TD d’exercices sur les vecteurs et la géométrie analytique.

Exercice 1 : (Brevet 2006)

1) Placer les points A (-3 ; 1), B (-*l*,5 ; 2,5) et C (3 ; -2) dans un repère orthonormé (O, I, J).

2) Montrer que AC = $\sqrt{45}$.

3) Sachant que AB = $\sqrt{4,5}$ et BC = $\sqrt{40,5}$, démontrer que ABC est un triangle rectangle.

4) Placer le point D image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

5) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 : (Brevet 2006)

On considère un repère orthonormé (O, I, J). L'unité est le centimètre.

1°) Dans ce repère, placer les points :

A (*l* ; 2)   B (-2 ; *l*)   C (-3 ; -2).

2°) Calculer les distances AB et BC.

3°) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

4°) Construire le point D, image du point A par la translation qui transforme B en C.

5°) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

Exercice 3 : (Brevet 2006)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité de longueur est le centimètre.

1) Placer les points : A (-2 ; 1), B (3 ; 2), C (- 3 ; - 2) et G (7 ; 0).

2) *a*) Placer le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$. En déduire la nature du quadrilatère ABEC.

b) Donner par lecture graphique les coordonnées du point E.

3) Calculer la valeur exacte de la longueur AB.

4) Placer le point F(-1 ; 4) et démontrer que F est le symétrique de C par rapport à A

5) Démontrer que B est le milieu du segment [FG] et en déduire sans autre calcul la longueur CG.

Exercice 4 : (Brevet 2005)

On considère un repère orthonormal (O, I, J) (unité : le centimètre).

1°) Placer les points A (-2 ; 3) et C (3 ; 2) dans le repère précédent.

2°) Calculer les distances OA, OC et AC. On donnera les valeurs exactes de ces distances.

3°) Montrer que le triangle OAC est un triangle rectangle isocèle en O.

4°) Construire le point B tel que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

5°) En déduire la nature du quadrilatère OABC.

6°) Déterminer les coordonnées du point M, centre de symétrie du quadrilatère OABC.

Exercice 4 : (Brevet 2004)

Dans un repère orthonormal (O, I, J), on considère les points A (-4 ; 3) , B (3 ; 2) et C (1 ; -2).
L'unité graphique est le centimètre.

PARTIE A :

1. Placer les points A, B, C dans le repère (O, I, J).

2. *a*) Calculer AB.
   b) On admet que le calcul donne AC = $\sqrt{50}$et BC = $\sqrt{20}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

3. Soit H le milieu du segment [BC]. Vérifier par le calcul que H a pour coordonnées (2 ; O).

4. Pourquoi le segment [AH] est-il une hauteur du triangle ABC ?

5. *a*) Prouver que AH = $3\sqrt{5}$.
   b) Calculer l'aire du triangle ABC.

PARTIE B :

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

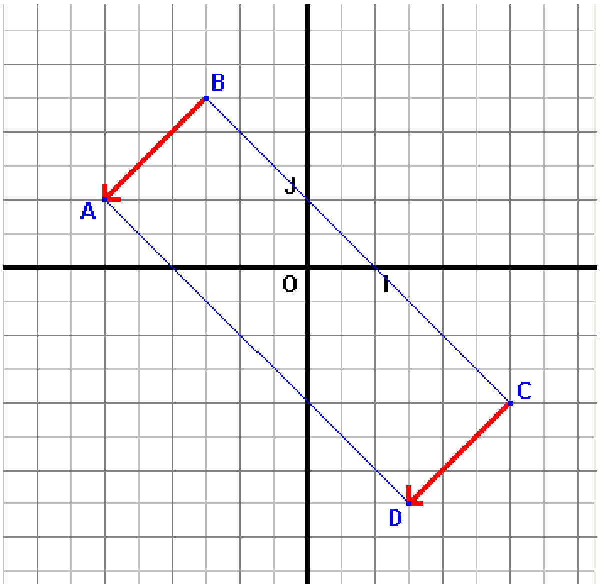
2. Le point D est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
   a) Placer le point D.
   b) Montrer par le calcul que D a pour coordonnées (8 ; -3).

3. Quelle est la nature du quadrilatère ACDB ? Justifier.

Correction TD d’exercices sur les vecteurs et la géométrie analytique.

__**Correction de l’Exercice 1**__ : (Brevet 2006)

__1) Placer les points A (-3 ; 1), B (-/,5 ; 2,5) et C (3 ; -2) :__ (voir ci-contre)



__2) Montrer que__ AC = $\sqrt{45}$.

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3 - (-3))^2 + (-2 - 1)^2)} = \sqrt{6^2+(-3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$$

__3) Sachant que AB = $\sqrt{4,5}$et BC = $\sqrt{40,5}$, démontrer que ABC est un triangle rectangle.__

$$AB^2 + AC^2 = \sqrt{4,5}^2 + \sqrt{40,5}^5 = 4,5 + 40,5 = 45 \text{ , } AC^2 = \sqrt{45}^2 = 45$$

Dans le triangle ABC, nous avons $AC^2 = AB^2 + BC^2$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, nous concluons que le triangle ABC est rectangle en B.

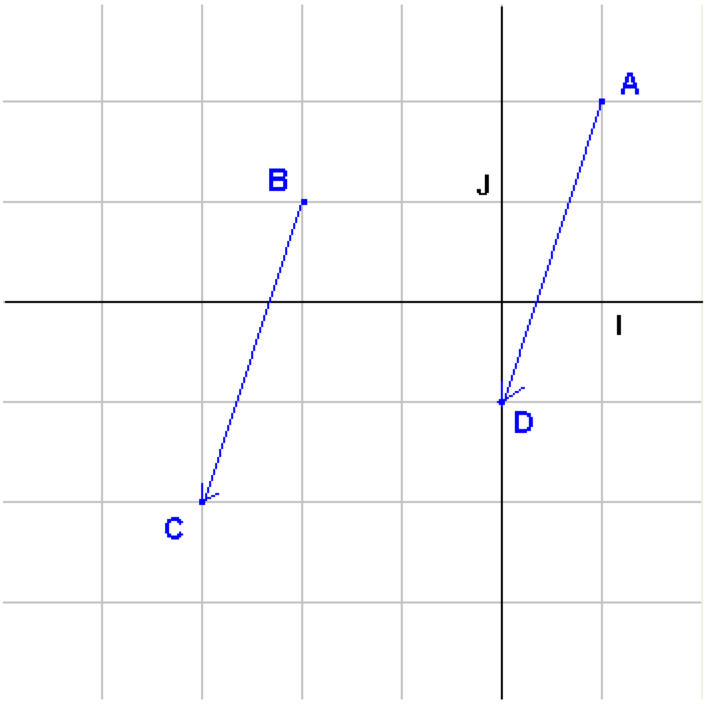
4__) Placer le point D image de C__ par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$. (voir ci-contre)

__5) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?__

Par construction, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$et le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. Il a un angle droit en B, donc c'est un rectangle.

Correction de l'Exercice 2 : (Brevet 2006)

1°) Dans ce repère, placer les points : A (1 ; 2)   B (-2 ; 1)   C (-3 ; -2). (voir ci-contre)



2°) Calculer les distances AB et BC.

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-3 - (-2))^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

3°) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{BC}$a pour coordonnée x_C-x_B = -3-(-2) = -1 et y_C-y_B = -2-1 = -3

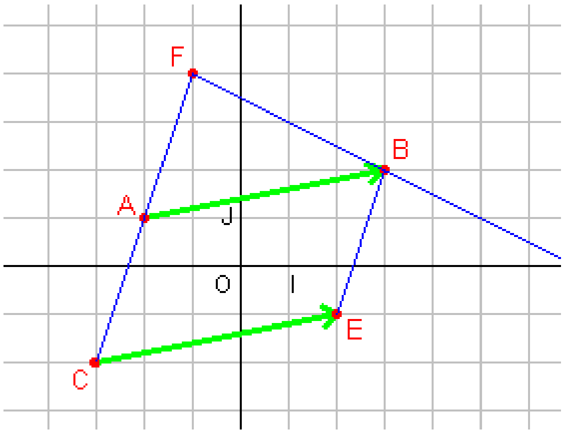
4°) Construire le point D, image du point A par la translation qui transforme B en C. (voir ci-contre)

5°) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

Par construction $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. Deux côtés consécutifs AB et BC ont même longueur, le parallélogramme est donc un losange.

Correction de l'Exercice 3 : (Brevet 2006)

) Placer les points : A (-2 ; 1), B (3 ; 2), C (- 3 ; - 2) et G (7 ; 0). (voir ci-contre)



2) *a)* Placer le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$. En déduire la nature du quadrilatère ABEC.

Par construction, le quadrilatère ABEC est un parallélogramme..

b) Donner par lecture graphique les coordonnées du point E.

Les coordonnées de E sont (2 , -1).

3) Calculer la valeur exacte de la longueur AB.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5^2 +}$$

4) Placer le point F(-1 ; 4) et démontrer que F est le symétrique de C par rapport à A

Calculons les coordonnées du milieu I de [CF]

$$x_I = \frac{x_C + x_F}{2} = \frac{(-3) + (-1)}{2} = \frac{-4}{2} = -2 \; ; \; y_I = \frac{y_C + y_F}{2} = \frac{(-2) + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Les coordonnées trouvées sont celles de A qui est donc le milieu de [CF], F est le symétrique de C par rapport à A.

5) Démontrer que B est le milieu du segment [FG] et en déduire sans autre calcul la longueur CG.

Calculons les coordonnées du milieu J de [FG]

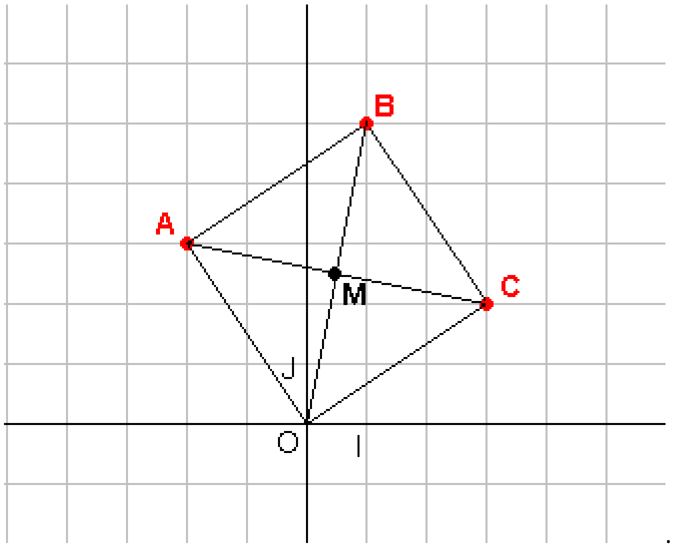
$$x_J = \frac{x_F + x_G}{2} = \frac{(-1) + 7}{2} = \frac{6}{2} = 3 \; ; \; y_J = \frac{y_F + y_G}{2} = \frac{4 + 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Les coordonnées trouvées sont celles de B qui est donc le milieu de [FG].

Dans le triangle CFG, (AB) est une droite des milieux, nous pouvons en déduire que $CG = 2\,AB = 2\sqrt{26}$.

Correction de l'Exercice 4 : (Brevet 2005)

1°) Placer les points A (-2 ; 3) et C (3 ; 2) dans le repère



2°) Calculer les distances OA, OC et AC. On donnera les valeurs exactes de ces distances.

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{(-2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$OC = \sqrt{(x_C - x_O)^2 + (y_C - y_O)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (2-3)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

3°) Montrer que le triangle OAC est un triangle rectangle isocèle en O.

$$OA^2 + OC^2 = \sqrt{13}^2 + \sqrt{13}^2 = 13 + 13 = 26 = \sqrt{26}^2 = AC^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle AOC est rectangle en O.

4°) Construire le point B tel que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. (voir figure)

5°) En déduire la nature du quadrilatère OABC.

Comme $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$, le quadrilatère OABC est un parallélogramme ; il a un angle droit en O et deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un carré.

6°) Déterminer les coordonnées du point M, centre de symétrie du quadrilatère OABC.

M doit être le milieu de [AC].

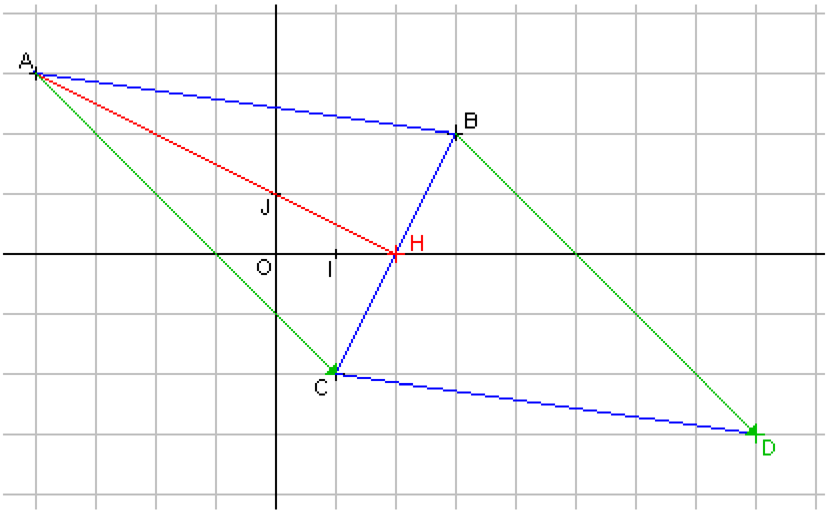
$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ ;\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

Les coordonnées du point M sont (0,5 ; 2,5).

Correction de l'Exercice 5 : (Brevet 2004)

PARTIE A :

1. Placer les points A (-4 ; 3) , B (3 ; 2) , C (1 ; -2) dans le repère (O, I, J).



2. *a*) Calculer AB.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(3 - (-4))^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

b) On admet que le calcul donne AC = $\sqrt{50}$ et BC = $\sqrt{20}$. Que peut-on en déduire pour le triangle ABC ?

AC = AB, le triangle est donc isocèle.

3. Soit H le milieu du segment [BC]. Vérifier par le calcul que H a pour coordonnées (2 ; O).

$$x_H = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad ; \quad y_H = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

4. Pourquoi le segment [AH] est-il une hauteur du triangle ABC ?

Dans un triangle ABC isocèle en A, la hauteur et la médiane issues de A sont confondues.
H étant le milieu de [BC], il est le pied de la médiane issue de A, donc également de la hauteur issue de A.

5. *a*) Prouver que AH = $3\sqrt{5}$.

$$\sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2} = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

b) Calculer l'aire du triangle ABC.

$$\text{Aire(ABC)} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{\sqrt{20} \times 3\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}}{2} = \frac{6\sqrt{5}^2}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

PARTIE B :

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC}$ $(x_C - x_A ; y_C - y_A)$ = (1 - (-4) ; -2 - 3) = (1+4 ; -5) = (5 ; -5)
Les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ sont (5 ; -5).

2. *a*) Le point D est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Placer le point D. (voir figure)

b) Montrer par le calcul que D a pour coordonnées (8 ; -3).

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ donc $x_D - x_B = 5$; $x_D = 5 + x_B = 5 + 3 = 8$ et $y_D - y_B = -5$; $y_D = -5 + y_B = -5 + 2 = -3$

3. Quelle est la nature du quadrilatère ACDB ? Justifier.

Comme $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, le quadrilatère convexe ACDB a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est un parallélogramme.
De plus, AB = AC. Deux côtés consécutifs ont la même longueur, le parallélogramme ACDB est un losange.