution** de v_i à v_f



Remarque
Le taux d'évolution peut être positif ou négatif. Si le taux d'évolution est positif, l'évolution est une augmentation, sinon c'est une diminution.

III Bilan

Bilan



$k = 1 + t\,\%$	$t\,\% = k - 1$
$k = \dfrac{V_f}{V_i}$	$t\,\% = \dfrac{V_f - V_i}{V_i}$

III.1 Passage du taux au coefficient multiplicateur

Il est utile de savoir rapidement passer de coefficient multiplicateur au taux d'évolution et réciproquement.

III.1.1 Pour une augmentation :

Interprétation	**Coefficient multiplicateur k**	**Pourcentage d'évolution t %**
Augmentation de 1 %	$\times(1+1\ \%) = \boxed{\times 1,01}$	$t\ \% = +1\ \% = 0,01$
Augmentation de 5 %	$\times(1+5\ \%) = \boxed{\times 1,05}$	$t\ \% = +5\ \% = 0,05$
Augmentation de 10 %	$\times(1+10\ \%) = \boxed{\times 1,1}$	$t\ \% = +10\ \% = 0,1$
Augmentation de 20 %	$\times(1+20\ \%) = \boxed{\times 1,2}$	$t\ \% = +1\ \% = 0,2$
Augmentation de 50 % (on ajoute la moitié)	$\times(1+50\ \%) = \boxed{\times 1,5}$	$t\ \% = +50\ \% = 0,5$
La valeur double	$\times 2$	$(1+t\ \%) = 2 \Longleftrightarrow \boxed{t\ \% = 1 = 100\ \%}$
La valeur triple	$\times 3$	$(1+t\ \%) = 3 \Longleftrightarrow \boxed{t\ \% = 2 = 200\ \%}$
La valeur quadruple	$\times 4$	$(1+t\ \%) = 4 \Longleftrightarrow \boxed{t\ \% = 3 = 300\ \%}$
La valeur est multipliée par 10	$\times 10$	$(1+t\ \%) = 10 \Longleftrightarrow \boxed{t\ \% = 9 = 900\ \%}$
La valeur est multipliée par 11	$\times 11$	$(1+t\ \%) = 11 \Longleftrightarrow \boxed{t\ \% = 10 = 1000\ \%}$

III.1.2 Pour une baisse :

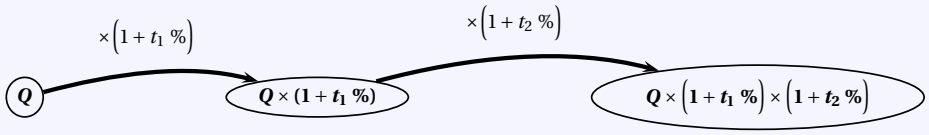
Interprétation	**Coefficient multiplicateur k**	**Pourcentage d'évolution t %**
Baisse de 1 %	$\times(1-1\ \%) = \boxed{\times 0,99}$	$t\ \% = -1\ \% = -0,01$
Baisse de 5 %	$\times(1-5\ \%) = \boxed{\times 0,95}$	$t\ \% = -5\ \% = -0,05$
Baisse de 10 %	$\times(1-10\ \%) = \boxed{\times 0,9}$	$t\ \% = -10\ \% = -0,1$
Baisse de 20 %	$\times(1-20\ \%) = \boxed{\times 0,8}$	$t\ \% = -20\ \% = -0,2$
Baisse de 50 % (on divise par deux)	$\times(1-50\ \%) = \boxed{\times 0,5 = \times\frac{1}{2}}$	$t\ \% = -50\ \% = -0,5$
Baisse de 75 % (on divise par 4)	$\times(1-75\ \%) = \boxed{\times 0,25 = \times\frac{1}{4}}$	$t\ \% = -75\ \% = -0,75$
Baisse de 80 % (on divise par 5)	$\times(1-80\ \%) = \boxed{\times 0,2 = \times\frac{1}{5}}$	$t\ \% = -80\ \% = -0,8$
Baisse de 90 % (on divise par 10)	$\times(1-90\ \%) = \boxed{\times 0,1 = \times\frac{1}{10}}$	$t\ \% = -90\ \% = -0,9$
Baisse de 100 % (on perd tout)	$\times(1-100\ \%) = \boxed{\times 0}$	$t\ \% = -100\ \% = -1$

IV Évolutions successives

IV.1 Propriété

Propriété 2

Si une quantité Q qui subit une évolution relative (hausse ou baisse) d'un taux de t_1 % suivie d'un autre évolution relative d'un taux de t_2 %,
alors cette quantité Q est multipliée par le coefficient $\left(1+t_1\ \%\right)\times\left(1+t_2\ \%\right)$.



IV.2 Exemple 1

Le cours d'une action augmente une première fois de 10 % puis une seconde fois de 20 %. Quel est le pourcentage global d'augmentation ?

- Augmenter de 10 % c'est multiplier par $1+10\ \%=1,1$.
- Augmenter de 20 % c'est multiplier par $1+20\ \%=1,2$.
- Après ces deux augmentations, le prix de l'action est donc multiplié par :

$$k=1,1\times1,2=1,32$$

- Le coefficient multiplicateur de ces deux évolutions est donc de $k=1,32$. Or puisque

$$k=1,32=1+0,32=1+\frac{32}{100}=1+32\ \%$$

le taux de l'augmentation globale est de $t\ \%=32\%$.

IV.3 Exemple 2 : L'erreur du JT de France 2

Jean-Paul Chapel lors du JT de France 2 du 19 Février 2013 précise en réponse à une question de la journaliste Elise Lucet :

- **Elise Lucet**
  « [...] *notre facture pourrait gonfler de 30 % en 5 ans.* »
- **Jean-Paul Chapel** du service économie de France 2 :
  « [...] *On n'avait jamais vu ça ! + 6 % par an pendant 5 ans, pas besoin d'avoir fait polytechnique pour voir que ça représente une hausse de 30 %.* [...] »

Source : math93.com

Faire une augmentation de + 6 % pendant cinq ans, cela revient à multiplier le montant de la facture par le coefficient :

$$k=\left(1+6\ \%\right)^5=1,06^5\approx1,3382255776\approx1+0,34=1+34\%$$

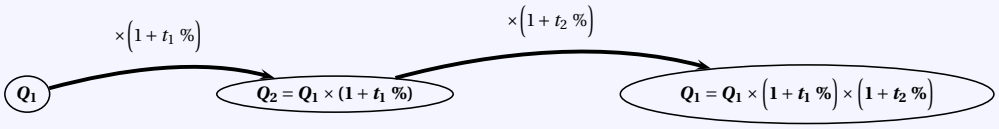
Cela correspond donc a une augmentation d'environ 34 % et non de 30 % comme le précisait le journaliste.

V Évolutions réciproques

V.1 Propriété

Propriété 3

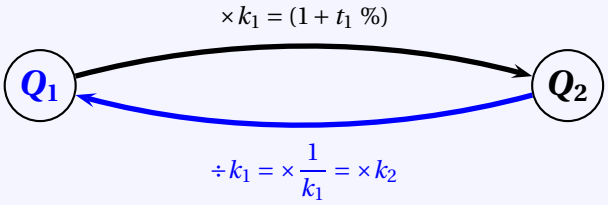
Soit une quantité Q qui subit deux évolutions successives telles que Q passe de la valeur Q_1 à la valeur Q_2, avec un taux d'évolution t_1 %, puis de la valeur Q_2 à la valeur initiale Q_1, avec un taux d'évolution t_2 %.



On a alors de façon évidente :

$$\boxed{\left(1+t_1\ \%\right) \times \left(1+t_2\ \%\right) = 1}$$

On dit que **t_2 % est le taux d'évolution réciproque de t_1 %** et réciproquement.



$$\boxed{k_2 = \frac{1}{k_1} \Longrightarrow t_2\% = k_2 - 1 = \frac{1}{k_1} - 1} \text{ ou } \boxed{t_2\ \% = \frac{1}{\left(1+t_1\ \%\right)} - 1}$$

V.2 Exemple

Le prix de vente d'un objet a augmenté de 15 % le 1er septembre. Le 20 septembre, le vendeur veut accorder une remise à son client préféré de telle sorte que le prix à payer soit identique à celui pratiqué avec l'augmentation. Quel pourcentage de réduction doit-il consentir ?

- Augmenter de t_1 % = 15 % c'est multiplier par $1 + 15\ \% = 1,15$.
- Le taux d'évolution réciproque t_2 % vérifie donc l'égalité :

$$\left(1+t_1\ \%\right) \times \left(1+t_2\ \%\right) = 1$$

soit

$$1,15 \times \left(1+t_2\ \%\right) = 1$$

d'où

$$t_2\ \% = \frac{1}{1,15} - 1 \approx -0,13043478 \approx -13,04\ \%$$

Le vendeur accorde donc **une remise de 13,04 %** sur le prix pratiqué le 20 septembre.

VI Indices

VI.1 Définition

Définition 4 (Indice base 100)

Soient Q_1 et Q_2 deux valeur d'une même grandeur Q.
Définir « ***l'indice base 100 de cette grandeur correspondant à la valeur Q_1*** » , c'est associer à Q_1 la valeur $I_1 = 100$ et à Q_2 la valeur I_2 telle que I_1 et I_2 soient proportionnelles à Q_1 et Q_2.

Q_1	Q_2
100	I_2

On a donc en utilisant la « quatrième proportionnelle »

$$I_2 = \frac{100 \times Q_2}{Q_1}$$

VI.2 Remarque

Les indices n'ont pas d'unité.

VI.3 Exemple : SMIC

On donne le tableau suivant donnant le Smic mensuel brut en euros pour 151,67h de travail. Calculer les indices base 100 en 2005.

Année	Smic mensuel brut en euros pour 151,67h de travail	Indice base 100 en 2005
2014	1 445,38	118,6800013
2013	1 430,22	117,4352153
2012	1 425,67	117,0616153
2012	1 398,37	114,8200151
2011	1 393,82	114,4464151
2011	1 365,00	112,0800079
2010	1 343,77	110,3368148
2009	1 337,70	109,8384077
2008	1 321,02	108,4688147
2008	1 308,88	107,4720005
2007	1 280,07	105,1064144
2006	1 254,28	102,9888002
2005	1 217,88	100

Note : le smic horaire brut en euros est apprécié à la date d'entrée en vigueur du nouveau taux. Il peut donc y avoir un changement de taux en cours d'année.

Source : http://www.insee.fr

VI.4 Exemples

Beaucoup d'exemples sur le site de l'INSEE, Institut National de la Statistique et des Études Économiques.
Voir exemple 3 de l'annexe.

VI.5 Indices et taux d'évolutions

Propriété 4

Les taux d'évolutions relatives pour la quantité Q et pour l'indice I sont égaux.

$$\boxed{\frac{I_2-I_1}{I_1}=\frac{Q_2-Q_1}{Q_1}=\frac{I_2}{I_1}-1=\frac{Q_2}{Q_1}-1}$$

Exemple : SMIC
Le tableau des indices base 100 en 2005 par exemple dans l'exemple 5.3, donne donc directement les évolutions relatives de 2005 à 20056, de 2005 à 2007, ..., de 2005 à 2014.

- le SMIC a augmenté d'environ 2,99 % de 2005 à 2006.
  En effet l'indice, base 100 en 2005, du SMIC en 2006 est de $I_{2006}=102{,}9888002$ or :

  $$102{,}9888002=100+2{,}9888002$$

  et

  $$T=\frac{I_{2006}-I_{2005}}{I_{2005}}=\frac{2{,}9888002}{100}\approx 2{,}98\ \%$$

- le SMIC a augmenté d'environ 18,68 % de 2005 à 2014.
  En effet l'indice, base 100 en 2005, du SMIC en 2014 est de $I_{2014}=118{,}6800013$ or :

  $$118{,}6800013=100+18{,}6800013$$

  et

  $$T=\frac{I_{2014}-I_{2005}}{I_{2005}}=\frac{18{,}6800013}{100}\approx 18{,}68\ \%$$

- **Attention : si on cherche un taux d'évolution entre deux dates quelconques** :
  Quel est le taux d'évolution du SMIC entre 2013 et 2014 ?
  L'indice, base 100 en 2005, du SMIC en 2014 est de $I_{2014}=118{,}6800013$ et celui en 2013 est de $I_{2013}=117{,}4352153$ donc d'après la propriété 5 :

  $$T=\frac{I_{2014}-I_{2013}}{I_{2013}}=\frac{118{,}6800013-117{,}4352153}{117{,}4352153}\approx 0{,}010599768\approx 1{,}0598\ \%$$

  Donc Le SMIC a augmenté d'environ 1,06 % de 2013 à 2014.

Annexe

Exercice 1 : la population mondiale (exemple ??)

Sur le site *wikipédia* on peut lire :
« La population mondiale désigne le nombre d'êtres humains vivant sur Terre à un instant donné. Elle est prévue à 7,2 milliards en 2014 selon les Nations unies alors qu'elle était estimée à 7 milliards au 31 octobre 2011, à 6,1 milliards en 2000, entre 1,55 et 1,76 milliard en 1900 et de 600 à 679 millions d'habitants vers 1700. Cette augmentation de la population tend cependant à ralentir avec une baisse mondiale plus ou moins importante du taux de fécondité. Le cap de 6 milliards a été atteint en octobre 1999. À cette occasion, les Nations unies ont symboliquement désigné un nouveau-né bosnien le « bébé 6 milliards ». Celui des 7 milliards a eu lieu officiellement le 31 octobre 2011. »
On donne le tableau suivant. Calculer les taux d'évolution entre 2010 et 2011, entre 2011 et 2012.

Année	Population mondiale
1910	1,750 milliard
1920	1,860 milliard
1930	2,07 milliards
1940	2,3 milliards
1950	2,519 milliards
1955	2,757 milliards
1960	3,023 milliards
1965	3,337 milliards
1970	3,696 milliards
1975	4,073 milliards
1980	4,442 milliards
1985	4,843 milliards
1990	5,279 milliards
1995	5,692 milliards
2000	6,085 milliards
2005	6,5 milliards
2010	6,842 milliards
2011	7 milliards
2012	7,058 milliards

Exemple 2 : SMIC

On donne le tableau suivant donnant le Smic mensuel brut en euros pour 151,67h de travail. Calculer les indices base 100 en 2005.

Année	Smic mensuel brut en euros pour 151,67h de travail	Indice base 100 en 2005
2014	1 445,38	
2013	1 430,22	
2012	1 425,67	
2012	1 398,37	
2011	1 393,82	
2011	1 365,00	
2010	1 343,77	
2009	1 337,70	
2008	1 321,02	
2008	1 308,88	
2007	1 280,07	
2006	1 254,28	
2005	1 217,88	100

Note : le smic horaire brut en euros est apprécié à la date d'entrée en vigueur du nouveau taux. Il peut donc y avoir un changement de taux en cours d'année.

Source : http://www.insee.fr

Exemple 3

Indice des salaires mensuels de base par activité - Ensemble des secteurs non agricoles - NAF rév. 2 - Poste ENS - Base 100 4ème trim 2008.

Année	Trimestre	**Indice des salaires mensuels de base par activité- Base 100 4ème trim 2008**
2014	1	110,6
2013	4	109,9
2013	3	109,7
2013	2	109,5
2013	1	109
2012	4	108,2
2012	3	108
2012	2	107,5
2012	1	107
2011	4	106
2011	3	105,7
2011	2	105,3
2011	1	104,7
2010	4	103,7
2010	3	103,4
2010	2	103,1
2010	1	102,6
2009	4	101,9
2009	3	101,7
2009	2	101,2
2009	1	100,8
2008	4	100
2008	3	99,7
2008	2	99
2008	1	98,1
2007	4	97,1
2007	3	96,8
2007	2	96,1
2007	1	95,5

Source : http://www.insee.fr/fr/bases-de-donnees/