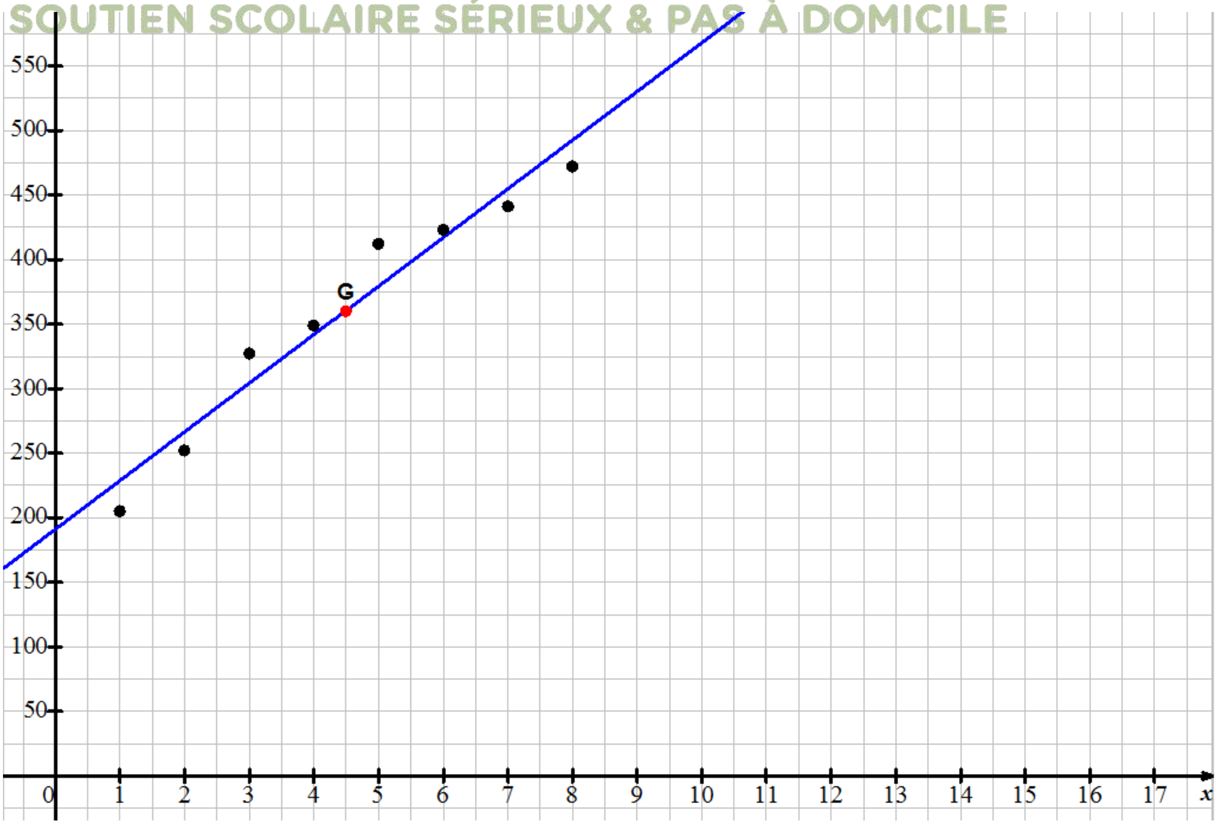
Exercice 1

1. Pour passer du point B au point A, on se déplace de 2 carreaux horizontalement vers la droite et on descend de 3 carreaux. Par conséquent, le coefficient directeur de la droite (AB) qui est égal à $g'(2) = -1.5$. **Réponse a**
2. La fonction g change de signe en -2 : elle est positive puis négative. La fonction G admet donc un maximum en -2.
   Sur l'intervalle [-8 ;-2], la fonction g est positive ou nulle. Par conséquent sa primitive G est croissante sur cet intervalle. **Réponse c**
3. $I = \int_2^7 \left(2x + 1 - \frac{1}{x}\right)dx = [x^2 + x - \ln x]_2^7 = 49 + 7 - \ln 7 - 4 - 2 + \ln 2 = 50 - \ln 7 + \ln 2$
   $= 50 + \ln\left(\frac{2}{7}\right)$. **Réponse a**
4. $f(x) = \frac{6x - 5}{3x^2 - 5x + 7}$. Définissons g la fonction sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^2 - 5x + 7$. Alors g est une fonction dérivable et $g'(x) = 6x - 5$.
   Par conséquent les primitive de f sont définies par $F(x) = \ln\left(3x^2 - 5x + 7\right) + C$.
   On veut que $F(1) = 1 = \ln(3 - 5 + 7) + C = = \ln 5 + C$. Par conséquent $C = 1 - \ln 5$.
   Réponse b

Exercice 2 (obligatoire)

1. a.



b. $x_G = \dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = 4{,}5$

$y_G = \dfrac{205+252+327+349+412+423+441+472}{8} = 360{,}125$

Donc le point G a pour coordonnées (4,5 ; 360,125)

2. **a.** La calculatrice fournit $a = 38$ et $b = 191$ (tous les 2 arrondis à l'unité)

Donc une équation de (D) est $y = 38x + 191$.

c. Si $x = 10$ alors $y = 571$.

En utilisant l'ajustement précédent, on peut estimer qu'il y aura 571 visiteurs lors de la dixième semaine.

3. **a.**

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,693	**1,099**	1,386	1,609	**1,792**	1,946	2,079
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

b. En utilisant l'équation $y = 133z + 184$, on obtient en dixième semaine :

$y = 133 \times \ln(10) + 184 = 490$ arrondi à l'unité.

c. On veut déterminer à quel moment $y = 133z + 184 > 600$.

Cela signifie donc que $133z > 416$ et donc $z > \dfrac{416}{133}$

et par conséquent $x > \exp\left(\dfrac{416}{133}\right) \approx 22{,}8$.

En utilisant cet ajustement, le nombre de visiteur dépassera 600 en 23$^{\text{ème}}$ semaine.

Exercice 2 (spécialité)

1. Dans le graphe, le quadrilatère BCDE est complet. Par conséquent il faut au moins 4 couleurs pour colorer le graphe.

2. La matrice M^4 indique le nombre de chemin de 4 étapes reliant 2 points du graphe. En regardant la dernière valeur de la première ligne, on obtient donc le nombre de trajet possibles permettant d'aller de A à H. Il y en a donc 9.

3. Pour déterminer le chemin qui minimise le temps de trajet entre A et H on utilise l'algorithme de Dijkstra.

A	B	C	D	E	F	G	H	Sommet selectionné
0	**3(A)**	7(A)	11(A)					B(3)
L		**6(B)**	10(B)	14(B)				C(6)
			10(C)	**9(C)**				E(9)
			10(B)		17(E)	19(E)		D(10)
					17(E)	**12(D)**		G(12)
					16(G)		24(G)	F(16)
							23(F)	H(23)

Pour lire la chaîne de poids minimal, on part de H et on remonte cette chaîne à partir

des prédécesseurs : H – F – G – D – B – A .
Le trajet le plus court possible pour aller de A à H est ABDGFH. Le temps minimum est de 23 minutes.

4. **a.** La chaîne 1-2-5-7-8-6-4-3 contient tous les sommets du graphe. Donc, pour toutes les paires de sommets distincts, il y a une chaîne qui les relie. Le graphe est par conséquent connexe.
b. Le graphe étant non orienté, le degré d'un sommet correspond au nombre d'arrêtes issues de ce sommet.
On obtient donc le tableau suivant :

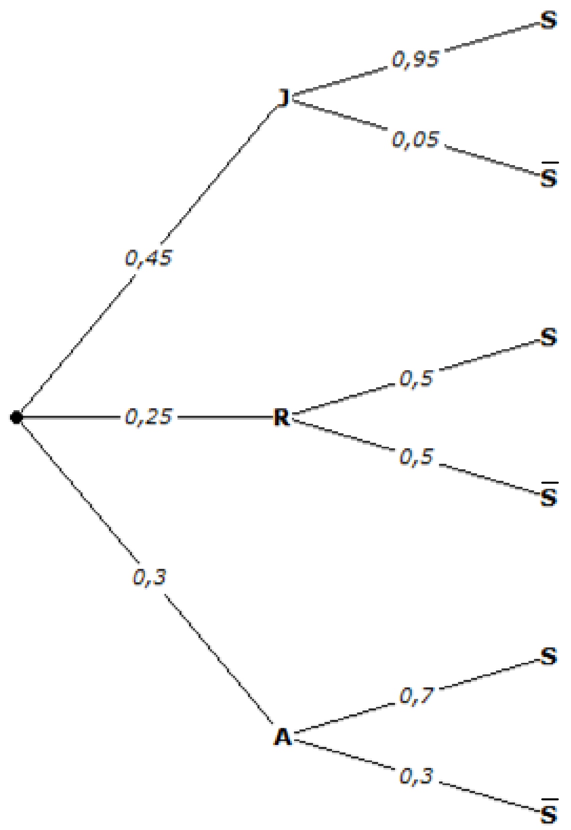
Sommets	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	4	4	2	4	5	2	3

Le graphe est connexe et ne contient que 2 sommets (6 et 8) de degré impair. Il existe donc une chaîne eulérienne commençant par l'un des deux sommets et finissant par l'autre.
On peut donc parcourir le lotissement en n'empruntant chaque voie qu'une seule fois.
On peut suivre le chemin : 8 – 5 – 7 – 8 – 6 – 2 – 5 – 6 – 4 – 3 – 1 – 2 – 3 – 6

Exercice 3

a. $P(J) = \frac{900}{2000} = 0{,}45$ $P(R) = \frac{500}{2000} = 0{,}25$ $P(A) = 1 - (0{,}45 + 0{,}25) = 0{,}3$

b.



1. On cherche $P(J \cap S) = 0,45 \times 0,95 = 0,4275$
2. On cherche $P(S) = P(J \cap S) + P(R \cap S) + P(A \cap S)$ (car tous les évènements sont incompatibles).
   $P(S) = 0,4275 + 0,25 \times 0,5 + 0,3 \times 0,7 = 0,7625$
3. On cherche $P_S(R) = \dfrac{P(S \cap R)}{P(S)} = \dfrac{0,25 \times 0,5}{0,7625} \approx 0,16$
4. Puisque les 3 clients sont choisis au hasard et que la probabilité d'être satisfait est de 0,7625, la loi de probabilité donnant le nombre de clients satisfaits parmi ces 3 clients suit donc une loi binomiale $B(3 ; 0,7625)$.
   On veut qu'exactement un des 3 clients choisis se déclare non satisfait. La probabilité de cet évènement est donc : $P(B) = \binom{3}{2} \times 0,7625^2 \times 0,2375 = 0,41$ arrondi au centième.

Exercice 4

Partie A

1. **a.** La fonction f est une somme et produit de fonctions dérivables sur $[0 ;+\infty[$. Elle est donc également dérivable sur cet intervalle.
   $f(x) = (-4x^2 + 5)e^{-x} + 3$ donc $f'(x) = -8xe^{-x} - (-4x^2 + 5)e^{-x} = (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}$.
   b. L'exponentielle étant toujours positive, le signe de $f'(x)$ dépend uniquement de celui de $4x^2 - 8x - 5$.

   Calculons son discriminant : $\Delta = (-8)^2 + 4 \times 4 \times 5 = 144 = 12^2$.
   Il y a donc 2 racines $x_1 = \dfrac{8 - 12}{8} = -0,5$ et $x_2 = \dfrac{8 + 12}{8} = 2,5$.
   La fonction f' est donc positive à l'extérieure des racines, c'est-à-dire ici sur $[2,5 ;+\infty[$ et négative entre les racines, c'est-à-dire ici sur $[0 ;2,5]$.
2. **a.** $f(x) = (-4x^2 + 5)e^{-x} + 3 \quad = \dfrac{-4x^2 + 5}{e^x} + 3 = -\dfrac{4x^2}{e^x} + \dfrac{5}{e^x} + 3$
   b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{e^x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.
   c. La fonction f est croissante sur $[2,5 ;+\infty[$, puisque sa fonction dérivée est positive sur cet intervalle, et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.
   Cela signifie donc que la droite d'équation $y = 3$ est asymptote à la courbe (C).
3.

x	0		2,5		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
f	8	↘	$f(2,5)$	↗	3

$f(2,5) \approx 1,36$

4. Sur l'intervalle $[0 ;2,5]$ la fonction f est strictement décroissante et continue. $f(0) = 8$ et $f(2,5) \approx 1,36$. Donc $3 \in [1,36 ;8]$. D'après le théorème de la bijection il existe une

unique valeur x_0 appartenant à [0 ;2,5] telle que $f(x_0) = 3$.
Sur $[2,5 ;+\infty[$, $f(x) < 3$.
Donc sur $[0 ;+\infty[$, l'équation $f(x) = 3$ admet donc une unique solution .
D'après la calculatrice $1,11 < x_0 < 1,12$.

Partie B

1. $f(5) \approx 2,3598$. Donc le coût moyen de production de 500 litres de peintures en de 236 € arrondi à l'euro près.
2. **a.** D'après le tableau de variation, le minimum de la fonction f est atteint quand $x = 2,5$
L'entreprise doit donc produire 250 litres de peintures pour minimiser le coût moyen unitaire. Pour produire 250 litres, cela coûte 136 € arrondi à l'euro près.
b. Les 250 litres sont donc vendus 250 €. La production des ces 250 litres revient à $136 \times 2,5 = 340$ €. L'entreprise ne réalise donc pas de bénéfice.
3. On sait que l'équation $f(x) = 3$ n'admet qu'une seule solution x_0 .
De plus $f(x) < 3 \Leftrightarrow x > x_0$.
Par conséquent le seuil de rentabilité est $100x_0 \approx 112$ litres.