

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2011

MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 (4 points)

Commun à tous les candidats

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4} .

Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T l'événement « le test est positif ».

\overline{V} et \overline{T} désignent respectivement les événements contraires de V et T .

1.
 - a. Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
 - b. En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.
3.
 - a. Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
 - b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

EXERCICE 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives $z_A = 1, z_B = i, z_C = -1, z_D = -i$.

1. L'image E du point D par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ a pour affixe :

- $z_E = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 + i)$,
- $z_E = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}(1 - i)$,
- $z_E = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 - i)$,
- $z_E = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}(1 + i)$.

2. L'ensemble des points d'affixe z telle que $|z + i| = |z - 1|$ est :

- la médiatrice du segment $[BC]$,
- le milieu du segment $[BC]$,
- le cercle de centre O et de rayon 1,
- la médiatrice du segment $[AD]$.

3. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\frac{z+i}{z+1}$ soit un imaginaire pur est :

- la droite (CD) privée du point C ,
- le cercle de diamètre $[CD]$ privé du point C ,
- le cercle de diamètre $[BD]$ privé du point C ,
- la médiatrice du segment $[AB]$.

4. L'ensemble des points d'affixe z telle que $\arg(z - i) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ est :

- le demi-cercle de diamètre $[BD]$ passant par A ,
- la droite (BD) ,
- la demi-droite $]BD)$ d'origine B passant par D privée de B ,
- le cercle de diamètre $[BD]$ privé de B et D .

EXERCICE 3 (7 points)

Commun à tous les candidats

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par :

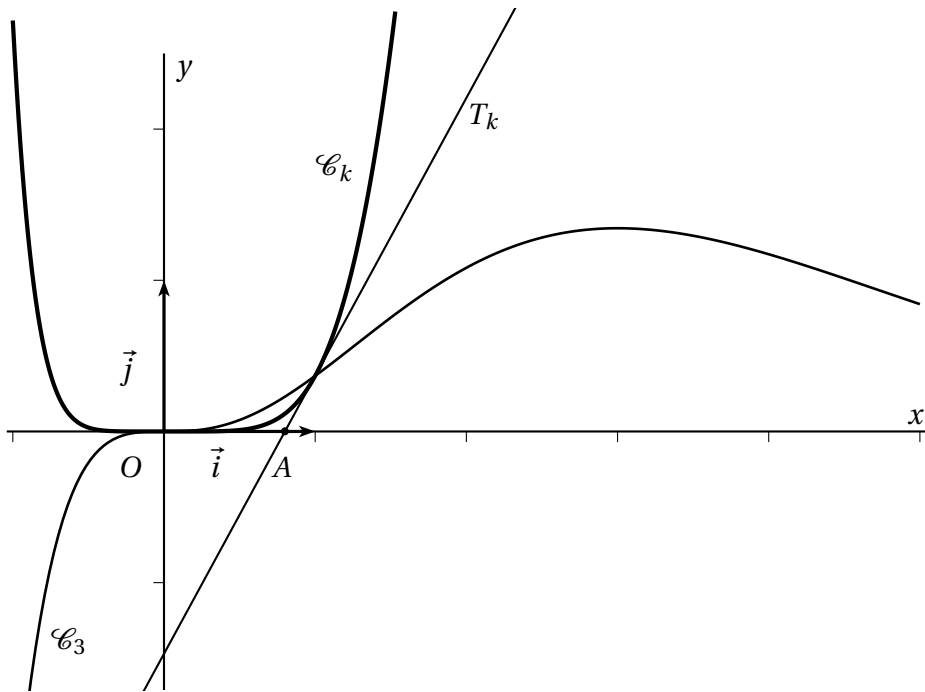
$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On note \mathcal{C}_n sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

PARTIE A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe \mathcal{C}_k où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe \mathcal{C}_3 .

La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $(\frac{4}{5}, 0)$.



- Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
 - Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1 .
 - À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.
- Démontrer que pour $n \geq 1$, toutes les courbes \mathcal{C}_n passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
 - Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x ,

$$f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}.$$

3. Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.
4.
 - a. Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}, 0\right)$.
 - b. En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k .

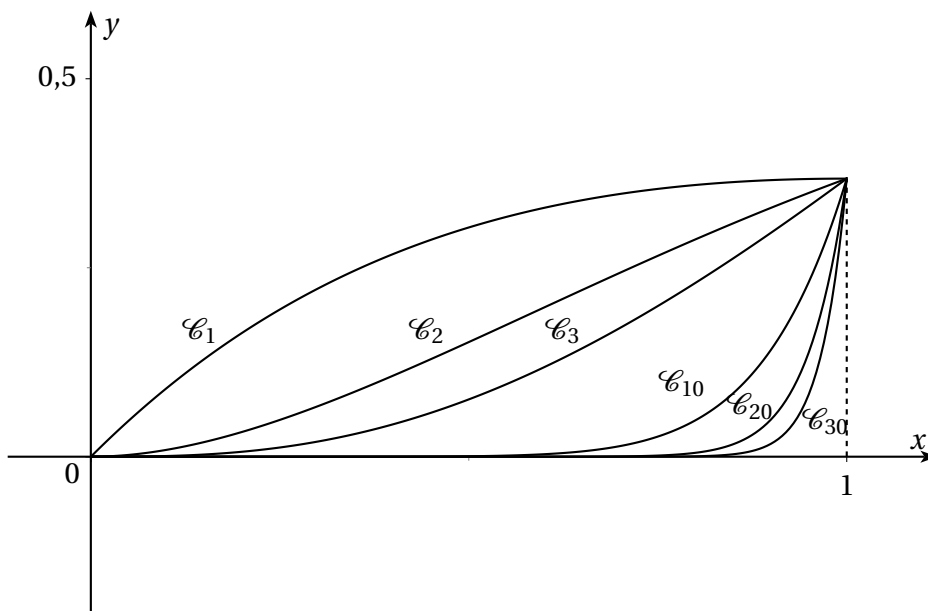
PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. Calculer I_1 .
2. *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}, \mathcal{C}_{30}$ comprises dans la bande définie par $0 \leq x \leq 1$.



- a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant sa démarche.
- b. Démontrer cette conjecture.
- c. En déduire que la suite (I_n) est convergente.
- d. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

PARTIE A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.

Théorème de BÉZOUT :

Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :

Soient a, b, c des entiers relatifs.

Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c .

1. En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.
2. Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux. Dédurre du théorème de GAUSS que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0 [p]$ et $a \equiv 0 [q]$, alors $a \equiv 0 [pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble \mathcal{S} des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 [17] \\ n \equiv 3 [5] \end{cases}$$

1. Recherche d'un élément de \mathcal{S} .
On désigne par (u, v) un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.
 - a. Justifier l'existence d'un tel couple (u, v) .
 - b. On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
Démontrer que n_0 appartient à \mathcal{S} .
 - c. Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à \mathcal{S} .
2. Caractérisation des éléments de \mathcal{S}
 - a. Soit n un entier relatif appartenant à \mathcal{S} .
Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 [85]$.
 - b. En déduire qu'un entier relatif n appartient à \mathcal{S} si et seulement si n peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.
3. Application
Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
Combien a-t-elle de jetons ?