# TD n°6 : Fourier - Correction

# Séries de Fourier

### Coefficient de Fourier

On considère une fonction f continue par morceaux et -périodique.

**Cas pratique :**

|  |  |
| --- | --- |
| **Si f est paire :** | **Si f impaire** |
|  |  |

### Série de Fourier de f

### Théorème de Dirichlet (1829)

Soit définie sur ℝ,  **par morceaux** sur et -périodique.

### Théorème de Parseval

Soit définie sur ℝ, **continue par morceaux** sur et -périodique.

On écrit aussi :

# Exercice 1 :

Soit f 2π-périodique définie par sur .

1. **Montrer que :**

On a (car f est impaire) et par IPP

Donc on obtient le résultat demandé.

1. **Convergence**.
   1. **Montrer que :**

La fonction f n’est pas continue sur puisque mais .  
Il y a donc une discontinuité en .  
Elle est bien  **par morceaux** puisqu’elle est sur . le théorème de Dirichlet affirme donc que la série va converger vers x sur et vers pour .

On obtient donc le résultat demandé.

* 1. **Etudier le cas où .**Dans ce cas, tous les termes de la série sont nuls, et la somme est bien nulle comme attendue.

1. **Cas particulier. Montrer que :**

Pour , on retrouve la série alternée demandée.

1. **Application du Théorème de Parseval : Montrer que :**

En appliquant la formule de Parseval, ce qui est l légitime car f est **continue par morceaux** sur donc

# Exercice 2 :

Soit f 2π-périodique, impaire, définie par :

1. Représenter f.
2. **Montrer que :**

définie sur ℝ,  **par morceaux** sur ℝ et 2π-périodique donc on peut appliquer le théorème de Dirichlet

La série de Fourier réelle de f converge simplement et a pour somme la régularisée de . Or ici f est égale à sa régularisée, donc on obtient le résultat demandé.

1. **Montrer que : .** Il suffit de prendre
2. **Montrer que :**

On peut appliquer la formule de Parseval puisque f est continue par morceaux.

1. **En déduire que :**

Comme

On peut passer à la limite (en N) car toutes ces séries converges donc

Le regroupement de termes est légitime car on a convergence absolue donc commutative des séries.

# Transformée de Fourier

**La transformée de Fourier (notée ou TF)** d’une fonction f donnée est une opération qui transforme une fonction f intégrable sur ℝ en une autre fonction notée .

**Remarque** : Cette définition est celle adoptée par les physiciens, on peut aussi définir sans le facteur . Il suffit en fait que le produit des constantes dans (1) et (2) fasse 1/2π

**Existence** : Une condition suffisante d’existence de est que la fonction f soit *absolument intégrable*.

**La transformée de Fourier inverse**. Soit f une fonction donnée admettant une TF

# Exercice 3 :

Calculer la TF f pour f définie par :

*Réponse :*

# Exercice 4 :

1. Montrer que si **f est paire** :

1. Montrer que si **f est impaire** :

# Exercice 5 :

1. Montrer que la TF pour définie par : est
2. Montrer que :

# Exercices complémentaires autocorrectifs :

# Exercice 6 :

**Soit f 2π-périodique, paire, définie par : .**

1. **Montrer que :**

On a (car f est paire) et par IPP

1. **En déduire que :**

On prend .

# Exercice 7 :

**Soit f 2π-périodique, impaire, définie par : .**

1. **Montrer que :**
2. **En déduire que :**Avec
3. On applique Parseval

# Exercice 8 :

1. **En utilisant le résultat de l’exercice 3, montrer que**

La transformée de Fourier inverse. donc

La partie imaginaire est nulle (fonction impaire) donc on obtient le résultat demandé.

1. **En déduire que :**

Suffit de prendre