Barycentre – Fiche d'exercices n°2

Exercice 1

Losange et barycentre

ABCD est un losange de centre O. E est le barycentre de (A, 2) et (B, 1) et F celui de (C, 2), (D, 1).

a) Démontrer que la droite (EF) passe par O.

b) (EF) coupe (AD) en I et (BC) en J.
Démontrer que BIDJ est un parallélogramme.

c) Démontrer que BDI et BDJ sont des triangles rectangles.

Exercice 2

Barycentre de barycentres

ABCD est un quadrilatère, I est le milieu de [AC] et J celui de [BD].

a) Placer les points K et L tels que $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$; $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$.

b) G est le barycentre de (A, 1), (B, 2), (C, 1), (D, 2).
Démontrer que G est à l'intersection des droites (KL) et (IJ).

c) Démontrer que G est le milieu de [KL].
Déterminer la position de G sur (IJ).

Exercice 3

À égale distance

Dans le plan, ABCD est un parallélogramme.
I est le barycentre de (A, – 2) et (B, 5).

J est le barycentre de (C, 1) et (D, 2).

1. Construire I et J.

2. Pour tout point M du plan, exprimer :

a) $-2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$.

b) $\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}$ en fonction de $\overrightarrow{MJ}$.

3. a) Quel est l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M tels que :

$$\|-2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\| \ ?$$

b) Démontrer que le milieu de [BC] appartient à $\mathscr{C}$.

INFO

La notation $\|\vec{u}\|$ (se lit « norme de $\vec{u}$ ») désigne la longueur du vecteur $\vec{u}$. Ainsi $\|\overrightarrow{OA}\| = OA$.

Exercice 4

Droites et cercles

A et B sont deux points distincts donnés du plan.

1. a) Construire le barycentre G de (A, 2) et (B, 1).

b) Pour tout point M du plan, exprimer $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.

2. a) Quel est l'ensemble $\mathscr{C}_1$ des points M pour lesquels les vecteurs $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ?

b) Quel est l'ensemble $\mathscr{C}_2$ des points M tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = AB \ ?$$

c) Quel est l'ensemble $\mathscr{C}_3$ des points M tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3MA \ ?$$

d) Représenter $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ sur une même figure.

Exercice 5 : DM pour le vendredi 5/11

Lieux et barycentres

*Les questions **1, 2, 3, 4** sont indépendantes.*

1. A et B sont deux points distincts du plan.

a) Construire le barycentre C de (A, 2) et (B, 3).

b) Construire le barycentre D de (A, 3) et (B, 2).

c) Démontrer que les segments [AB] et [CD] ont le même milieu.

d) Pour tout point M, exprimer $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MC}$ et $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MD}$.

e) Quel est l'ensemble $\mathscr{C}_1$ des points M du plan tels que les vecteurs $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ et $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$ aient la même longueur, c'est-à-dire $\|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\|$?

2. A et B sont deux points du plan tels que $AB = 4$.

a) Construire le point E barycentre de (A, 1) et (B, 3).

b) Pour tout point M, exprimer $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{ME}$.

c) Quel est l'ensemble $\mathscr{C}_2$ des points M du plan tels que le vecteur $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ ait pour longueur 12, c'est-à-dire $\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 12$?

3. ABC est un triangle.

a) Construire le barycentre G de (A, 3) et (B, 5).

b) Quel est l'ensemble $\mathscr{C}_3$ des points M du plan tels que les vecteurs $3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient colinéaires ?

4. ABC est un triangle.
H est le barycentre de (A, 2), (B, 1) et (C, – 1).

a) Construire H.

b) Pour tout point M, exprimer $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MH}$.

c) À tout point M du plan, on associe le point M′ tel que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.
Quelle transformation géométrique associe M′ à M ?

d) Lorsque M décrit un cercle $\mathscr{C}$, quel est l'ensemble $\mathscr{C}_4$ décrit par le point M′ ?