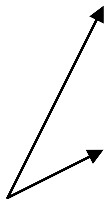
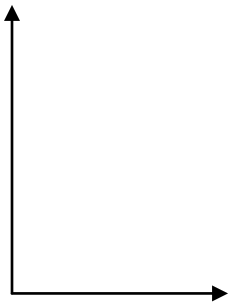
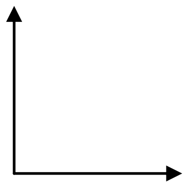
Chapitre 10 - Repère : distance et coordonnées (*Corrigé*)

I – Repère et coordonnées

1°) Repères.

Trois points non alignés O, I et J définissent un repère du plan. On note souvent $\mathcal{R}(O\,;I\,;J)$ ou $\mathcal{R}(O\,;\,\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OJ})$

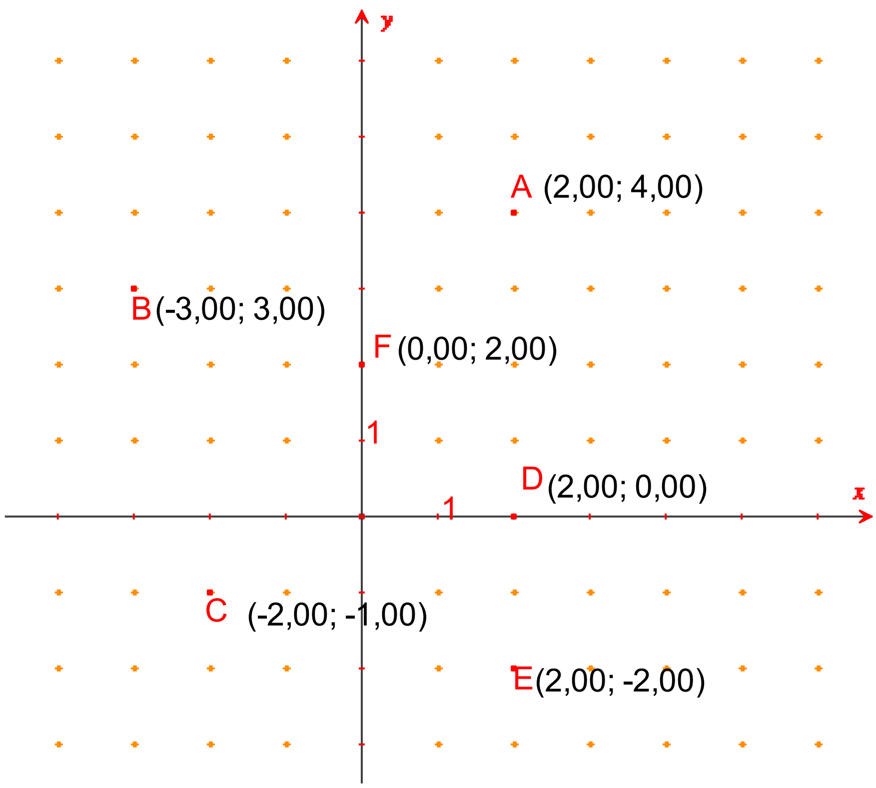
Repère quelconque	**Repère orthogonal** **(OI) ⊥ (OJ)**	**Repère orthonormé** **(OI) ⊥ (OJ)** **et OI = OJ**
		

2°) Coordonnées

Un point est repéré par ses deux coordonnées :

- l'**abscisse** lue sur l'axe (OI) et notée x
- l'**ordonnée** lue sur l'axe (OJ) et notée y

Exemple :



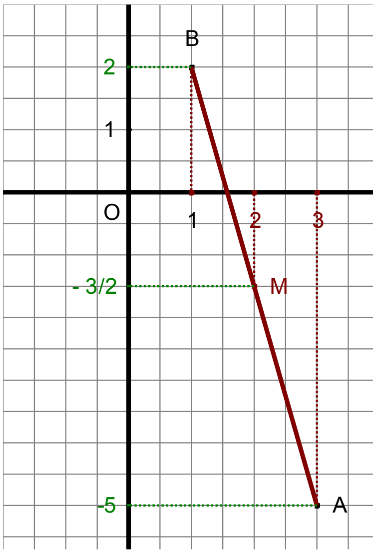
II - Coordonnées du milieu d'un segment

<u>Propriété</u> : Soit, dans le plan muni d'un repère orthogonal, les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B).
Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées (x_M ; y_M) où :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad \text{et} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

<u>Remarque</u> : Pour trouver les coordonnées du milieu d'un segment il faut faire les **<u>MOYENNES</u>** des coordonnées des 2 points

<u>Exemple</u> :



A(3 ; -5) B(1 ; 2)
Les coordonnées du milieu M de [AB] sont :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-5+2}{2} = -\frac{3}{2}$$

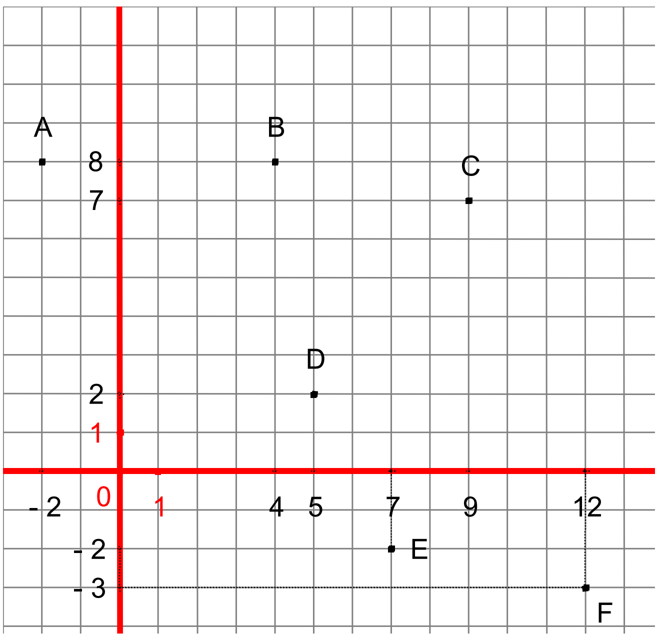
$\boxed{\textbf{M(2 ; - 3/2)}}$

III - Coordonnées de vecteur

<u>1°) Définition</u> :

Soit A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B).
On appelle coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ le couple ($x_B - x_A$; $y_B - y_A$). On note ....

<u>Remarque</u> : Attention à l'ordre.



Exemples :

$\overrightarrow{BC}$ (9-4 ; 7-8) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}$ (5-9 ; 2-7) $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}$ (4 – (-2) ; 8-8) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OA}$ (-2-0 ; 8-0) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF}$ (12-7 ; -3-(-2)) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$

Remarque : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{CB}$ (4-9 ; 8-7) $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$
Remarque : $\overrightarrow{CB}$ est l'opposé de $\overrightarrow{BC}$.

2°) Egalité de vecteurs

Propriété : Tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ ont les mêmes coordonnées que $\overrightarrow{AB}$

Exemple type brevet : Soit EFHR un parallélogramme. E (3 ; 2) F(-1 ; 4) R(1 ; 5).
Calculer les coordonnées de H.

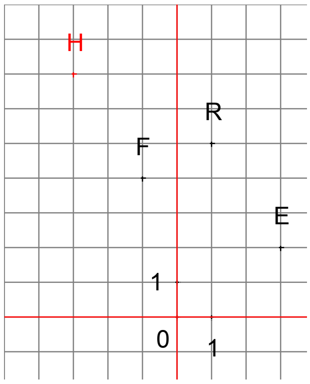
EFHR est un parallélogramme donc $\overrightarrow{EF}$ = $\overrightarrow{RH}$.Donc les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées.

$\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées (-1 – 3 ; 4 – 2) soit (-4 ; 2)
$\overrightarrow{RH}$ a pour coordonnées (x_H – 1 ; y_H – 5)

$x_H - 1 = -4$ soit $x_H = -3$

$y_H - 5 = 2$ soit $y_H = 7$

H (-3 ; 7)



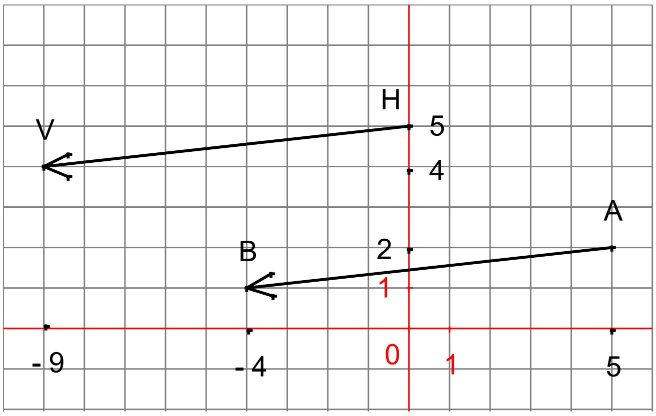
Propriété réciproque : Si deux vecteurs ont les mêmes coordonnées alors ils sont égaux.

Exemple :

Soit A(5 ; 2),B (-4 ; 1),H (0 ; 5),V(-9 ; 4)
Quelle est la nature du quadrilatère ABVH ?

$\overrightarrow{AB}$ (-4-5 ; 1-2) soit $\overrightarrow{AB}(-9\,;\,-1)$
$\overrightarrow{HV}$ (-9-0 ; 4-5) soit $\overrightarrow{HV}\,(-9\,;\,-1)$

Donc $\overrightarrow{AB}$ = $\overrightarrow{HV}$ donc ABVH est un parallélogramme



IV - Distance entre deux points

<u>1°) Propriété</u> : Distance AB

Soit, dans le plan muni d'un repère <u>orthonormal</u>, les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B). On a alors :

$$\boxed{\boldsymbol{AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

<u>Remarque</u> : en raison du carré on peut aussi bien écrire $(x_A - x_B)^2$ que $(x_B - x_A)^2$.

<u>*Démonstration*</u> : A faire en DM (défi)

<u>Exemple :</u>

<u>2°) Propriété</u> : Norme d'un vecteur

Soit, dans le plan muni d'un repère <u>orthonormal</u>, les points A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B).

On a alors la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ notée $\|\overrightarrow{AB}\| = \boldsymbol{AB} = \sqrt{\boldsymbol{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$

<u>Exemple :</u>

<u>Remarque</u> : Pour aller plus vite
Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$ dont on a les coordonnées (x ;y), alors $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{x^2 + y^2}$

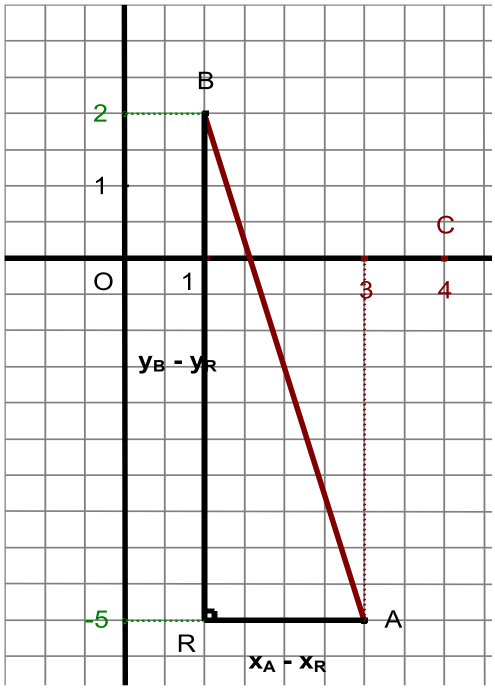
<u>Exemple</u> :

3°) Méthode de calcul de la distance AB

① Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

② Calculer AB en utilisant la formule : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemples :



$AB^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_B - y_A)^2$

$AB^2 = (3 - 1)^2 + (2 - (-5))^2 = 2^2 + 7^2 = 4 + 49 = 53$

$AB = \sqrt{53} \approx 7{,}3$ cm (car l'unité des axes est le cm)

$AC^2 = (3 - 4)^2 + (-5 - 0)^2 = (-1)^2 + (-5)^2 = 1 + 25 = 26$

$AC = \sqrt{26} \approx 5{,}1$ cm