TD n°4 : Formes différentielles et Intégration. : CORRECTION.

Exercice 1 Les formes différentielles suivantes sont-elles fermées ? Sont-elles exactes ? Préciser une primitive le cas échéant.

1. $x\,dy - y\,dx$
2. $(x^2+3y)\,dx - y^3\,dy$
3. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$
4. $x^2\,dx + xy\,dy + z^2\,dz$
5. $x^3\,dx + y^3\,dy + z^3\,dz$
6. $e^x(y+x)\,dx + (e^x + 3e^y)\,dy$
7. $x(y-1)\,dx + y(x+1)\,dy$
8. $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$ où on restreint le domaine de définition à $x > 0$.
9. $\dfrac{(1-x^2+y^2)y}{(1+x^2+y^2)^2}\,dx + \dfrac{(1+x^2-y^2)x}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy$

➢ **Voir le cours : http://www.math93.com/theoreme/formes_differentielles.html**

---

1) **On pose** $\omega = -ydx + xdy = A_1dx + A_2dy$

La forme différentielle w est-elle fermée ?

ω est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ et on a : $\frac{\partial A_1}{\partial y} = -1$ et $\frac{\partial A_2}{\partial x} = 1$ donc ω n'est pas fermée sur $\mathbb{R}^2$

La forme différentielle ω est-elle exacte ?

Par théorème, si U ouvert de $\mathbb{R}^p$, $\boxed{\omega \text{ exacte sur } U \implies \omega \text{ fermée sur } U}$. Donc puisque ω n'est pas fermée, ω n'est pas exacte.

---

2) **On pose** $\omega = (x^2+3y)dx + (-y^3)dy = A_1dx + A_2dy$

La forme différentielle ω est-elle fermée ?

ω est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ et on a : $\frac{\partial A_1}{\partial y} = 3$ et $\frac{\partial A_2}{\partial x} = 0$ donc ω n'est pas fermée sur $\mathbb{R}^2$

La forme différentielle ω est-elle exacte ?

Par théorème, si U ouvert de $\mathbb{R}^p$, $\boxed{\omega \text{ exacte sur } U \implies \omega \text{ fermée sur } U}$. Donc puisque ω n'est pas fermée, ω n'est pas exacte.

---

3) **On pose** $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy = A_1dx + A_2dy$

La forme différentielle ω est-elle fermée ?

ω est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ et on a : $\frac{\partial A_1}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial A_2}{\partial x}$ donc ω est fermée sur l'ouvert non étoilé $\mathbb{R}^2\backslash\{0;0\}$

La forme différentielle ω est-elle exacte ?

ω exacte sur U ssi il existe $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $d_a F = \omega(a)$ (pour a de U)

Sur $\mathbb{R}^2$: Cela correspond à : $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = A_1(x,y)$ *et* $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = A_2(x,y)$

donc on cherche une fonction F de classe C^1 telle que :

- $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = A_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$; soit $F(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + a(y)$ (avec a C^1)
- $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = A_2(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ *soit* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + a(y)\right) = \frac{y}{x^2+y^2} + a'(y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

Donc $a^{'}(y) = 0$ soit $a(y) = Cte$

Finalement ω est bien exacte sur $\mathbb{R}^2$ et $\omega = dF$ avec $\boxed{F(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + Cte}$

4) **On pose** $\omega = \boldsymbol{x^2dx + xydy + z^2dz = A_1dx + A_2dy + A_3dz}$

La forme différentielle ω est-elle fermée ?

ω est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$ et on a : $\frac{\partial A_2}{\partial x} = y$ *et* $\frac{\partial A_1}{\partial y} = 0$ donc ω n'est pas fermée sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^3$

La forme différentielle ω est-elle exacte ?

Par théorème, si U ouvert de $\mathbb{R}^p$, $\boxed{\omega \text{ exacte sur } U \implies \omega \text{ fermée sur } U}$. Donc puisque ω n'est pas fermée, ω n'est pas exacte.

5) **On pose** $\omega = \boldsymbol{x^3dx + y^3dy + z^3dz = A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3}$

La forme différentielle ω est-elle fermée ?

ω est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^3$ et on a pour $i \neq j$ dans {1,2,3} : $\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = 0 = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$ donc ω est fermée sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^3$

La forme différentielle ω est-elle exacte ?

ω exacte sur U ssi il existe $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C[1] telle que : $d_a\, F = \omega(a)$ (pour a de U)

Sur $\mathbb{R}^3$: Cela correspond à : $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = A_1(x,y,z)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = A_2(x,y,z)$ *et* $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y) = A_3(x,y,z)$

donc on cherche une fonction F de classe C[1] telle que :

- $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = A_1(x,y) = \boldsymbol{x^3}$; soit $\boldsymbol{F(x,y) = \frac{x^4}{4} + a(y,z)}$ (avec a C[1])
- $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = A_2(x,y) = \boldsymbol{y^3}$ *soit* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4} + a(y,z)\right) = \frac{\partial a}{\partial y}(y,z) = \boldsymbol{y^3}$ Donc $\boldsymbol{a(y,z) = \frac{y^4}{4} + b(z)}$
- $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y) = A_3(x,y) = \boldsymbol{z^3}$ *soit* $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4}{4} + \frac{\boldsymbol{y^4}}{\boldsymbol{4}} + \boldsymbol{b(z)}\right) = \mathrm{b}'(z) = \boldsymbol{z^3}$ Donc $\boldsymbol{b(z) = \frac{z^4}{4} + Cte}$

Finalement ω est bien exacte sur $\mathbb{R}^2$ et $\omega = dF$ avec $\boxed{\boldsymbol{F(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{z^4}{4} + Cte}}$

6) **On pose** $\omega = \boldsymbol{e^x(x+y)dx + (e^x + 3e^y)dy = A_1dx_1 + A_2dx_2}$

La forme différentielle ω est-elle fermée ?

ω est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ et on a pour $i \neq j$ dans {1,2} : $\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \boldsymbol{e^x} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$ donc ω est fermée sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^2$

La forme différentielle ω est-elle exacte ?

Finalement ω est bien exacte et $\omega = dF$ avec $\boxed{\boldsymbol{F(x,y) = (x+y-1)e^x + 3e^y + Cte}}$

7) **On pose** $\omega = \boldsymbol{x(y-1)dx + y(x+1)dy = A_1dx + A_2dy}$

La forme différentielle ω est-elle fermée ?

ω est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ et on a : $\frac{\partial A_2}{\partial x} = y$ *et* $\frac{\partial A_1}{\partial y} = x$ donc ω n'est pas fermée sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^2$

La forme différentielle ω est-elle exacte ?

Par théorème, si U ouvert de $\mathbb{R}^p$, $\boxed{\omega \text{ exacte sur } U \implies \omega \text{ fermée sur } U}$. Donc puisque ω n'est pas fermée, <u>ω n'est pas exacte</u>.

---

8) **On pose** $\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = A_1dx + A_2dy$ **avec** $x > 0$ [Auca]p 560

On note $U = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0\}$, U est donc le demi-plan délimité par (Oy) , (Oy) exclu, ne contenant pas (-1 ;0).

<u>La forme différentielle ω est-elle fermée ?</u>

ω est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ et on a pour $i \neq j$ dans $\{1,2\}$: $\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$ donc <u>ω est fermée sur l'ouvert étoilé U</u>

<u>La forme différentielle ω est-elle exacte ?</u>

ω exacte sur U ssi il existe $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $d_a F = \omega(a)$ (pour a de U)

<u>Sur $\mathbb{R}^2$</u> : Cela correspond à : $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = A_1(x,y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = A_2(x,y)$

donc on cherche une fonction F de classe C^1 telle que :

- $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = A_1(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$; soit $F(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + a(y)$ si $y \neq 0$ (avec a C^1)
- <u>Pour $y \neq 0$</u>
  $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = A_2(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$ soit $\frac{\partial}{\partial y}\left(\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + a(y)\right) = \frac{-x}{x^2+y^2} + a'(y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$
  donc $a(y) = Cte$

Finalement ω est bien exacte sur <u>U privé de l'axe des abscisses</u> et $\omega = dF$ avec $\boxed{F(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + Cte}$

<u>Remarque</u> :
La forme difféentielle $\omega = \frac{y}{x^2+y^2}dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy$ est fermée sur tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^2\backslash\{0;0\}$ mais elle n'est pas exacte sur un ouvert contenant des points $(x\,;0)$.

---

9) **On pose** $\omega = \frac{y(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}dx + \frac{x(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}dy = A_1dx + A_2dy$

<u>La forme différentielle ω est-elle fermée ?</u>

ω est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ et on a : $\frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{-x^4+6x^2y^2-y^4+1}{(1+x^2+y^2)^3} = \frac{\partial A_1}{\partial y}$ donc <u>ω est fermée sur l'ouvert étoilé</u> $\mathbb{R}^2$

<u>La forme différentielle ω est-elle exacte ?</u>

ω exacte sur U ssi il existe $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $d_a F = \omega(a)$ (pour a de U)

<u>Sur $\mathbb{R}^2$</u> : Cela correspond à : $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = A_1(x,y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = A_2(x,y)$

donc on cherche une fonction F de classe C^1 telle que :

- $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = A_1(x,y) = \frac{y(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$; soit $F(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2} + a(y)$ (avec a C^1)
- $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = A_2(x,y) = \frac{x(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$ soit $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{1+x^2+y^2} + a(y)\right) = \frac{x(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2} + a'(y) = \frac{x(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}$

  Donc $a'(y) = 0$ soit $a(y) = Cte$

Finalement ω est bien exacte sur $\mathbb{R}^2$ et $\omega = dF$ avec $\boxed{F(x,y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2} + Cte}$

Exercice 2 Soit la forme différentielle

$$\omega = (x^2 + y^2 - 1)\,\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y$$

a) Montrer que ω n'est pas exacte.
b) Déterminer une fonction φ (à une variable) telle que la forme différentielle $\omega_1 = \varphi(x)\omega$ soit fermée.
c) Montrer que ω_1 est alors exacte et déterminer une primitive.

- **Voir le cours : http://www.math93.com/theoreme/formes_differentielles.html**

---

a) La forme différentielle ω est-elle exacte ?

Regardons si elle est fermée.

ω est une forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ et on a : $\frac{\partial A_2}{\partial x} = 0$ *et* $\frac{\partial A_1}{\partial y} = 2y$ donc ω n'est pas fermée sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^2$

Par théorème, si U ouvert de $\mathbb{R}^p$, $\boxed{\omega \text{ exacte sur } U \implies \omega \text{ fermée sur } U}$. Donc puisque ω n'est pas fermée, ω n'est pas exacte.

b) Déterminons φ telle que la forme différentielle ω_1 définie par: $\omega_1(x,y) = \varphi(x) \times \omega(x,y)$ soit fermée.

Déterminons φ telle que ω_1 soit fermée. On pose $\omega_1 = B_1 dx + B_2 dy$

$\frac{\partial B_1}{\partial y} = 2y\varphi(x)$ et $\frac{\partial B_2}{\partial x} = -2y\varphi'(x)$. Donc on prend par exemple $\varphi(x) = e^{-x}$. ainsi $\varphi'(x) = -\varphi(x)$ et $\frac{\partial B_1}{\partial y} = \frac{\partial B_2}{\partial x}$

Donc en prenant $\varphi(x) = e^{-x}$, ω_1 est fermée sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^2$

On a alors $\boxed{\omega_1 = (x^2 + y^2 - 1)e^{-x}\,dx - 2y\,e^{-x}\,dy}$

c) Posons : $\boldsymbol{\omega_1 = (x^2 + y^2 - 1)e^{-x}\,dx - 2y\,e^{-x}\,dy = B_1 dx + B_2 dy}$

ω_1 exacte sur U ssi il existe $F : U \to \mathbb{R}$ de classe C[1] telle que : $d_a F = \omega_1(a)$ (pour a de U)

Sur $\mathbb{R}^2$: Cela correspond à : $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = B_1(x,y)$ *et* $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = B_2(x,y)$

donc on cherche une fonction F de classe C[1] telle que :

- $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = B_2(x,y) = -2y\,e^{-x}$; soit $F(x,y) = -y^2\,e^{-x} + a(x)$ (avec a C[1])
- $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = B_1(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)e^{-x}$ *soit* $\frac{\partial}{\partial x}\left(-y^2\,e^{-x} + a(x)\right) = y^2\,e^{-x} + a'(x) = (x^2 + y^2 - 1)e^{-x}$

  Donc $a'(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$ soit après IPP $a(x) = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x}$

  Finalement ω_1 est bien exacte sur $\mathbb{R}^2$ et $\omega_1 = dF$ avec $\boxed{F(x,y) = -(x^2 + y^2 + 2x + 1)e^{-x} + Cte}$

Remarque :

On peut vérifier que si $\omega_1(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)e^{-x}\,dx - 2y\,e^{-x}\,dy$ et $F(x,y) = -(x^2 + y^2 + 2x + 1)e^{-x} + Cte$ on a $\omega_1 = dF$

Exercice 3.

- **Voir le cours : http://www.math93.com/theoreme/formes_differentielles.html**

---

1. $\boldsymbol{f(\vec{r}) = \vec{a}}$ **avec** $\boldsymbol{\vec{a} = \overrightarrow{Cte}}$

   - **f dérive-t-elle d'un potentiel ?**

     $A_j = a_j$ = Cte donc $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{0}$ car pour $i \neq j$ dans {1,2,3} : $\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = 0 = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$

     De ce fait $\overrightarrow{rot}\left(\vec{F}\right) = \vec{0}$ sur U = $\mathbb{R}^2$ ouvert étoilé et donc **f dérive d'un potentiel** .

   - **Déterminons $\boldsymbol{\varphi}$ telle que $\boldsymbol{f = \overrightarrow{grad}\,\varphi}$.** On a . $f = \overrightarrow{grad}\,\varphi = (a_1; a_2; a_3)$ donc
     - $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \boldsymbol{a_1}$ soit $\varphi(x, y, z) = \boldsymbol{a_1}x + g(y, z)$
     - $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \boldsymbol{a_2}$ soit $g(y, z) = \boldsymbol{a_2}y + h(z)$
     - $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \boldsymbol{a_3}$ soit $h(z) = \boldsymbol{a_3}z + Cte$

     Donc $\boxed{\boldsymbol{\varphi(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z + Cte}}$

---

2. $\boldsymbol{f(x, y, z) = (x^2, xy, z^2)}$
   - **f dérive-t-elle d'un potentiel ?**

     $\frac{\partial A_2}{\partial x} = y$ et $\frac{\partial A_1}{\partial y} = 0$ donc f ne dériva pas d'un potentiel.

---

3. $\boldsymbol{f(\vec{r}) = \vec{r} \wedge \vec{a}}$ **On pose $\boldsymbol{\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \neq \vec{0}}$**
   - **f dérive-t-elle d'un potentiel ?**

     $\frac{\partial A_1}{\partial y} = \boldsymbol{a_3}$ et $\frac{\partial A_2}{\partial x} = -\boldsymbol{a_3}$ donc f ne dériva pas d'un potentiel. (sauf si $\boldsymbol{a_3} = 0$)

     $\frac{\partial A_1}{\partial z} = -\boldsymbol{a_2}$ et $\frac{\partial A_3}{\partial x} = \boldsymbol{a_2}$ donc f ne dériva pas d'un potentiel. (sauf si $\boldsymbol{a_2} = 0$)

     $\frac{\partial A_2}{\partial z} = \boldsymbol{a_1}$ et $\frac{\partial A_3}{\partial y} = -\boldsymbol{a_1}$ donc f ne dériva pas d'un potentiel. (sauf si $\boldsymbol{a_1} = 0$)

     donc f ne dériva pas d'un potentiel puisque .$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \neq \vec{0}$

---

4. $\boldsymbol{f(\vec{r}) = \vec{r}}$
   - **f dérive-t-elle d'un potentiel ?**

     Pour $i \neq j$ dans {1,2,3} : $\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = 0 = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$ sur U = $\mathbb{R}^2$ ouvert étoilé et donc **f dérive d'un potentiel** .

   - $\boldsymbol{f = \overrightarrow{grad}\,\varphi} = (x, y, z)$ Donc $\boxed{\boldsymbol{\varphi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + Cte}}$

---

5. $\boldsymbol{f(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)}$

   $\boldsymbol{f = \overrightarrow{grad}\,\varphi} = (x, y, z)$ et $\boxed{\boldsymbol{\varphi(x, y, z) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{z^4}{4} + Cte}}$

---

6. $\boldsymbol{f(x, y, z) = (e^x, 0, 0)}$

   $\boldsymbol{f = \overrightarrow{grad}\,\varphi} = (x, y, z)$ et $\boxed{\boldsymbol{\varphi(x, y, z) = e^x + Cte}}$

Exercice 4. Intégrales curviligne

1. $\boldsymbol{I = \int_\Gamma xy^2dx + x^2dy}$ **sur Γ le segment reliant A(1 ;1) et B(2 ;3)**

- **Γ :** Equation du segment [AB] : $x \in [1;2]$ et $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$.

  Le paramétrage est donc : $\begin{cases} x = & x(t) = t \\ y = & y(t) = 2t-1 \end{cases}$ soit : $\begin{cases} x'(t) = 1 \\ y'(t) = 2 \end{cases}$

  Alors d'après la définition : $\boxed{\int_\gamma \omega = \int_a^b [P\left(x(t),y(t)\right)x'(t) + Q\left(x(t),y(t)\right)y'(t)]\,dt}$

- Calcul de l'intégrale curviligne. : $I = \int_1^2 t(2t-1)^2dt + t^2 2\,dt = \int_1^2 4t^3 - 2t^2 + t\,dt = \boxed{\frac{71}{6}}$

---

2. $\boldsymbol{I = \int_\Gamma xydx + ydy}$ **sur Γ l'arc AB du cercle C(O ;2) avec A(2 ;0) et B(0 ;2)**

- **Γ :** arc AB :
  Le cercle C est d'équation : $x^2+y^2=4$
  Par passage en coordonnées polaires $\begin{cases} x = & x(t) = 2\cos t \\ y = & y(t) = 2\sin t' \end{cases}$ avec t qui varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

  Donc $\begin{cases} x'(t) & = -2\sin t \\ y'(t) & = 2\cos t \end{cases}$

- Calcul de l'intégrale curviligne.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4\cos t\, sint\, t\,(-2\sin t) + 2sint\, t\,(2\cos t)]\,dt = \left[-\frac{8}{3}sin^3(t) + 2\,sin^2(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

---

3. $\boldsymbol{I = \int_\Gamma xydx + yx^2dy}$ **sur Γ le carré de sommet O, A(0,1), B(11) et C(1,0) parcouru dans le sens O,A,B,C,O**

- **Γ :** carré ABCD :

Sur [OA] : $\begin{cases} x = 0 \\ y \text{ varie de } 0 \text{ à } 1 \end{cases}$ Sur [AB] : $\begin{cases} x \text{ varie de } 0 \text{ à } 1 \\ y = 1 \end{cases}$ Sur [BC] : $\begin{cases} x = 1 \\ y \text{ varie de } 1 \text{ à } 0 \end{cases}$ Sur [CO] : $\begin{cases} x \text{ varie de } 1 \text{ à } 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Calcul de l'intégrale curviligne.

$$\boldsymbol{I = \int_\Gamma xydx + yx^2dy} = \int_{[OA]} + \int_{[AB]} + \int_{[BC]} + \int_{[CO]} = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} 0\,dy + \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} x dx + \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} y\,dy + \int_{\mathbf{1}}^{\mathbf{0}} 0\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\mathbf{0}}$$

Compléments.

- C'est un chemin fermé. $\omega = xydx + yx^2dy$ est-elle fermée ? $\Longrightarrow$ NON.
- Appliquons Green-Riemann. $\boxed{\iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] \boldsymbol{dxdy} = \int_\Gamma \boldsymbol{Pdx + Qdy}}$

$$\int_\Gamma Pdx + Qdy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dxdy = \iint_D [2xy - x]\,dxdy = \int_0^1 x\left(\int_0^1 (2y-1)\,dy\right)dx = \int_0^1 x\,[y^2-y]_0^1\,dx = 0$$

4. $\boldsymbol{I = \int_\Gamma y^2dx + x^2dy}$ **sur Γ l'arc de parabole $2y^2 = x + 1$ qui joint A(1 ;1) à B(-1 ;0)**

<u>Γ : l'arc de parabole</u> :

Sur cet arc, $\begin{cases} x = 2y^2 - 1 \\ y \text{ varie de } 1 \text{ à } 0 \end{cases}$ Le paramétrage est donc : $\begin{cases} x = & x(t) = 2t^2 - 1 \\ y = & y(t) = t \end{cases}$ soit : $\begin{cases} x'(t) = 4t \\ y'(t) = 1 \end{cases}$

- <u>Calcul de l'intégrale curviligne</u>.

$$I = \int_\Gamma y^2dx + x^2dy = \int_1^0 t^2\,(4tdt) + (2t^2 - 1\,)^2dt = \left[\frac{4t^5}{5} + t^4 - \frac{4t^3}{3} + t\right]_1^0 = \boxed{-\frac{\mathbf{22}}{\mathbf{15}}}$$

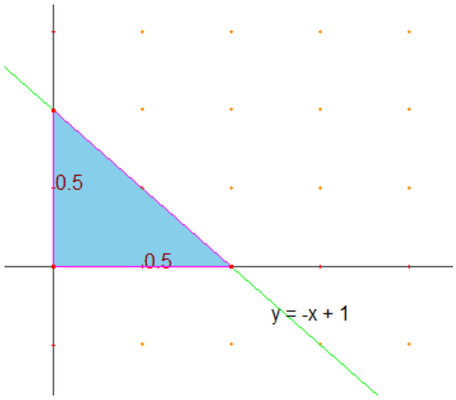
Exercice 11 Calculer $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{-x}e^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x, y\geq 0, x+y\leq 1\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2<x, x^2+y^2>y\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y)\in[0,1]^2/x^2+y^2\geq 1\}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x, y>0, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$ avec $a, b>0$.

1. Calculons : $\boldsymbol{I = \iint_D (x+y)e^{-x}e^{-y}\,dxdy}$ **sur** $\boldsymbol{D} = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\quad \boldsymbol{x, y\geq 0,\ \ x+y\leq 1}\}$.

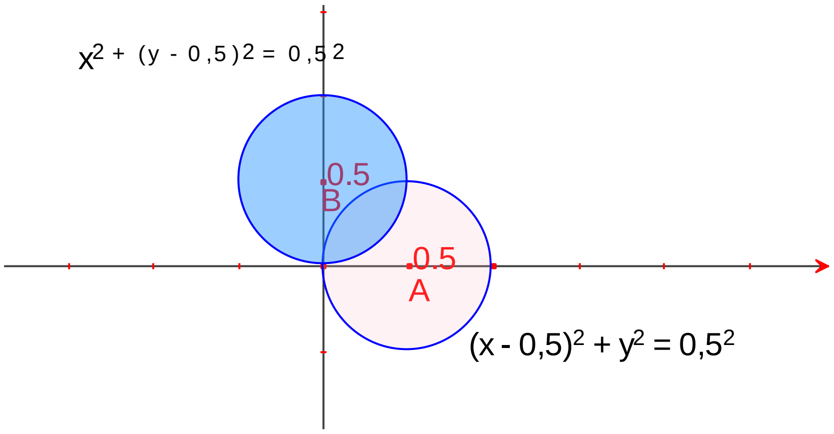


$$I = \iint\ (x+y)e^{-x}e^{-y}\,dxdy = \int_0^1 e^{-x}\left(\int_0^{1-x}(x+y)e^{-y}dy\right)dx = \int_0^1 e^{-x}\,[(-x-y-1)e^{-y}]_0^{1-x}\,dx$$

$$I = \int_0^1 e^{-x}(-2e^{x-1}+x+1)\,dx \quad soit\ \boxed{\boldsymbol{I = 2-5e^{-1}}}$$

---

2. Calculons : $\boldsymbol{J = \iint_D (x^2+y^2)\,dxdy}$ **sur** $\boldsymbol{D} = \{(x;y)\in\mathbb{R}^2/\quad \boldsymbol{x^2+y^2} < x\ \ et\ \ x^2+y^2 > y\}$.



Soit $M(x\,;y)$ un point du domaine D.

- <u>La condition 1</u> : $x^2+y^2<x$ correspond à $(x-\frac{1}{2})^2+y^2<\frac{1}{4}$,

  donc M est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ (exclu) de centre $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ et de rayon $R=\frac{1}{2}$
- <u>La condition 2</u> : $x^2+y^2>y$ correspond à $x^2+(y-\frac{1}{2})^2>\frac{1}{4}$,

  donc M est à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}'$ (exclu) de centre $B\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{1}{2}$

Le domaine D correspond donc à la partie uniquement coloriée en rose.
On passe en coordonnées polaires.

Posons $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ alors :

- La condition 1 : $x^2 + y^2 < x$ correspond à $r^2 < r\cos t$,
  $r = \cos t$ est l'équation polaire du premier cercle.
- La condition 2 : $x^2 + y^2 > y$ correspond à $r^2 > r\sin t$,
  $r = \sin t$ est l'équation polaire du second cercle.

Or r est positif donc les deux conditions entrainent : $\boxed{\sin t < r < \cos t}$

- On doit donc avoir : $\cos t\ >\ 0$, donc on peut prendre t dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- On doit avoir en plus $\sin t\ <\ \cos t$, donc on doit avoir t dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}[$
- De plus r est positif donc
  - si t est dans $]0, \frac{\pi}{4}[$, il faut prendre r entre *sin t* et *cos t*
  - si t est entre $]-\frac{\pi}{2}, 0[$, il faut prendre r entre 0 et *cos t*

$$J = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy = \iint (r^2)\, r\, drdt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\int_0^{\cos t} r^3\, dr \right) dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\sin t}^{\cos t} r^3\, dr \right) dt$$

$$J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos^4 t}{4}\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos^4 t - \sin^4 t}{4} \right) dt$$

$$4 \times J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^4 t\ dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos^2 t + \sin^2 t)\ dt$$

$$4 \times J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^4 t\ dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 t - 1)\ dt$$

$$4 \times J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^4 t\ dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)\ dt$$

Il faut linéariser $\cos^4 t$

$$\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 = \frac{(\cos 2t)^2}{4} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1 + \cos 4t}{2} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\cos 4t}{8} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{3}{8}$$

$$\boxed{\cos^4 t = \frac{\cos 4t}{8} + \frac{\cos 2t}{2} + \frac{3}{8}}$$

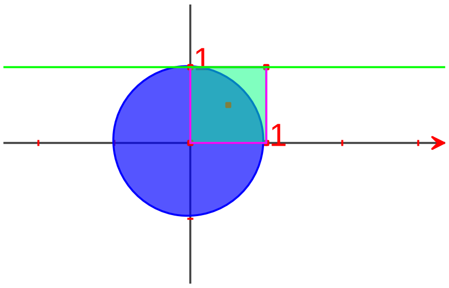
Donc

$$4 \times J = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^4 t\ dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)\ dt = \left[\frac{\sin 4t}{32} + \frac{\sin 2t}{4} + \frac{3}{8}\, t \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \left[\frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$4 \times J = \frac{3\pi}{16} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{J = \frac{3\pi}{64} + \frac{1}{8}}}$$

3. Calculons : $\boldsymbol{K = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dxdy}$ **sur** $\boldsymbol{D = \{(x;y) \in [0;1]^2 \ et\ x^2 + y^2 \geq 1\}}$



Le domaine D correspond aux points extérieurs au cercle C de centre O et de rayon 1, qui sont intérieur au carré O, (1 ;0) (1 ;1), (0 ;1).

Pour x qui varie de 0 à 1, y varie de $\sqrt{1-x^2}$ à 1

$$K = \iint_D \frac{xy}{1+x^2+y^2}\, dxdy = \int_0^1 x \left[\int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \left(\frac{y}{1+x^2+y^2}\right) dy\right] dx$$

$$K = \int_0^1 \frac{x}{2}\, [ln(x^2+y^2+1)]_{\sqrt{1-x^2}}^1\, dx$$

$$2 \times K = \int_0^1 x\, ln\left(\frac{x^2+2}{2}\right)\, dx$$

Par IPP :

$$2 \times K = \int_0^1 x\, ln\left(\frac{x^2+2}{2}\right) = \left[\frac{x^2}{2} ln\left(\frac{x^2+2}{2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{2x}{x^2+2} dx$$

$$\boxed{2 \times K = \frac{1}{2} ln\left(\frac{3}{2}\right) - \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+2} dx}$$

Calculons $\boldsymbol{\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+2} dx}$.

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+2} dx = \int_0^1 \frac{x^3+2x-2x}{x^2+2} dx = \int_0^1 \frac{x(x^2+2)-2x}{x^2+2} dx = \int_0^1 x - \frac{2x}{x^2+2} dx = \left[\frac{x^2}{2} - \ln(x^2+2)\right]_0^1$$

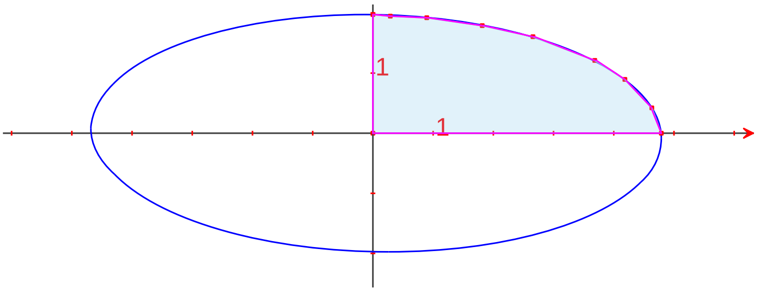
$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+2} dx = \boxed{-\ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{2}}$$

Donc on obtient :

$$2 \times K = \frac{1}{2} ln\left(\frac{3}{2}\right) - \left(-\ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{K = \frac{3}{4} ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{4}}}$$

4. Calculons : $\boldsymbol{K = \iint_D xy\, dxdy}$ **sur** $\boldsymbol{D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x, y > 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}}$**. a et b positifs.**



Le domaine D correspond à l'intérieur de l'ellipse pour x et y positifs

$$K = \iint_D xy\ dxdy = \int_0^a x\left(\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} y\ dy\right)dx = \frac{b^2}{2\,a^2}\int_0^a x(a^2-x^2)dx = \boxed{\boldsymbol{\frac{a^2\, b^2}{8}}}$$