

~ Corrigé du baccalauréat S Pondichéry ~
13 avril 2011

EXERCICE 1

10 points

Commun à tous les candidats

Partie I

1. L'axe des ordonnées est asymptote à \mathcal{C}_2 au voisinage de 0 ; la fonction étant décroissante sur $]0 ; +\infty[$, la limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est $+\infty$.
2. De même la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est 0.
3. On ne peut pas savoir.
4. Sur $]0 ; 1[$ la fonction différence est positive, s'annule en 1, puis est négative : c'est donc le troisième tableau.

Partie II

1. On a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$, d'où par somme de limites $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. f somme de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :
$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$
Chacun des termes est positif sur $]0 ; +\infty[$, donc la dérivée est positive sur cet intervalle, donc la fonction est croissante de moins l'infini à plus l'infini.
3. On a de façon évidente $f(1) = \ln 1 + 1 - \frac{1}{1} = 0$. La fonction étant croissante sur $]0 ; +\infty[$, on a donc :
 - $f(x) < 0$ sur $]0 ; 1[$;
 - $f(1) = 0$;
 - $f(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$.
4. F somme de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :
$$F'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x} = f(x).$$
 F est donc une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.
5. On vient de voir que $F'(x) = f(x)$ et d'après la question 5, $f(x) > 0$ sur $]1 ; +\infty[$, donc F est croissante sur cet intervalle.

6. On a $F(1) = 1 \times 0 - 0 = 0$ et $F(e) = e \ln e - \ln e = e - 1 \approx 1,7$.
 D'autre part $1 - \frac{1}{e} \approx 0,63$, donc $0 < 1 - \frac{1}{e} < e - 1$.
 La fonction F est dérivable donc continue sur $[1 ; e]$: il existe donc un unique réel $\alpha \in [0 ; e]$ tel que $F(\alpha) = 1 - \frac{1}{e}$.
7. La calculatrice donne : $F(1,9) - 1 + \frac{1}{e} \approx -0,05$ et $F(2,0) - 1 + \frac{1}{e} = 0,06$, donc :
 $1,9 < \alpha < 2,0$.

Partie III

1. L'ordonnée de A est égale à 0 ; il faut donc résoudre l'équation :
 $\ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \iff e^{\ln x} = e^{-1}$ (par croissance de la fonction exponentielle) $\iff x = e^{-1}$.
 On a donc $A(e^{-1} ; 0)$.
2. P étant commun aux deux courbes son abscisse vérifie :
 $g(x) = h(x) \iff \frac{1}{x} = \ln(x) + 1 \iff f(x) = 0$, d'après la partie II. Or dans cette partie on a vu que f s'annule en 1 et $g(1) = h(1) = 1$. Donc le point commun aux deux courbes est le point P(1 ; 1).
3. a. On a vu que sur $\left[\frac{1}{e} ; 1\right]$, $f(x) \geq 0$, c'est-à-dire que $g(x) \geq h(x)$ (la courbe \mathcal{C}_h est au dessus de la courbe \mathcal{C}_g), donc

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{e}}^1 [h(x) - g(x)] dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 -f(x) dx.$$
- b. On a vu qu'une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$, donc en particulier sur $\left[\frac{1}{e} ; 1\right]$ est $F(x) = x \ln(x) - \ln(x)$.
 On a donc :

$$\mathcal{A} = [-F(x)]_{\frac{1}{e}}^1 = -F(1) + F\left(\frac{1}{e}\right) =$$

$$0 + \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \times (-\ln(e)) - (-\ln(e)) = 1 - \frac{1}{e}.$$
4. a. On a vu que sur $[1 ; +\infty[$, $h(x) \geq g(x)$, donc puisque $t \geq 1$, l'aire \mathcal{B}_t est égale à :

$$\mathcal{B}_t = \int_1^t [h(x) - g(x)] dx = \int_1^t -f(x) dx = -F(t) + F(1) = -F(t) = t \ln(t) - \ln t.$$
- b. On a vu que $\mathcal{B}_t = 1 - \frac{1}{e}$ ou encore $t \ln(t) - \ln t = 1 - \frac{1}{e}$ soit $F(t) = 1 - \frac{1}{e}$ équation qui a été résolue à la question 6 de la partie II et qui a pour solution $\alpha \approx 1,9$.

EXERCICE 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie 1

1. a. Soit I le milieu de [BD]. [CI] médiane du triangle équilatéral BCD est aussi hauteur issue de C. Donc (CI) ou (A'I) est perpendiculaire à (BD).

De même [AI] médiane du triangle équilatéral ABD est aussi hauteur, donc (AI) est perpendiculaire à (BD).

$$\text{Or } \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{IA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 + 0 = 0.$$

De même avec J milieu de [BC], on montre que (AJ) est perpendiculaire à (BC) et (AA') (ou (JA')) est perpendiculaire à (BC).

$$\text{Donc } \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{JA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 + 0 = 0.$$

- b. La question précédente a montré que la droite (AA') est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (BCD) : (BD) et (BC) : elle est donc perpendiculaire à ce plan.

Ceci démontre donc la propriété (\mathcal{P}_1).

2. On a $G = \text{bar.} \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ (par associativité des trois derniers points)

$$\text{bar.} \begin{vmatrix} A & A' \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \text{ et par propriété du barycentre G appartient à la droite (AA').}$$

On démontre de la même façon que G appartient aux trois autres médianes. Finalement les quatre médianes sont concourantes en G.

Partie II

1. On a $OP^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$.

$$OQ^2 = 4^2 + 2^2 + (-1)^2 = 16 + 4 + 1 = 21.$$

Donc la face OPQ n'est pas équilatérale et le tétraèdre n'est pas régulier.

2. On traduit la propriété vectorielle :

$$\overrightarrow{P'O} + \overrightarrow{P'Q} + \overrightarrow{P'R} = \vec{0} \iff \begin{cases} 0 - x + 4 - x - 2 - x = 0 \\ 0 - y + 2 - y + 3 - y = 0 \\ 0 - z - 1 - z + 0 - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 = 3x \\ 5 = 3y \\ -1 = 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \frac{2}{3} = x \\ \frac{5}{3} = y \\ -\frac{1}{3} = z \end{cases}$$

Donc $P'(\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{1}{3})$.

3. On a $M(x; y; z) \in (\text{OQR}) \iff ax + by + cz + d = 0$.

Puisque $O(0; 0; 0) \in (\text{OQR})$ on a $d = 0$.

Écrivons que les coordonnées de Q et de R vérifient l'équation :

$$\begin{cases} Q(4; 2; -1) \in (\text{OQR}) \iff 4a + 2b - c = 0 \\ R(-2; 3; 0) \in (\text{OQR}) \iff -2a + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4a + 2b - c = 0 \\ -4a + 6b = 0 \end{cases}$$

d'où par somme $8b - c = 0 \iff b = \frac{c}{8}$ puis en remplaçant dans la deuxième

$$\text{équation du départ : } 2a = 3b = \frac{3c}{8} \iff a = \frac{3c}{16}.$$

$$\text{On a donc } M(x; y; z) \in (\text{OQR}) \iff \frac{3c}{8}x + \frac{c}{8}y + cz = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{16}x + \frac{1}{8}y + z = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y + 16z = 0.$$

4. La droite (PP') est la médiane relative à la face (OQR).

Cette droite a pour vecteur directeur : $\overrightarrow{PP'}$ $(\frac{2}{3} - 1; \frac{5}{3} - 2; -\frac{1}{3} - 3)$ ou $(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{10}{3})$ ou encore $(1; 1; 10)$.

Or un vecteur normal au plan (OQR) est \vec{n} $(3; 2; 16)$ qui n'est pas colinéaire au vecteur $10\overrightarrow{PP'}$, ce qui signifie que la droite (PP') n'est pas perpendiculaire au plan (OQR).

Conclusion : la propriété (\mathcal{P}_1) de la partie 1 n'est pas vraie dans un tétraèdre quelconque.

EXERCICE 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Les points de \mathcal{E}_1 ont des coordonnées qui vérifient le système $\begin{cases} z = (x - y)^2 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$
 $(x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$ qui est l'équation de la droite $y = x$ dans le plan $z = 0$.

Les points de \mathcal{E}_2 ont des coordonnées qui vérifient le système $\begin{cases} z = (x - y)^2 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow$
 $z = (1 - y)^2$ qui est l'équation d'une parabole $z = (1 - y)^2$ dans le plan $x = 1$.

Partie B

1. Les points de \mathcal{E}_3 ont des coordonnées qui vérifient le système $\begin{cases} z = xy \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$
 $z = xy = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $y = 0$ qui sont les équations des axes de coordonnées dans le plan horizontal $z = 0$.

2. Les points de \mathcal{E}_3 ont des coordonnées qui vérifient le système $\begin{cases} z = xy \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow$
 $xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ qui est l'équation d'une hyperbole dans le plan horizontal $z = 1$.

Partie C

1. Si $M(x; y; z) \in \mathcal{E}_5$ (avec $(x; y; z) \in \mathbb{N}^3$), alors $z = (x - y)^2 = xy$.

Si son abscisse est nulle, alors $z = (0 - y)^2 = 0y = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$.

Finalement $M(0; 0; 0)$.

2. a. On a vu que les coordonnées d'un point de \mathcal{E}_5 vérifient

$$z = (x - y)^2 = xy; \text{ en particulier}$$

$$(x - y)^2 = xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 3xy = 0 \quad (1).$$

Soit d le pgcd de x et de y ; on a $x = dx'$ et $y = dy'$ avec x' et y' premiers entre eux.

En remplaçant dans l'égalité (1) :

$$d^2x'^2 + d^2y'^2 - 3dx'dy' = 0 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 3x'y' = 0 \quad (2).$$

b. L'égalité précédente s'écrit :

$3x'y' - x'^2 = y'^2 \iff x'(3y' - x') = y'^2$: cette dernière égalité montre que x' divise y'^2 , mais les diviseurs premiers de y'^2 étant les mêmes que ceux de y' , on en déduit que x' divise y' .

c. Comme x' et y' sont premiers entre eux la question précédente montre que $x' = 1$ soit en remplaçant dans l'égalité (2) : $1 + y'^2 - 3y' = 0$.

d. On a donc une équation du second degré ; $\Delta = 9 - 4 = 5$: les solutions sont donc $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ qui ne sont ni l'un ni l'autre des naturels.

Conclusion : l'hypothèse x est non nul est fautive et d'après la question 1. le seul point commun aux deux surfaces est l'origine.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

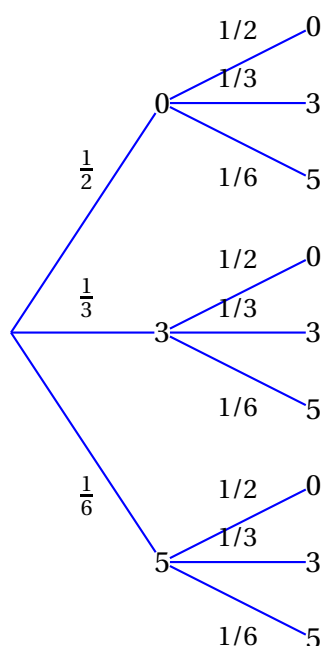
1. On a donc $p_3 = 2p_5$ et $p_0 = 3p_5$, donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1 \iff 3p_5 + 2p_5 + p_5 = 1 \iff 6p_5 = 1 \iff p_5 = \frac{1}{6}$.

Il en résulte que $p_3 = 2p_5 = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ et $p_0 = 3p_5 = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Remarque : il ne devait pas être très difficile de voir que les probabilités étaient proportionnelles à l'aire des secteurs, donc à des angles au centre de 180° (deux angles droits), un angle de 60° et un angle de 120° pour un total de 360° .

On a donc $p_0 = \frac{180}{360} = \frac{1}{2}$, $p_3 = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$ et $p_5 = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}$...

2. a.



On obtient un total d'au moins 8 points en deux lancers à la 6^e, 8^e et 9^e branche. Donc

$$p(G_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}.$$

b. En déduire $p(P)$. On a $p(P) = 1 - p(G_2) - p(G_3) = 1 - \frac{5}{36} - \frac{7}{36} =$

$$\frac{36}{36} - \frac{12}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

- 3.** Les lancers sont indépendants ; on a une schéma de Bernoulli de paramètres $n = 6$ et de probabilité $p = \frac{2}{3}$.

La probabilité de ne gagner aucune partie est $\left(\frac{2}{3}\right)^6$, donc la probabilité de

gagner au moins une partie est $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{3^6 - 2^6}{3^6} = \frac{665}{729}$

- 4. a.** On a le tableau de loi de probabilité de X suivant :

X	-2	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{24}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$

b. $E(X) = -2 \times \frac{24}{36} + 1 \times \frac{7}{36} + 3 \times \frac{5}{36} = \frac{-48 + 7 + 15}{36} = -\frac{26}{36} = -\frac{13}{18} \approx -0,72 \text{ €}.$

Un joueur perd en moyenne sur un grand nombre de parties 72 centimes par partie.

Le jeu est défavorable au joueur.