TD n°2 : Fonctions Holomorphes. CORRECTION

Exercice 1

Calculer la dérivée de $w = f(z) = z^3 - 2z$ aux points

1. $\underline{\boldsymbol{z = z_0}}$.

   En utilisant les règle de dérivation on obtient facilement que : $\boxed{\frac{\partial}{\partial z} f(z_0) = 3{z_0}^2 - 2}$.

2. $\underline{\boldsymbol{z = -1}}$.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} f(-1) = 1}$$

Exercice 2

Montrer que l'application $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \longrightarrow \bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{iy}$, *est différentiable mais n'est pas dérivable.*

1. **<u>Différentiabilité.</u>**

   Soit l'application $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \longrightarrow \bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{iy}$

$$f(x+h; y+k) = x + h - \mathrm{i}(y+k) = (x - iy) + (h - ik)$$
$$f(x+h; y+k) = f(x; y) + \boldsymbol{dx}(\boldsymbol{h}; \boldsymbol{k}) - \boldsymbol{i}\, \boldsymbol{dy}(\boldsymbol{h}; \boldsymbol{k})$$

on note sa différentielle $\boxed{\boldsymbol{d\bar{z} = dx - idy}}$, on a $\boxed{\boldsymbol{d\bar{z}(h; k) = h - ik}}$

Remarque : $\boxed{dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})}$ et $\boxed{dy = \frac{1}{2}(dz - d\bar{z})}$

2. **<u>Non dérivabilité.</u>**

<u>Méthode 1 : Avec la définition</u>.

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \bar{z_0}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta \mathrm{x} - \mathrm{i}\Delta \mathrm{y}}{\Delta \mathrm{x} + \mathrm{i}\Delta \mathrm{y}}$$

- Donc si $\Delta \mathrm{x} = 0$; $\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = -1$.
- Et si $\Delta \mathrm{y} = 0$; $\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = 1$

La limite n'est donc pas indépendante de la façon dont Δz tend vers 0, la fonction n'est donc pas dérivable.

<u>Méthode 2 : Avec les conditions de Cauchy-Riemann</u>.

$\frac{\partial P}{\partial x} = 1 \; et \; \frac{\partial Q}{\partial y} = -1$ donc la fonction ne vérifie pas les conditions de Cauchy-Riemann, elle n'est de ce fait pas dérivable.

Exercice 3

Soit $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ *. Trouver* $\frac{\partial}{\partial z} f(z_0)$ *et déterminer en quels points* f *n'est pas dérivable.*

En utilisant les règle de dérivation on obtient facilement que : $\boxed{\frac{\partial}{\partial z} f(z_0) = \frac{2}{(1-z_0)^2}}$.

Elle n'est donc pas dérivable en 1.

Exercice 4

1. Montrer que si f est dérivable en z_0, alors f est continue en z_0.

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \times \Delta z$$

Et donc puisque $lim_{\Delta z \longrightarrow 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial}{\partial z} f(z_0)$ existe, on a :

$$\lim_{\Delta z \longrightarrow 0} f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = 0$$

Ce qui assure la continuité de f en z_0

2. Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

L'application $(x; y) \longrightarrow \bar{z} = x - iy$ est continue mais pas dérivable. (cf. Exercice 2).
La continuité est évidente puisque $f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = \overline{\Delta z}$, tend bien vers 0 quand $\Delta z \longrightarrow 0$.

Conditions de Cauchy-Riemann

Exercice 5* (Démonstration de cours)

En supposant les dérivées partielles continues dans $\mathbb{R}$, montrer que :

Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est **dérivable en z_0.**
2. f est **différentiable** en $(x_0; y_0)$ et :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = 0}$$

Si on note P et Q les parties réelles et imaginaires de f on a :

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \text{ et } \boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}}$$

Exercice 6

Montrer que $u = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ est harmonique c'est-à-dire que $\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$.

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-x}(-2\sin y + x \sin y - y \cos y)$

- $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-x}(2\sin y - x\sin y + y\cos y)$ *donc*

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2} = \mathbf{0}}$$

Différentielles.

Exercice 7

Soit $w = f(z) = z^3 - 2z^2$

1. **<u>Calculer Δw</u>**.

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (z_0 + \Delta z)^3 - 2(z_0 + \Delta z)^2 - ({z_0}^3 - 2{z_0}^2)$$

$$\boxed{\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (3{z_0}^2 - 4z_0)\,\Delta z + (3z_0 - 2)(\Delta z)^2 + (\Delta z)^3}$$

2. **<u>Calculer dw</u>**.

On peut écrire aussi que :

$$f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = (3{z_0}^2 - 4z_0)\,\Delta z + \Delta z[(3z_0 - 2)\Delta z + (\Delta z)^2]$$

Donc ici,

$$\boxed{d_{z_0} f(\,\Delta z) = (3{z_0}^2 - 4z_0)\,\Delta z}$$

Et

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} f(z_0) = 3{z_0}^2 - 4z_0}$$

Dérivation.

Exercice 8

Etudier et calculer les dérivées de fonctions suivantes :

1. f définie par $f(z) = e^z$.
   - On montre facilement que f est différentiable car les dp existent et sont continues.
   - f vérifient les conditions de Cauchy-Riemann donc on peut facilement calculer la dérivée.
2. g définie par $g(z) = e^{az}$.
3. h définie par $h(z) = sin\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.
4. k définie par $k(z) = cos\, z\ = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.
5. <u>l définie par $l(z) = tan\, z$.</u>

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} tan\, z_0 = \frac{1}{cos^2 z_0}}$$

6. $\underline{m \text{ définie par } m(z) = z^{1/2}}$.

La fonction m est dite multimorphe car elle possède 2 déterminations possibles. On doit se restreindre à une seule branche.

On sait que la fonction $z \to f(z) = Z = z^{\frac{1}{n}}$ n'est pas clairement définie.

$f(z)$ correspond au(x) complexe(s) $Z = \rho e^{it}$ tels que $Z^n = z = re^{i\theta}$

Soit :

$$(\rho e^{it})^n = re^{i\theta}$$

$$\begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ nt = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ t = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Donc tous les nombres $Z = \rho e^{it}$ tels que $\begin{cases} \rho = r^{\frac{1}{n}} \\ t = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$ $avec\ k \in \{0, 1, .., n-1\}$,

vérifient, $Z^n = z$ et sont donc images par $f\ de\ z$.

Ici par exemple $z = 1 = e^{i0}$ a deux images possibles,

$Z = e^{i0} = 1\ ou\ Z = e^{i\pi} = -1$ vérifient, $Z^2 = 1$ et sont donc images par $f\ de\ z$.

- Considérons la branche de $w = z^{1/2}$ pour laquelle $w = 1\ pour\ z = 1$.
  Alors $w^2 = z \quad d'où, \quad \frac{\partial}{\partial w}(w^2) = \frac{\partial}{\partial w}(z) \quad soit \quad 2w = \frac{\partial z}{\partial w}$

  et $\frac{1}{2w} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad soit \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial z} z^{1/2} = \frac{1}{2z^{1/2}}}$

- Considérons la branche de $w = z^{1/2}$ pour laquelle $w = -1\ pour\ z = 1$.
  Alors $w^2 = z \quad d'où, \quad \frac{\partial}{\partial w}(w^2) = \frac{\partial}{\partial w}(z) \quad soit \quad 2w = \frac{\partial z}{\partial w}$

  et $\frac{1}{2w} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad soit \quad \boxed{\frac{\partial}{\partial z} z^{1/2} = \frac{1}{2z^{1/2}}}$

La dérivée n'existe pas en 0. (Point de « branchement »)

7. <u>L définie par $L(z) = Log\ z$</u>.

$$w = Log\ z\ , d'\text{où} \quad z = e^w \quad et \quad \frac{\partial z}{\partial w} = e^w = z$$

donc

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{z}}$$

Le résultat est valable quelle que soit la branche considérée mais la dérivée n'est pas définie au point de branchement $z = 0$.