Dérivation – Fiche d'exercices n°1

Calculer un nombre dérivé

Énoncé : Dans chaque cas, a est un réel donné ; démontrer que la fonction est dérivable en a et donner son nombre dérivé en a.

a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x + 2$; $a = 2$

b) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 + 3x - 1$; $a = 1$

c) k est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[$ par $k(x) = \frac{1}{x}$; $a = -1$

Méthode

Dans les cas usuels, pour obtenir la limite de $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0, on procède d'abord à des transformations d'écritures de ce rapport.

22 Dans chaque cas, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a est un réel. Exprimer le plus simplement possible en fonction de h, le taux de variation de f entre a et $a + h$ avec $h \neq 0$.

a) $f(x) = 2 - 3x$ et $a = 3$

b) $f(x) = 2x^2 - x + 3$ et $a = 2$

c) $f(x) = (3x + 1)^2$ et $a = -1$

23 Dans chaque cas, exprimer le plus simplement possible en fonction de h, le taux de variation de la fonction f entre 1 et $1 + h$ avec $h \neq 0$.

a) Pour tout $x \neq -2$, $f(x) = \frac{5}{2+x}$

b) Pour tout $x \neq \frac{1}{3}$, $f(x) = \frac{-2}{3x-1}$

c) Pour tout $x \neq 2$, $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

24 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - x$.

a) Vérifier que pour tout réel h, $f(1 + h) = h^2 + h$.

b) Pour tout réel $h \neq 0$, exprimer en fonction de h, le rapport $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

c) En déduire que f est dérivable en 1 et donner le nombre dérivé de f en 1.

25 f est la fonction définie sur $]-\infty\,;3[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x-3}.$$

a) Vérifier que pour tout réel $h < 2$ et $h \neq 0$,

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1}{2(h-2)}.$$

b) En déduire que f est dérivable en 1 et donner le nombre dérivé de f en 1.

26 Dans chaque cas, utiliser un taux de variation pour démontrer que la fonction est dérivable en a et donner son nombre dérivé en a.

a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x$ et $a = 0$.

b) g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x - 5x^2$ et $a = -1$.

c) k est la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $k(x) = \frac{2}{x+1}$ et $a = 1$.

27 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentant f dans un repère. On note A et M les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 1 et $1 + h$ avec $h > -1$ et $h \neq 0$.

Exprimer en fonction de h, le coefficient directeur de la droite (AM).

Calculer une vitesse instantanée

Énoncé : Un immeuble mesure 100 m de haut. On lâche une bille du haut de cet immeuble à la date $t = 0$. La loi horaire du déplacement est donnée par $d(t) = 5t^2$ (avec $d(t)$ en mètres et t en secondes).

Calculer la vitesse instantanée de la bille à l'instant $t = 3$ s.

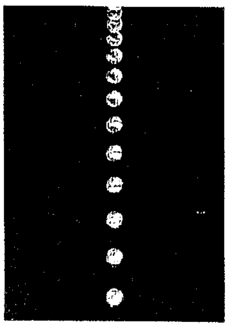
Méthode

Pour calculer la vitesse instantanée à l'instant t_0, on calcule la limite de la vitesse moyenne $\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

37 Une tour a 40 m de haut. On lâche une balle du sommet de cette tour à la date $t = 0$.

La loi horaire du déplacement est donnée par $d(t) = 4{,}9\,t^2$ (avec $d(t)$ en mètres et t en secondes).

Calculer la vitesse instantanée de la balle à l'instant $t = 2$ s.



38 Un puits a 24,2 m de profondeur et il est à sec. On lâche une pierre dans ce puits à l'instant $t = 0$.

La loi horaire du déplacement est donnée par $d(t) = 5t^2$ avec $d(t)$ en mètres et t en secondes.

Calculer la vitesse instantanée de la pierre au moment où elle touche le fond.

39 Un mobile se déplace sur un axe selon la loi horaire $x(t) = t^2 + t + 1$ où $x(t)$ désigne l'abscisse du mobile à l'instant t. L'origine des temps est $t = 0$.

a) En quel point de l'axe se trouve le mobile à l'instant $t = 0$?

b) À quel instant t_0 le mobile passe-t-il au point d'abscisse 3 ?

c) Calculer la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.