TD - Trigonométrie type Brevet

__Exercice 1 : (Lyon 96)__

1) Construire un triangle IJK tel que :
JK = 8 cm ; IJ = 4,8 cm ; KI = 6,4 cm.
2) Démontrer que le triangle IJK est un triangle rectangle.
3) Calculer la mesure en degrés de l'angle $I\hat{J}K$.
Donner la valeur arrondie au degré le plus proche.

Correction :

1) [JK] est le plus grand côté.
$JK^2 = 8^2 = 64$
$IJ^2 + IK^2 = 4,8^2 + 6,4^2 = 23,04 + 40,96 = 64$
Donc $JK^2 = IJ^2 + IK^2$ et d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IJK est rectangle en I.
2) Comme on connaît les 3 longueurs, les 3 formules de trigonométrie peuvent être utilisées. Choisissons par exemple la tangente.

Dans le triangle IJK rectangle en K :

$$\tan I\hat{J}K = \frac{côté\ opposé\ à\ I\hat{J}K}{côté\ adjacent\ à\ I\hat{J}K}$$

$$\tan I\hat{J}K = \frac{IK}{IJ}$$

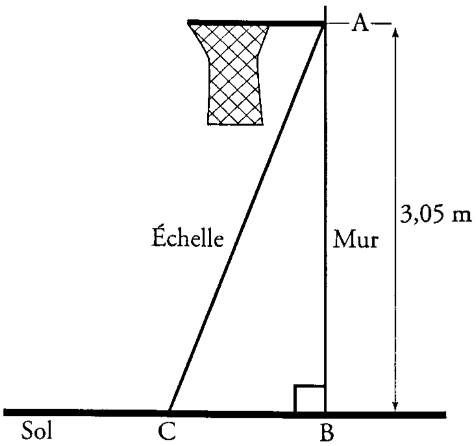
$$\tan I\hat{J}K = \frac{6,4}{4,8}$$

$$I\hat{J}K = \tan^{-1}\left(\frac{6,4}{4,8}\right)$$

$$I\hat{J}K \approx 53°$$

__Exercice 2 : (Rennes 99)__

1. Paul veut installer chez lui un panier de basket. Il doit le fixer à 3,05 m du sol. L'échelle dont il se sert mesure 3,20 m de long.
À quelle distance du pied du mur doit-il placer l'échelle pour



que son sommet soit juste au niveau du panier ? (Donner une valeur approchée au cm près.)
2. Calculer l'angle formé par l'échelle et le sol. (Donner une valeur approchée au degré près.)

Correction :

1) Dans le triangle ABC rectangle en B, on a, d'après le théorème de Pythagore :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$3,2^2 = 3,05^2 + BC^2$
$BC^2 = 3,2^2 - 3,05^2 = 0,9375$

$$BC = \sqrt{0,9375} \approx 0,97m$$

Il doit placer l'échelle à 0,97 m du mur environ.

2) Dans le triangle ABC rectangle en B :

L'angle formé par l'échelle et le sol est l'angle $\hat{C}$

$$\sin\hat{C} = \frac{côté\ opposé\ à\ \hat{C}}{hypoténuse}$$

$$= \frac{AB}{AC}$$

$$\sin\hat{C} = \frac{3,05}{3,2}$$

$$\hat{C} = \sin^{-1}\left(\frac{3,05}{3,2}\right)$$

$$\hat{C} \approx 72°$$

__Exercice 3 : (Antilles 96)__

Soit ABC un triangle isocèle de base [BC], [AH] la hauteur issue du sommet A.
On a : BC = 8 cm et AH = 7 cm.

1) Puisque ABC est isocèle en A, la hauteur issue de A est aussi la médiatrice de [BC]. Il suffit donc de construire un segment [BC] de 8 cm, de placer H le milieu de [BC] Puis on trace un segment de 7 cm passant par H et perpendiculaire à (BC) pour obtenir le point A.
2) Puisque ABC est isocèle en A, la hauteur issue de A est aussi médiane donc H est le milieu de [BC] et BH=BC\2=4

Dans le triangle ABH rectangle en H

$$\tan\hat{B} = \frac{côté\ opposé\ à\ \hat{B}}{côté\ adjacent\ à\ \hat{B}}$$

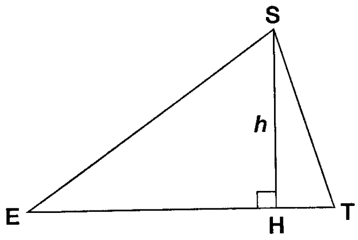
$$\tan\hat{B} = \frac{AH}{BH}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{7}{4} = 1,75$$

3) On utilise la touche "inverse tangente" de la calculatrice en mode degré :

$$\hat{B} \approx 60°$$

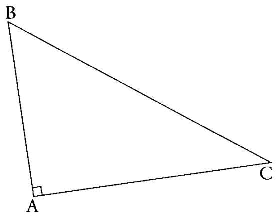
<u>Exercice 4 :</u> <u>(Afrique1 95)</u> (3 points)
La figure ci-contre représente un triangle SET isocèle en E, et la hauteur [SH] issue de S. On ne demande pas de refaire la figure.
On sait que les segments [ES] et [ET] mesurent 12 cm et que l'aire du triangle SET est 42 cm^2.



1) Démontrer que la mesure h du segment [SH] est égale à 7 cm.
2) Calculer la valeur arrondie au millimètre près de la longueur EH.
3) Calculer la mesure arrondie au degré près de l'angle $\hat{SET}$.

Correction
1) A(SET) = (base × hauteur) : 2
= (ET × h) : 2
Or A(SET) = 42 donc on a l'égalité suivante : 42 = (12 × h) : 2
12 × h = 42 × 2
h = 84 : 12
h = 7 cm
2) Le triangle SHE est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore on a :
ES² = EH² + HS²
12² = EH² + h²
144 = EH² + 49
EH² = 144 - 49
EH² = 95
$$EF = \sqrt{95} \approx 9{,}7cm$$
3) Dans le triangle EHS rectangle en H
$$\sin S\hat{E}T = \frac{côté\ opposé\ à\ S\hat{E}T}{hypoténuse}$$
$$= \frac{SH}{SE}$$
$$\sin S\hat{E}T = \frac{7}{12}$$
$$S\hat{E}T = \sin^{-1}\left(\frac{7}{12}\right)$$
$$S\hat{E}T \approx 36°$$

<u>Exercice 5 :</u> <u>(Grenoble 97)</u>
L'unité de longueur est le centimètre ; l'unité d'aire est le centimètre carré.
On considère la figure ci-contre :
- le triangle ABC est rectangle en A ;
- AB = 3,6 ;
- BC = 6.



1) Calculer la mesure de l'angle $A\hat{C}B$ (on donnera l'arrondi au degré).
2) Calculer AC.
3) Calculer l'aire du triangle ABC.
4) Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC). Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de AH.
5) En déduire AH.

Correction :
1) Dans le triangle ABC rectangle en A :
$$\sin A\hat{C}B = \frac{côté\ opposé\ à\ A\hat{C}B}{hypoténuse}$$
$$= \frac{AB}{BC}$$
$$\sin A\hat{C}B = \frac{3{,}6}{6}$$
$$A\hat{C}B = \sin^{-1}\left(\frac{3{,}6}{6}\right)$$
$$A\hat{C}B \approx 37°$$

2) On applique le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en A :
BC² = AB² + AC²
6² = 3,6² + AC²
AC² = 6² - 3,6² = 23,04
$$AC = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$$
3) Puisque ABC est rectangle en A :
Aire (ABC) = (AB × AC) : 2 = 8,64 cm²
4) Aire (ABC) = (BC × AH) : 2 = (6 × AH):2 = 3 × AH
5) 3 × AH = 8,64
D'où AH = 8,64 : 3 = 2,88 cm

Exercice6 : (Poitiers 97)

1)

2) Dans le triangle ACD rectangle en D.

$$\tan A\hat{C}D = \frac{côté\ opposé\ à\ A\hat{C}D}{côté\ adjacent\ à\ A\hat{C}D}$$

$$\tan A\hat{C}D = \frac{AD}{DC}$$

$$\tan A\hat{C}D = \frac{5,4}{7,2} = 0,75$$

$$A\hat{C}D = \tan^{-1}(0,75)$$

$$A\hat{C}D \approx 37°$$

3)la sécante (AC) détermine 2 angles alternes-internes

$A\hat{C}D\ et\ C\hat{A}B$

Comme (AB) et (CD) sont parallèles (côtés opposés d'un rectangle) alors $A\hat{C}D = C\hat{A}B$

4) E est sur la médiatrice de [AC] donc EA=EC et le triangle ACE est isocèle en E.

5)

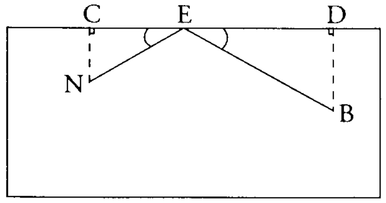
$$D\hat{C}E = D\hat{C}A + A\hat{C}E$$
$$= D\hat{C}A + C\hat{A}B$$

car les angles à la base du triangle isocèle ACE sont égaux.

$$D\hat{C}E = D\hat{C}A + C\hat{A}B$$
$$\approx 37 + 37 \approx 74°$$

Exercice 7 : (Dijon 97)

L'unité de longueur est le centimètre.



On pose ED = x.

1) a) E est entre C et D donc 0≤x≤90

b) CE=90 - x

2) Dans le triangle BED rectangle en D :

$$\tan D\hat{E}B = \frac{côté\ opposé\ à\ D\hat{E}B}{côté\ adjacent\ à\ D\hat{E}B}$$

$$\tan D\hat{E}B = \frac{DB}{DE}$$

$$\tan D\hat{E}B = \frac{35}{x}$$

3) Dans le triangle NEC rectangle en C :

$$\tan C\hat{E}N = \frac{côté\ opposé\ à\ C\hat{E}N}{côté\ adjacent\ à\ C\hat{E}N}$$

$$\tan C\hat{E}N = \frac{CN}{CE}$$

$$\tan C\hat{E}N = \frac{25}{90 - x}$$

4) a)

$$C\hat{E}N = D\hat{E}B\ d'où$$

$$\tan C\hat{E}N = \tan D\hat{E}B$$

$$\frac{35}{x} = \frac{25}{90 - x}$$

$$en\ faisant\ le\ produit\ en\ croix :$$

$$35(90 - x) = 25x$$

$$3150 - 35x = 25x$$

$$3150 - 35x + 35x = 25x + 35x$$

$$3150 = 60x$$

$$x = \frac{3150}{60} = 52,5$$

b)

$$\tan D\hat{E}B = \frac{35}{x} = \frac{35}{52,5}$$

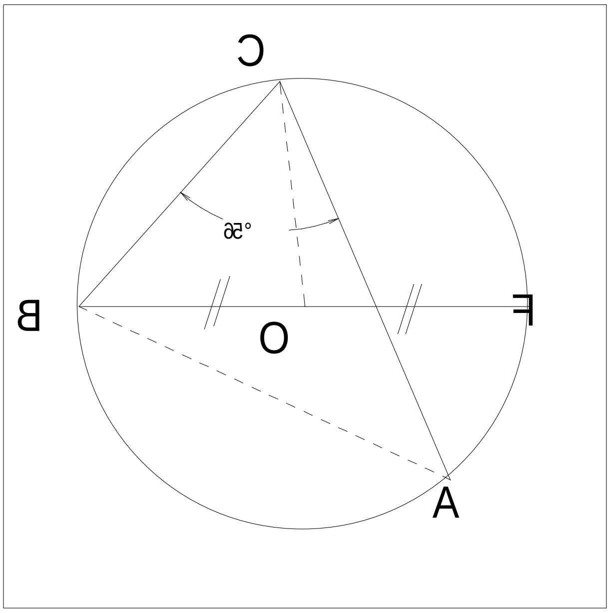
$$d'où$$

$$D\hat{E}B = \tan^{-1}\left(\frac{35}{52,5}\right)$$
$$= C\hat{E}N \approx 34°$$

<u>Exercice :</u> Trigonométrie et angle inscrit :

1. Construire un cercle de centre O et de rayon 3cm.
   Placer sur ce cercle trois points A, B, C de telle façon que BC = 4 cm et $B\hat{C}A = 65°$.
   Construire le point F diamétralement opposé au point B sur ce cercle.
2. Démontrer que le triangle BFC est un triangle rectangle.
3. Calculer le sinus de l'angle $B\hat{F}C$ et en déduire la mesure de cet angle arrondie à un degré près.
4. Déterminer, au degré près, les mesures des angles du triangle BOC.

Corrigé :



1)	Figure ci-dessus.
2)	Un des côtés du triangle est un diamètre du cercle. Le troisième sommet, C, appartient au cercle : le triangle BCF est un triangle rectangle en C.
3)	Dans le triangle rectangle BCF, $\sin\left(B\hat{F}C\right) = \frac{BC}{BF} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. A un degré près : $B\hat{F}C = 42°$.
4)	Pour le cercle dessiné, l'angle $B\hat{O}C$ est l'angle au centre correspondant de l'angle inscrit $B\hat{F}C$: sa mesure est donc le double. A un degré près : $B\hat{O}C = 84°$. Dans le triangle BOC, isocèle de sommet O, (OB=OC), les deux angles à la base sont égaux à la moitié de 180°-84°. A un degré près, $O\hat{B}C = O\hat{C}B = 48°$.