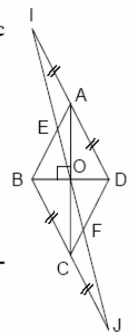
Barycentres – Fiche d'exercices n°2 - CORRECTION

Exercice 1

a) E est barycentre de (A, 2) et (B, 1) et F est barycentre de (C, 2) et (D, 1) donc O′ barycentre de (E, 3), (F, 3) est le milieu de [EF] et par associativité O′ est barycentre de (A, 2), (B, 1), (C, 2), (D, 1).

O est milieu de [AC] et [BD] car ABCD est un losange donc par associativité, O′ est barycentre de (O, 4), (O,2), alors O′ = O.

La droite (EF) passe donc par O.



b) ABCD est un losange donc AB = BC = CD = DA

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FC}$

Donc $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{AE}$ et (AB)//(CD).

D'après le théorème de Thalès

$\overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IF} = 2\overrightarrow{IE}$.

De même $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CF}$ donc comme ci-dessus $\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC}$.

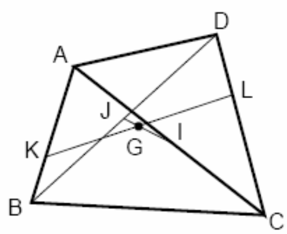
Ainsi $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ID}$

donc BIDJ est un parallélogramme.

c) BDI est rectangle en B car on sait que AOD est rectangle en O (puisque ABCD est un losange) et A milieu de [ID], O milieu de [BD] d'après le théorème des milieux (IB)//(AO), ainsi comme (AO) ⊥ (OD) on a (IB) ⊥ (BD).

De même pour BDJ avec C milieu de [BJ].

Exercice 2



a) $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$

s'écrit $3\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{AB}$

soit $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$ s'écrit

$\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

b) $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{0}$ donc K est barycentre de (A, 1), (B, 2) ; $\overrightarrow{LC} + 2\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{0}$ donc L est barycentre de (C, 1), (D, 2). Par associativité, G est barycentre de (K, 3), (L, 3), G est milieu de [KL].

I est milieu de [AC] donc barycentre de (A, 1), (C, 1).
J est milieu de [BD] donc barycentre de (B, 2), (D, 2).
Par associativité, G est barycentre de (I, 2), (J, 4) donc G ∈ (IJ).

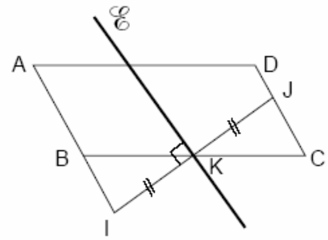
c) G est milieu de [KL] d'après **b)** et G vérifie $2\overrightarrow{GI} + 4\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$.

Exercice 3

1. I barycentre de (A, – 2), (B, 5) vérifie $\overrightarrow{AI} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$.

J barycentre de (C, 1), (D, 2) vérifie

$\overrightarrow{CJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.



2. a) $-2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$.

b) $\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MJ}$.

3. a) M ∈ $\mathscr{E}$ si et seulement si $||3\overrightarrow{MI}|| = ||3\overrightarrow{MJ}||$, c'est-à-dire MI = MJ.

Donc $\mathscr{E}$ est la médiatrice de [IJ].

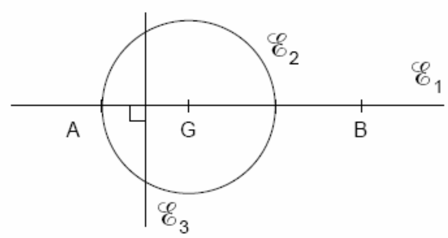
b) Soit K le milieu de [BC].

On a $\overrightarrow{BI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{JC}$

donc BICJ est un parallélogramme ainsi K est aussi milieu de [IJ] donc appartient à $\mathscr{E}$.

Exercice 4

b) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$.



2. a) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires si et seulement si $3\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{AB}$ le sont ; comme G ∈ (AB), $\mathscr{E}_1$ = (AB).

b) M ∈ $\mathscr{E}_2$ signifie $||3\overrightarrow{MG}||$ = AB soit MG = $\frac{AB}{3}$,

$\mathscr{E}_2$ est donc le cercle de centre G et de rayon $\frac{AB}{3}$.

c) M ∈ $\mathscr{E}_3$ signifie 3MG = 3MA, MG = MA donc $\mathscr{E}_3$ est la médiatrice de [AG].