# Chapitre 4 – Suites numériques – Exercices d'entraînement

I. Ciril

**Exercice 1**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes :
• Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l$ alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $l$.
• Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
• Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, de même limite $l$, il en est de même de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice 2**
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

**Exercice 3**
Soit $q$ un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos\frac{2n\pi}{q}$.

1. montrer que $u_{n+q} = u_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer $u_{nq}$ et $u_{nq+1}$. En déduire que la suite $u_n$ n'a pas de limite.

**Exercice 4**
Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geq 3$,

$$u_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2})\cdots(1 - \frac{1}{n^2}).$$

Calculer $u_n$. En déduire que l'on a $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

**Exercice 5**
Soit $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que $\forall n > 0\ \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de $H_n$.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

**Exercice 6**
Étudier la convergence des suites :

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n} \qquad \frac{n\sin(n)}{n^2+1} \qquad \frac{1}{n} + (-1)^n \qquad n\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n^2+k} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\frac{1}{\sqrt{n+k}})$$

**Exercice 7**
Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang.

# Corrections des exercices

**Exercice 1**

1. Vraie. Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite.
2. Faux. Un contre-exemple est la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_n$ est la suite constante (donc convergente) de valeur 1, et $(u_{2n+1})_n$ est constante de valeur $-1$. Cependant la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.
3. Vraie. La convergence de la suite $(u_n)_n$ vers $\ell$, que nous souhaitons démontrer, s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \Big(n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon\Big).$$

Fixons $\epsilon > 0$. Comme, par hypothèse, la suite $(u_{2p})_p$ converge vers $\ell$ alors il existe $N_1$ tel

$$2p \geq N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| < \epsilon.$$

Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_p$ il existe $N_2$ tel que

$$2p + 1 \geq N_1 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \epsilon.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon.$$

Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers $\ell$.

**Exercice 2**
Beaucoup d'entre vous ont compris que $u_n$ n'avait pas de limite, mais il faut arriver à en donner une démonstration formelle. En effet, dès lors qu'on ne sait pas qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on ne peut pas écrire $\lim u_n$, c'est un nombre qui n'est pas défini. Par exemple l'égalité

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n + 1/n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n$$

n'a pas de sens. Par contre voilà ce qu'on peut dire : *Comme la suite $1/n$ tend vers 0 quand $n \to \infty$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si la suite $(-1)^n$ l'est. De plus, dans le cas où elles sont toutes les deux convergentes, elles ont même limite.* Cette affirmation provient tout simplement du théorème suivant :

**Théorème 0.1** *Soient $u_n$ et $v_n$ deux suites convergeant vers deux limites $l$ et $l'$. Alors la suite $w_n = u_n + v_n$ est convergente (on peut donc parler de sa limite) et $\lim w_n = l + l'$.*

De plus, il n'est pas vrai que toute suite convergente doit forcément être croissante et majorée ou décroissante et minorée. Par exemple, $(-1)^n/n$ est une suite qui converge vers 0 mais qui n'est ni croissante, ni décroissante. A ce propos d'ailleurs, on ne dit pas d'une suite qu'elle est *croissante pour $n$ pair et décroissante pour $n$ impair* même si je comprends ce que cela signifie. On dit qu'une telle suite n'est ni croissante ni décroissante (et c'est tout).

Voici maintenant un exemple de rédaction de l'exercice. On veut montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente. Supposons donc par l'absurde qu'elle soit convergente et notons $l = \lim_{n\to\infty} u_n$. (Cette expression a un sens puisqu'on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge).

**Rappel 1.** Une *sous-suite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (on dit aussi *suite extraite* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) est une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $v_n = u_{\phi(n)}$ où $\phi$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Cette fonction $\phi$ correspond "*au choix des indices qu'on veut garder*" dans notre sous-suite. Par exemple, si on ne veut garder dans la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que les termes pour lesquels $n$ est un multiple de trois, on pourra poser $\phi(n) = 3n$, c'est à dire $v_n = u_{3n}$.

Considérons maintenant les sous-suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a que $v_n = 1 + 1/2n \to 1$ et que $w_n = -1 + 1/(2n+1) \to -1$. Or on a le théorème suivant sur les sous-suites d'une suite convergente :

**Théorème 0.2** *Soit $u_n$ une suite convergeant vers la limite $l$ (le théorème est encore vrai si $l = +\infty$ ou $l = -\infty$). Alors, toute sous suite $v_n$ de $u_n$ a pour limite $l$.*

Par conséquent, ici, on a que $\lim v_n = l$ et $\lim w_n = l$ donc $l = 1$ et $l = -1$ ce qui est une contradiction. L'hypothèse disant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente est donc fausse. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Montrons que $u_n$ est bornée. On a que

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$0 \leq 1/n \leq 1$$

donc

$$-1 \leq u_n \leq 2$$

donc $u_n$ est bornée.

**Rappel 2.** Le théorème de Bolzano-Weïerstrass dit ceci : Soit $(u_n)$ une suite de réels bornée. Alors, il existe une sous-suite de $(u_n)$ qui est convergente. (C'est un théorème très puissant).

Ici, on nous demande d'exhiber une sous-suite de $u_n$ qui soit convergente. Mais on a déjà vu que $v_n = u_{2n} \to 1$. $v_n = u_{2n}$ est donc une suite extraite convergente.

**Remarque 0.3** *Il y a d'autres sous-suites convergentes : $(u_{4n})$ $(u_{2^n})$, $(u_{n!})$ et $(u_{3^n})$ sont des sous-suites convergentes de $u_n$.*

**Exercice 3**

1. $u_{n+q} = \cos\frac{2(n+q)\pi}{q} = \cos\frac{2(n)\pi}{q} + 2\pi = \cos\frac{2(n+q)\pi}{q} = u_n$.
2. $u_{nq} = \cos\frac{2(nq)\pi}{q} = \cos 2n\pi = 1 = u_0$ et $u_{nq+1} = \cos\frac{2(nq+1)\pi}{q} = \cos\frac{2\pi}{q} = u_1$. Supposons, par l'absurde que $(u_n)$ converge vers $\ell$. Alors la sous-suite $(u_{nq})_n$ converge vers $\ell$ comme $u_{nq} = u_0 = 1$ pout tout $n$ alors $\ell = 1$. D'autre part la sous-suite $(u_{nq+1})_n$ converge aussi vers $\ell$, mais $u_{nq+1} = u_1 = \cos\frac{2\pi}{q}$, donc $\ell = \cos\frac{2\pi}{q}$. Nous obtenons une contradiction car pour $q \geq 2$, nous avons $\cos\frac{2\pi}{q} \neq 1$. Donc la suite $(u_n)$ ne converge pas.

**Exercice 4**

Remarquons d'abord que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1-k^2}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. En écrivant les fractions de $u_n$ sous la cette forme, l'écriture va se simplifier radicalement :

$$u_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2.2}\frac{(3-1)(3+1)}{3.3}\cdots\frac{(k-1)(k+1)}{k.k}\frac{(k)(k+2)}{(k+1).(k+1)}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n.n}$$

Tous les termes des numérateurs se retrouvent au dénominateur (et vice-versa), sauf aux extrémités. D'où :

$$u_n = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$

Donc $(u_n)$ tends vers $\frac{1}{2}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 5**

1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ donc

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}$$

(C'est un encadrement de l'aire de l'ensemble des points $(x, y)$ du plan tels que $x \in [n, n+1]$ et $0 \leq y \leq 1/x$ par l'aire de deux rectangles.) Nous obtenons l'inégalité :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

2. $H_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$, nous majorons chaque terme de cette somme en utilisant l'inégalité $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$ obtenue prcdemment : nous obtenons $H_n \leq \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-1) - \ln(n-2) + \cdots + \ln 2 - \ln 1 + 1$. Cette somme est télescopique (la plupart des termes s'éliminent et en plus $\ln 1 = 0$) et donne $H_n \leq \ln n + 1$.
   L'autre inégalité s'obtient de la façon similaire en utilisant l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ .
3. Comme $H_n \geq \ln(n+1)$ et que $\ln(n+1) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$ alors $H_n \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
4. $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln n + 1 - \ln n) \leq 0$ d'après la première question. Donc $u_{n+1} - u_n = f(\frac{1}{n+1}) \leq 0$. Donc $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite $(u_n)$ est décroissante.
   Enfin comme $H_n \geq \ln(n+1)$ alors $H_n \geq \ln n$ et donc $u_n \geq 0$.
5. La suite $(u_n)$ est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel $\gamma$. Ce réel $\gamma$ est la constante d'Euler (Leonhard Euler, 1707-1783, mathématicien d'origine suisse). Cette constante vaut environ $0,5772156649\ldots$ mais on ne sait pas si $\gamma$ est rationnel ou irrationnel.

**Exercice 6**

1. Suite non convergente car non bornée.
2. Suite convergente vers 0.
3. Suite non convergente car la sous-suite $u_{2p} = 1 + \frac{1}{2p}$ est toujours plus grande que 1. Alors que la sous-suite $u_{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1}$ est toujours plus petite que 0.

**Exercice 7**

Soit $(u_n)_n$ une suite d'entiers qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Dans l'intervalle $I = ]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$ de longueur 1, il existe au plus un élément de $\mathbb{N}$. Donc $I \cap \mathbb{N}$ est soit vide soit un singleton $\{a\}$.

La convergence de $(u_n)_n$ s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \text{tel que} \;\; (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon).$$

Fixons $\epsilon = \frac{1}{2}$, nous obtenons le $N$ correspondant. Et pour $n \geq N$, $u_n \in I$. Mais de plus $u_n$ est un entier, donc

$$n \geq N \Rightarrow u_n \in I \cap \mathbb{N}.$$

En conséquent, $I \cap \mathbb{N}$ n'est pas vide (par exemple $u_N$ en est un élément) donc $I \cap \mathbb{N} = \{a\}$. L'implication précédente s'écrit maintenant :

$$n \geq N \Rightarrow u_n = a.$$

Donc la suite $(u_n)_n$ est stationnaire (au moins) à partir de $N$. En prime, elle est bien évidemment convergente vers $\ell = a \in \mathbb{N}$.