TD	Mathématiques	DECF Maths
	Approximation de lois	CORRECTION

__Conseil__ : Ayez sous les yeux la fiche de cours sur les probabilités.

I - Approximation de la loi Binomiale par la loi de poison.

Si une VAR suit une loi **B(n ;p)** , elle peut être approchée par une loi de Poison **P(np)** lorsque :

__**Exercice 1**__.

Soit X qui suit la loi B(40 ;0,03), calculer P(X = 2) et refaite le même calcul avec l'approximation par la loi de Poisson.

Correction.

Avec B(10 ;0,03) on trouve P(X = 2) ≃ 0,2206 et avec la loi de Poisson environ 0,2169.

II - Approximation de la loi Binomiale par la loi normale.

Si une VAR suit une loi **B(n ;p)** , elle peut être approchée par une loi de normale **N(np ;)**
lorsque :

Attention, on remplace

__**Exercice 2**__.

Le daltonisme ou mauvaise vision des couleurs est une anomalie dont 8 % des hommes sont atteints. On contrôle la vue de 500 hommes.

X est la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 500 hommes, associe le nombre de personnes atteintes de daltonisme.

1. Montrer que la loi de probabilité de X est binomiale.

2. On approxime la loi de X par une loi normale.

a. Donner ses paramètres **(*v.e.*)**.

b. À l'aide de la correction de continuité, à indiquer en notant $\tilde{X}$ la variable aléatoire normale, calculer la probabilité des événements **(ε = 1)** :

A : « $X < 35$ »,

B : « $X > 45$ »,

C : « $32 < X < 46$ ».

Correction

1°) X suit la loi binomiale B(n ; p) avec n = 500 et p = 8%.

2°) **N(np ;)** donne environ N(40 ; 6,066) donc E(X) = 40 et V(X) = 36,8

P(A) ≅ 0,18 ; P(B) ≅ 0,18 ; P(C) ≅ 0,71

__**Exercice 3.**__

Chacun des 280 techniciens d'une entreprise d'informatique utilise son téléphone relié à l'ordinateur central en moyenne 6 minutes par heure.
Quel est le nombre minimum de lignes dont il faut équiper l'ordinateur pour que, à l'instant t, la probabilité d'encombrement soit inférieure à 0,02 ?
On pourra désigner par X la variable aléatoire qui représente le nombre de lignes occupées à l'instant t et on montrera que X suit une loi binomiale que l'on approchera par une loi normale.
On n'oubliera pas la correction de continuité.

Correction.

Pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant 280$, soit X_i la variable aléatoire qui, à l'instant t, associe 1 si le $i^{\text{ème}}$ technicien est en ligne, 0 sinon.
Les variables aléatoires X_i sont des variables de Bernoulli de même paramètre $\dfrac{6}{60}$ et sont indépendantes.

Alors $X = \sum_{i=1}^{280} X_i$ donc X suit la loi binomiale de paramètres 280 et 0,1.
$E(X) = 280 \times 0{,}1 = 28$
$\sigma(X) = \sqrt{280 \times 0{,}1 \times 0{,}9} = 0{,}6\sqrt{70}$.
Soit $\widetilde{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(28\,;\, 0{,}6\sqrt{70})$
Puisque n est grand ($n = 280$), la loi de X peut être approchée par celle de $\widetilde{X}$.
Calculons a tel que :
$P(X \geqslant a) < 0{,}02$; $P(\widetilde{X} \geqslant a - 0{,}5) < 0{,}02$;

$$P\left(\widetilde{X}^* \geqslant \frac{a - 0{,}5 - 28}{0{,}6\sqrt{70}}\right) < 0{,}02\,;$$

$$1 - \Pi\left(\frac{a - 0{,}5 - 28}{0{,}6\sqrt{70}}\right) < 0{,}02\,;$$

$$\Pi\left(\frac{a - 0{,}5 - 28}{0{,}6\sqrt{70}}\right) > 0{,}98\,;$$

$$\frac{a - 0{,}5 - 28}{0{,}6\sqrt{70}} > 2{,}05\,;$$

$$a > 38{,}79.$$

Il faut donc au minimum 39 lignes.

Exercice 4

Une entreprise planifie sa production à l'aide d'un programme de production hebdomadaire.

Une étude a permis de constater que, quel que soit le programme de production hebdomadaire choisi, la probabilité de le réaliser effectivement est égale à 0,7.

On suppose que les réalisations des programmes hebdomadaires de production sont indépendantes les unes des autres.

Soit X une variable aléatoire qui mesure le nombre de programmes de production hebdomadaires réalisés, par période de 50 semaines de production.

1. a. Montrer que X suit une loi binomiale. Donner ses paramètres.

b. Calculer la probabilité de l'événement « $X = 35$ » **($\varepsilon = 2$)**.

2. On remplace la loi de X par une loi normale. On note $\tilde{X}$ une variable aléatoire qui suit cette loi normale.

Utiliser $\tilde{X}$ en effectuant une correction de continuité pour **($\varepsilon = 2$)** :

a. recalculer $P(X = 35)$;

b. calculer la probabilité de réaliser au moins 40 programmes de production par période de 50 semaines de production.

Correction

1. a. Pour tout i entier naturel tel que $1 \leqslant i \leqslant 50$, soit X_i la variable aléatoire qui, à chaque période de 50 semaines de production, associe 1 si le programme de la $i^{\text{ème}}$ semaine est réalisé, 0 sinon.
Les variables aléatoires X_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre 0,7 et sont indépendantes.

Or $X = \sum_{i=1}^{50} X_i$ donc X suit la loi binomiale de paramètres 50 et 0,7.

b. $P(X = 35) = C_{50}^{35} \times 0{,}7^{35} \times 0{,}3^{15} = 0{,}12$.

2. a. $E(X) = 50 \times 0{,}7 = 35$

$\sigma(X) = \sqrt{50 \times 0{,}7 \times 0{,}3} \approx \sqrt{10{,}5}$

donc $\tilde{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(35 ; \sqrt{10{,}5})$

$P(X = 35) \approx P(34{,}5 < \tilde{X} < 35{,}5)$

$\approx P(-0{,}15 < \tilde{X}^* < 0{,}15) \approx 2\Pi(0{,}15) - 1 \approx 0{,}12.$

b. $P(X \geqslant 40) \approx P(\tilde{X} > 39{,}5)$

$$\approx P\left(\tilde{X}^* > \frac{39{,}5 - 35}{3{,}24}\right)$$

$$\approx P(\tilde{X}^* > 1{,}39) \approx 0{,}08.$$